

621.396(06)
P15

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

РАДИОТЕХНИКА

ВЫПУСК 5

ХНУРЕ Radiotekhnika



804917

Бібліотека ХНУРЕ
Дар читача

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1967

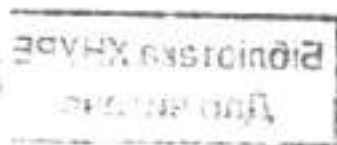
Сборник содержит результаты теоретических и экспериментальных работ по вопросам статистической теории связи, выполненных в ряде вузов и научно-исследовательских лабораторий. Материалы выпуска предназначены для широкого круга специалистов, работающих в области общей теории связи и приложений статистической теории к вопросам радиотехники и радиоэлектроники. Сборник может быть также полезен для аспирантов, инженеров и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Редакционная коллегия:

Проф. В. П. Шестопалов (отв. редактор), доц. В. Д. Куцун (зам. отв. редактора), ст. преподав. Г. И. Сидоров (отв. секретарь), проф. Б. Л. Кацев, доц. И. П. Якименко, доц. В. В. Толстов, доц. Е. Г. Прошкин, доц. А. И. Игряков, доц. Н. А. Хажняк, инж. Г. П. Винников, ст. преподав. А. В. Прохоров, доц. К. Б. Круковский, доц. В. С. Кириченко.

Адрес редакционной коллегии:

г. Харьков, проспект Ленина, 14, Институт радиоэлектроники.



ВОПРОСЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

С. Н. Терентьев, С. Е. Фалькович

В работе рассматриваются системы передачи количественной информации цифровым методом. Под количественной информацией понимаются сообщения, которые имеют смысл некоторой величины l . Предполагается, что величина l может принимать любые значения из интервала $(L_0; L_m)$ с заданной априорной вероятностью $p(l)$. Передача ведется цифровым методом. Это означает, что величина l квантована на некоторое число M уровней

$$l_N = L_0 + \frac{2N-1}{2} \Delta l; \quad N = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где Δl — шаг квантования

$$\Delta l = \frac{L_m - L_0}{M+1}. \quad (2)$$

Объектом передачи являются означивающие номера уровней числа N , закодированные позиционным (обычно двоичным) кодом, так что ансамбль передаваемых сообщений представляет собой совокупность

$$\{l_N\} = l_1, \dots, l_M \text{ или } \{N\} = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Ансамбль решений (или оценок), принимаемых в процессе приема, представляет собой аналогичную совокупность, обозначаемую в дальнейшем теми же символами, что и сообщения, но со звездочкой $\{l_N^*\}$ или $\{N^*\}$. Оптимальной называется система, которая обеспечивает наилучшие в смысле выбранного критерия решения. Наиболее общий критерий оптимальности — критерий среднего риска сводится к обеспечению минимума математического ожидания r некоторой функции $r(l_i^*; l_i)$ сообщения l_i и оценки l_i^* , называемой функцией потерь.

$$r = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M r(l_j^*; l_i) p(l_i) p(l_j^*|l_i). \quad (4)$$

Здесь $p(l_i)$ (как и выше) — априорная вероятность передачи различных сообщений. $p(l_j^*|l_i)$ — условная вероятность реализации решения l_j^* при условии, что было передано сообщение l_i .

Характер оптимальности решения и рекомендации по выбору тех или иных элементов и параметров системы зависят от выбора вида функции потерь r . В теории передачи дискретных сообщений [1] наиболее широко используется простая функция потерь

$$r(l_j^*; l_i) = 1 - \delta_{ij}, \quad (5)$$

которая принимает значения 0 для всех правильных решений ($i = j$) и 1 для всех неправильных ($i \neq j$). Результаты подстановки простой функции потерь (5) в общую формулу (4) хорошо известны [1]. Помехоустойчивость (качество) системы характеризуется средней вероятностью ошибочного решения. Оптимальной оказывается система (полагается $p(l_i) = \text{const}$), у которой одинаковые вероятности ошибочного решения для всех элементов сигнала и соответственно равномерное распределение энергии сигнала по элементам.

Использование простой функции потерь оправдано в тех случаях, когда любое неправильное решение можно считать одинаково нежелательным. При передаче количественной информации не безразлично, какое из неправильных решений будет принято. Цену ошибки или потери, связанные с ошибкой, следует считать некоторой монотонно возрастающей функцией абсолютной величины ошибки $|l_i^* - l_i|$. В подавляющем большинстве случаев разумно, как это делается при оценке непрерывных параметров, принять квадратичную функцию потерь

$$r(l_i^*; l_i) = (l_i^* - l_i)^2. \quad (6)$$

При этом помехоустойчивость системы и ее качество характеризуются величиной средней квадратичной ошибки σ^2 , а критерий оптимума сводится к широко используемому в статистике критерию минимума этой ошибки

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (l_i^* - l_j)^2 p(l_i) p(l_j^* | l_i). \quad (7)$$

или, подставляя (1), получим

$$\sigma^2 = (\Delta N)^2 \overline{\Delta N^2}, \quad (8)$$

где ΔN — ошибка решения, равная разности между переданным числом N и принятым решением N^*

$$\Delta N = N - N^*. \quad (9)$$

а черта над величиной здесь и в дальнейшем означает статистическое усреднение по всем возможным значениям передаваемых сообщений N и принимаемых решений N^* .

Поскольку в теории передачи дискретных сообщений, как правило, используется критерий, основанный на применении простой функции потерь [1], целесообразно выделить из класса система передачи дискретной информации системы передачи количественной информации и оценивать их качество или помехоустойчивость по критерию средней квадратичной ошибки. В дальнейшем рассматривается оптимизация некоторых параметров системы передачи количественной информации по сформированному критерию при следующих допущениях.

1. Прием производится на фоне аддитивных флюктуационных помех с постоянной спектральной интенсивностью N_0 .

2. Числа передаются двоичным кодом (0, 1).

3. Оптимально поэлементно обрабатываются принимаемые сигналы, которые для упрощения алгебраических расчетов и конечных формул полагаются некогерентными.

4. Априорные распределения вероятностей чисел 0 и 1 в различных разрядах полагаются независимыми и известными.

Если числа N , подлежащие передаче по системе связи, кодируются двоичным позиционным кодом, то имеет место следующее выражение:

$$N = \sum_{k=1}^m 2^{k-1} a_k. \quad (10)$$

Здесь k — номер разряда (позиции) двоичного числа;
 $m = \lceil \log_2 M \rceil$ — значность двоичного числа, равная целой части двоичного логарифма от максимального из передаваемых чисел;
 a_k — цифры 0 или 1, стоящие на k -й позиции.

При наличии помех в канале символы a_k могут искажаться. Поэтому на выходе приемного устройства будет наблюдаться последовательность a_1^* , a_2^* , ..., a_m^* , вообще говоря, отличная от переданной последовательности a_1 , a_2 , ..., a_m , а принятое число

$$N^* = \sum_{k=1}^m 2^{k-1} a_k^*. \quad (11)$$

При этом ошибка в значении принятого числа

$$\Delta N = N^* - N = \sum_{k=1}^m 2^{k-1} (a_k^* - a_k). \quad (12)$$

Среднее значение ошибки можно найти, если известны априорные вероятности появления в k -м разряде нуля — $P_k(0)$ единицы $P_k(1)$, вероятности искажений $P_k(1/0)$ и $P_k(0/1)$

$$\Delta N = \sum_{k=1}^m 2^{k-1} [P_k(0) P_k(1/0) - P_k(1) P_k(0/1)]. \quad (13)$$

Как было сказано выше, оптимизацию системы передачи количественной информации целесообразно вести не по минимуму средней вероятности ошибок, а по минимуму средней квадратичной ошибки. Квадрат ошибки в значении принятого числа

$$\begin{aligned} \Delta N^2 = & \sum_{k=1}^m 2^{2(k-1)} (a_k^* - a_k)^2 + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m 2^{k+j-2} (1 - \delta_{jk}) (a_k^* - a_k) (a_j^* - a_j). \end{aligned} \quad (14)$$

Средняя квадратичная ошибка

$$\begin{aligned} \overline{\Delta N^2} = & \sum_{k=1}^m 2^{2(k-1)} [P_k(0) P_k(1/0) + P_k(1) P_k(0/1) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m 2^{k+j-2} (1 - \delta_{jk}) [P_k(0) P_k(1/0) - P_k(1) P_k(0/1)] [P_j(0) P_j(1/0) - \\ & - P_j(1) P_j(0/1)] \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$

Для простоты рассмотрим случай, когда априорные вероятности $P_k(0) = P_k(1)$ и канал симметричный, т. е. $P_k(1/0) = P_k(0/1)$.

Здесь выражение для среднеквадратической ошибки упрощается

$$\overline{\Delta N^2} = \sum_{k=1}^n 2^{2(k-1)} P_{\text{ош } k}, \quad (16)$$

где $P_{\text{ош } k} = P_k(0/1) = P_k(1/0)$.

В дальнейшем задача оптимизации системы передачи сводится к минимизации выражения (16). Это достигается наложением некоторого дополнительного условия на способ формирования кодовой комбинации, отображающей передаваемое число.

Разумно, например, потребовать, чтобы минимум среднеквадратической ошибки обеспечивался без увеличения общей энергии кодовой комбинации. При бинарном кодировании это требование равносильно сохранению скорости передачи двоичных чисел в секунду, так как при этом продолжительность кодовой комбинации остается постоянной.

Введем следующие обозначения: Q_k — энергия элемента кодовой комбинации на k -й позиции, N_0 — спектральная плотность флуктуационных шумов в канале.

$$h_k^2 = \frac{Q_k}{N_0}. \quad (17)$$

Теперь задачу оптимизации можно сформулировать окончательно. Требуется найти минимум

$$\Delta N^2 = \sum_{k=1}^n 2^{2(k-1)} P_{\text{ош } k} \quad (18)$$

при условии, что

$$\sum_{k=1}^n h_k^2 = H^2.$$

Для определенности будем полагать, что передача ведется с частотной манипуляцией, а прием — некогерентный. Тогда, при наличии в канале нормального шума, вероятность ошибки в приеме элемента кодовой комбинации определяется известным выражением (1)

$$P_{\text{ош } k} = \frac{1}{2} e^{-\frac{h_k^2}{2}}. \quad (19)$$

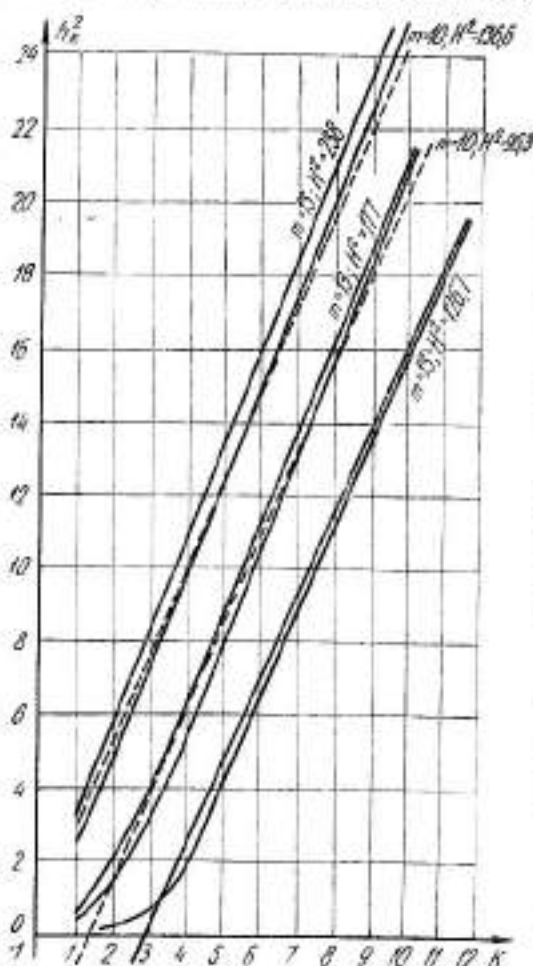


Рис. 1.

Подставляя (19) в (18), получим

$$\Delta N^2_{\text{min}} = \sum_{k=1}^m 2^{2(k-1)} \frac{1}{2} e^{-\frac{h_k^2}{2}} \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^m h_k^2 = H^2$$

Решение этой вариационной задачи дает следующий результат. Минимум дисперсии ошибки передаваемых чисел системой связи обеспечивается, когда на передающей стороне в m -значном двоичном числе символы a_k имеют энергию h_k^2 , соответствующую следующей функции от k :

$$h_k^2 = \frac{H^2}{(\log_2 M)} - 4 \ln 2 \left(\frac{(\log_2 M + 1)}{2} - k \right) \quad (21)$$

На рис. 1 приведен график зависимости энергии посылок от номера разряда, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки ΔN^2_{min} при заданной энергии кодового слова H^2 . На этом же графике пунктирными линиями показана зависимость $h_k^2 = f(k)$ при когерентном приеме. Как видно из графиков, отличие в законе оптимального распределения энергии при когерентном и некогерентном приеме незначительное.

На рис. 2 приве-

дены графики зависимости дисперсии ошибки от разрядности m .

Из графиков видно, что при оптимальном распределении энергии кодового слова между символами a_k дисперсия ошибки ΔN^2_{min} уменьшается в 100-500 раз по сравнению с дисперсией ошибки, возникающей при передаче чисел N обычным позиционным двоичным кодом.

Легко показать, что сохраняя дисперсию ошибки неизменной, при оптимальном распределении $h_k^2 = f(k)$, энергию кодового слова можно уменьшить в 2-2,5 раза. Это равносильно выигрышу в скорости передачи во столько же раз.

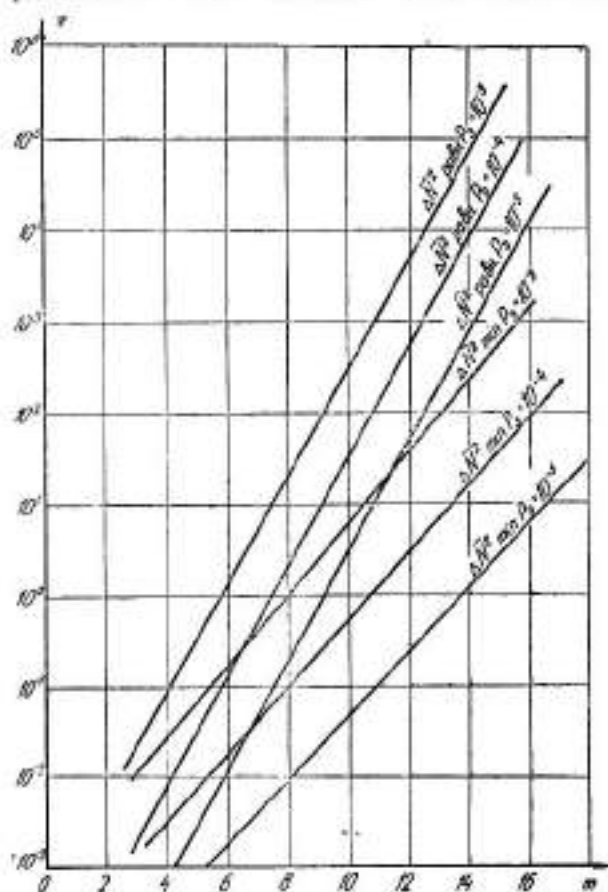


Рис. 2

Выше были изложены вопросы оптимизации системы, предназначенной для передачи числа N . Если система предназначена для передачи чисел, несущих информацию об изменении некоторой непрерывной величины $I \in \{L_0; L_m\}$, то с точки зрения оптимизации такой системы важным является вопрос о выборе шага квантования ΔI или, что то же самое, о значности кода

$$m = \lceil \log_2 M \rceil.$$

Понятно, что ошибка в передаче величины I будет зависеть как от величины шага квантования ΔI , так и от точности передачи числа N . Дисперсия этой ошибки

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = \sigma_{\text{кв}}^2 + \sigma_{\text{ш}}^2. \quad (22)$$

Здесь $\sigma_{\text{кв}}^2$ — дисперсия ошибки вследствие квантования величины I ;

$\sigma_{\text{ш}}^2$ — дисперсия ошибки в передаче числа N за счет шумов.

Задача оптимизации сводится к определению оптимального числа разрядов двоичного кода, с помощью которого передаются все значения $I_N \in \{I_0; I_M\}$. При этом для заданных условий в канале ошибка $\sigma_{\text{общ}}^2$ должна быть минимальной.

Для простоты будем полагать, что величина $I \in \{0; L_m\}$ имеет равномерный закон распределения плотности вероятностей

$$\varphi(I) = \frac{1}{L_m}.$$

Тогда дисперсию ошибки квантования легко определить из выражения [2]

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \int_{I_N - 0,5\Delta I}^{I_N + 0,5\Delta I} (I - I_N)^2 \varphi(I) dI = \frac{1}{12} \left(\frac{L_m}{M} \right)^2. \quad (23)$$

Дисперсия ошибки $\sigma_{\text{ш}}^2$ определится из выражения

$$\sigma_{\text{ш}}^2 = \left(\frac{L_m}{M} \right)^2 \overline{\Delta N^2}. \quad (24)$$

При оптимальном распределении $h_{k \text{ опт}}$, с учетом (21),

$$\sigma_{\text{ш мин}}^2 = \left(\frac{L_m}{M} \right)^2 \sum_{k=1}^m 4^{k-1} \exp \left[-\frac{H^2}{2m} + \ln 2^{m-1} - \ln 4^{k-1} \right]. \quad (25)$$

После несложных преобразований выражения (25) с учетом (23) и (22) будем иметь

$$y = \frac{\sigma_{\text{общ}}^2}{L_m^2} = \frac{1}{12 \cdot 4^m} + \frac{m}{4 \cdot 2^m} \exp \left(-\frac{H^2}{2m} \right). \quad (26)$$

Полученное выражение позволяет определить оптимальное число разрядов двоичного кода, обеспечивающего минимальную общую ошибку $\sigma_{\text{общ мин}}^2$.

На рис. 3 приведены графики зависимости $y_2 = f_2(m)$, построенные по выражению (26). Из графиков видно, что, начиная с некоторого значения $m_{\text{опт}} = \lceil \log_2 M_{\text{опт}} \rceil$, увеличение значности кода (т. е. числа уровней квантования M) не только не уменьшает ошибки $\sigma_{\text{общ}}$, но даже приво-

дит к ее увеличению. Это особенно хорошо видно из графиков, $y_2 = f_2(m)$ рис. 4. Графики построены для случаев, когда на приемной стороне производится когерентный прием и распределение $h_k^2 = f(k)$. На этом же рисунке приведены графики $y_1 = f_1(m)$ для случая, когда распределение энергии кодового слова равномерное, т. е. $h_k^2 = \frac{P^2}{m}$. Из

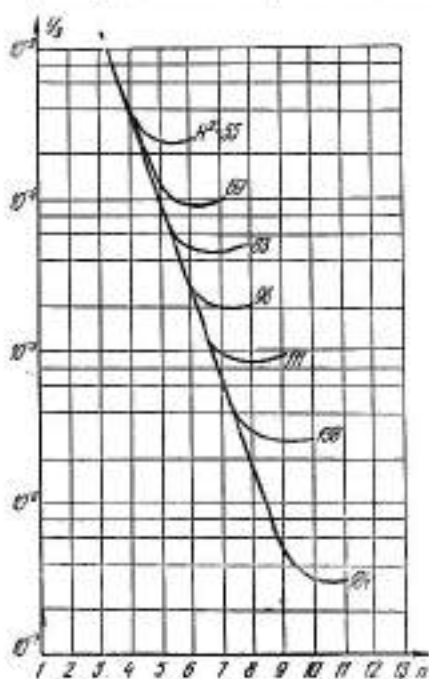


Рис. 3.

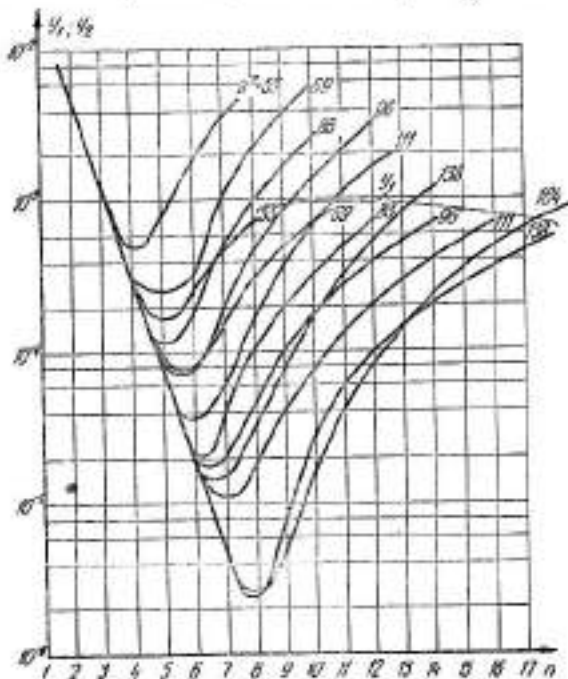


Рис. 4.

сравнения графиков видно, что при значности код $m = 7-8$ и достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности шумов оптимальные системы передачи позволяют уменьшить дисперсию ошибки на порядок. Эти же графики свидетельствуют о том, что стремление повысить точность передачи дискретной величины путем увеличения числа уровней квантования без учета погрешностей передачи может привести к увеличению дисперсии ошибки на 2-3 порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Ф и н к. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.
2. Е. А. Дроздов, А. П. Пятибратов. Автоматическое преобразование и кодирование информации. Изд-во «Сов. радио», 1964.

ОПТИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СИГНАЛАМИ ПО КАНАЛУ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ

И. Д. Задеренко

В тех случаях, когда символы алфавита, с помощью которых передается дискретная информация, независимы и равновероятны, критерий идеального наблюдателя совпадает с критерием минимума потерь информации [1]. В дальнейшем будем считать, что в приемнике используется оптимальная решающая схема, основанная на критерии идеального наблюдателя. Применение этой схемы допускает работу с посылками наименьшей длительности при заданной вероятности ошибки.

К. Шенноном показано [2], что существует тесная связь между вероятностью ошибочного приема и скоростью передачи информации. В частности доказано, что если скорость передачи информации меньше пропускной способности

$$C = F_k \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_n} \right), \quad (1)$$

то вероятность ошибочного приема с помощью кодирования в широком смысле может быть сделана сколь угодно малой.

Известно [1], что для реализации предела, указанного Шенноном, необходимо, чтобы при передаче по каналу с флюктуационными шумами использовались коды с очень высоким основанием m , а сигналы имели структуру, напоминающую реализации белого шума.

В реальных системах передачи информации считается допустимым ошибочный прием некоторой части переданных символов, определяемый заданной величиной вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$. При этом основание кода выбирается, как правило, не слишком высоким.

Интересно определить для таких систем максимальную скорость передачи информации, при которой вероятность ошибочного приема передаваемых элементов не превосходит заданной, а флюктуационный канал ограничен эффективной полосой пропускания F_k , и интенсивность шумов, действующих в канале, определяется величиной спектральной плотности помехи ν_p^2 . Эти ограничения часто встречаются в практике.

Скорость, определенную таким образом, обозначим R_{opt} и назовем оптимальной скоростью передачи информации. В дальнейшем будет так же использоваться понятие удельной оптимальной скорости

$$R_{\text{opt } r} = \frac{R_{\text{opt}}}{F_k}.$$

Итак, решение поставленной задачи проводится при следующих условиях:

1) информация передается по каналу с постоянными параметрами с эффективной полосой F_k ;

2) в канале действует нормальный шум со спектральной интенсивностью ν_0^2 ;

3) отношение мощности сигнала к мощности шума $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ задано. Требуется определить максимальную удельную скорость передачи информации $R_{\text{opt } F}$, при которой вероятность ошибочного приема передаваемых элементов не превышает заданной величины $P_{\text{ош}}$.

Решение этой задачи целесообразно провести для класса ортогональных сигналов с основанием m . Из работ [3], [4] следует, что эти сигналы обладают рядом достоинств с точки зрения как их энергетических свойств, так и простоты реализации их приема и разделения.

Как показал Д. В. Агеев [5], максимально возможное число ортогональных функций, локализованных в интервале времени T , при условии, что их энергия максимально сосредоточена в полосе частот Δf , и при неограниченном увеличении промежутка T сколь угодно полно сосредоточивается в полосе частот Δf равно

$$m_{\text{max}} = 2T\Delta f. \quad (2)$$

Здесь под Δf будем понимать эффективную полосу частот спектра мощности сигнала. Таким образом, если задана эффективная полоса пропускания канала F_k , то максимально возможное число ортогональных функций, которые могут быть расположены в этой полосе и удовлетворять условиям теоремы Агеева, определяется выражением (2) и зависит только от длительности сигналов T .

При этом очень важен вопрос о рациональном выборе вида ортогональных сигналов, однако в данной работе он не рассматривается.

Рассмотрим систему ортогональных сигналов с активной паузой. При этом используемые в кодовых комбинациях символы представляются одним из m возможных сигналов. Выражение для вероятности неправильного приема $P_{\text{ош}}$ отдельного ортогонального сигнала при условии, что все они равновероятны и имеют одинаковую энергию, имеет вид [3]

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{(m-1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n} \right) F_k T + \nu} \right) \right]^{(m-1)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\nu^2}{2} \right] d\nu. \quad (3)$$

Здесь

$$\Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n} \right) F_k T + \nu} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n} \right) F_k T + \nu} \right)} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx - \text{функция}$$

Крампа;

P_c — средняя мощность сигнала;

$P_n = \nu_0^2 F_k$ — мощность шумовой помехи;

$F_k = \frac{1}{|k(f)|_{\max}^2} \int_0^{\infty} |k(f)|^2 df$ — эффективная полоса пропускания канала;
 $|k(f)|_{\max}^2$ — максимальное значение квадрата модуля коэффициента передачи канала.

Из (3) видно, что при заданных значениях $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, F_k и $P_{\text{ош}}$ длительность сигналов T зависит только от основания кода m , т. е.

$$T = T(m). \quad (4)$$

Таким образом, заданную вероятность ошибочного приема можно реализовать при различных соотношениях между m и T . Чтобы получить максимальную скорость передачи информации, необходимо обеспечивать заданное $P_{\text{ош}}$ при минимально возможном значении T и максимальном m . Поскольку полоса канала задана, то минимально возможная длительность ортогональных сигналов, как это следует из формулы (2), является функцией m_{max}

$$T_{\text{min}} = T(m_{\text{max}}) = \frac{m_{\text{max}}}{2F_k}. \quad (5)$$

Подставляя теперь в (3) формулу (5), получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{(m_{\text{max}}-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \Phi \left(\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) m_{\text{max}} + v} \right) \right]^{(m_{\text{max}}-1)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{v^2}{2} \right] dv. \quad (6)$$

Выражение (6) связывает вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ с максимально возможным основанием кода m_{max} и через формулу (5) — с минимальной длительностью T_{min} при условии, что $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и F_k заданы, т. е.

$$m_{\text{max}} = m(P_{\text{ош}}). \quad (7)$$

Поскольку $m(P_{\text{ош}})$ не выражается через элементарные функции, то в общем случае при расчетах необходимо применять численные методы, однако при относительно больших значениях превышения сигнала над помехой (аргумент функции Крампа значительно больше единицы) можно воспользоваться следующим приближенным значением формулы (6) [5]:

$$P_{\text{ош}} \approx \frac{m_{\text{max}}-1}{2} \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) \frac{m_{\text{max}}}{2}} \right] \right\} \\ \text{при} \left[\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) \frac{m_{\text{max}}}{2}} \right] \gg 1. \quad (8)$$

На рис. 1 представлены графики зависимости $m_{\text{max}} = m(P_{\text{ош}})$ для некоторых значений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, полученные по формулам (3) и (8). Как видно из графиков, с ростом m_{max} вероятность ошибочного приема символов $P_{\text{ош}}$ падает и тем быстрее, чем больше отношение $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$.

Однако не следует забывать, что основание кода m_{\max} связано с длительностью элементарного сигнала T_{\min} . Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос об оптимальной скорости R_{opt} .

Известно, что для сигналов с числом дискретных значений m энтропия фактически переданных последовательностей определяется выражением [1]

$$H(x) - H(x/y) = \log_2 m + P_{\text{ош}} \log_2 P_{\text{ош}} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}}), \quad (9)$$

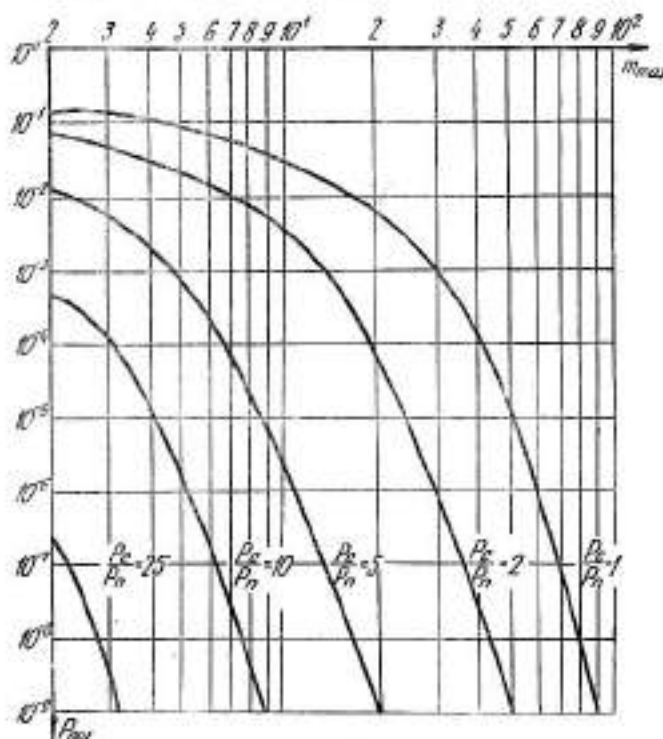


Рис. 1.

где $H(x)$ — энтропия источника сигнала;

$H(x/y)$ — условная энтропия помехи,

γ — скорость передачи информации

$$R = \frac{H(x) - H(x/y)}{T}, \quad (10)$$

где T — длительность ортогонального сигнала.

Используя формулы (5), (7), (9) и (10), запишем выражение для удельной оптимальной скорости передачи, т. е. максимальной удельной скорости передачи, при которой обеспечивается заданная вероятность ошибочного приема передаваемых элементов

$$R_{\text{opt}} = \frac{H(x) - H(x/y)}{T} = \frac{\log_2 [m_{\max}] + P_{\text{ош}} \log_2 \frac{P_{\text{ош}}}{[m_{\max} - 1]} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}})}{m_{\max}}. \quad (11)$$

Практически представляют интерес малые значения $P_{\text{ош}}$. Для этого случая выражение (11) можно записать в виде

$$R'_{\text{опт } F} \approx 2 \frac{\log_2 m_{\text{max}}}{m_{\text{max}}}. \quad (12)$$

Очевидно, $R'_{\text{опт } F} > R_{\text{опт } F}$, т. е. $R'_{\text{опт } F}$ представляет в общем случае максимально возможное значение для удельной оптимальной скорости передачи, поэтому в дальнейшем будем обозначать его $R_{\text{опт } F \text{ max}}$.

Анализ выражения (12) показал, что оптимальным основанием кода является $m_{\text{max}} = 2$, т. е. m_{max} , при котором скорость достигает максимального значения, нужно выбирать равным трем.

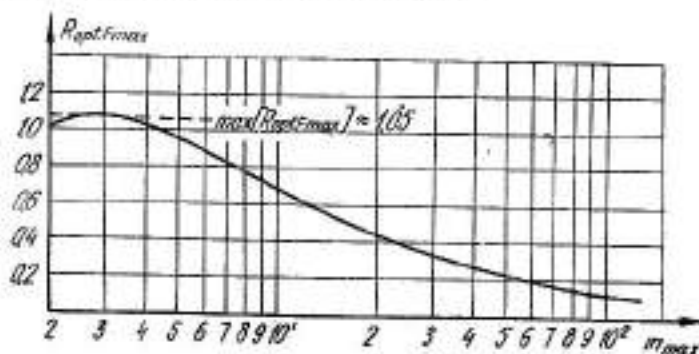


Рис. 2.

На рис. 2 представлен график зависимости $R_{\text{опт } F \text{ max}}$ как функция от m_{max} . Как видно из графика, при принятых ограничениях максимально достижимое значение скорости $\max[R_{\text{опт } F \text{ max}}] = 1,05 \cdot \left[\frac{\partial R}{\partial m} \cdot \frac{dm}{m} \right]$. Для получения $R_{\text{опт } F \text{ max}}$ близкого к максимальному, необходимо применять коды с малым основанием ($m_{\text{max}} < 8$). Однако это возможно, если отношение $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ достаточно велико, так что, несмотря на малое основание кода, получаемая вероятность ошибки не превосходит заданной, т. е. m_{max} удовлетворяет уравнению (8). Таким образом, чем меньше заданное значение вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ и отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, тем большее основание кода m_{max} необходимо применять и тем с меньшей удельной оптимальной скоростью может осуществляться передача информации.

На рис. 3 показана зависимость $R_{\text{опт } F}$ как функции от допустимой вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ (графики построены по формуле 11) для различных значений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$.

При больших значениях допустимой вероятности ошибки ($P_{\text{ош}} > 0,1$) уравнение (6) не выполняется даже при значениях $m_{\text{max}} = 2$, т. е. при заданном значении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и минимально возможном основании $m_{\text{max}} = 2$, которое определяет, согласно уравнению (2), минимальное значение T_{min}

$$\min[T_{\text{min}}] = \frac{1}{F_c}. \quad (13)$$

фактическая вероятность ошибки будет получаться меньше допустимой. Поэтому удельная скорость передачи $R_{opt F}$ в этой области значений P_{om} постоянна и будет определяться только отношением $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$. На рис. 3 эта часть графиков изображена пунктирными линиями.

В заключение сравним удельную оптимальную скорость передачи информации $R_{opt F}$ с удельной скоростью передачи, которую можно получить в бинарной ортогональной системе R_{2F} при различных значениях отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и при условии, что вероятность ошибки P_{om} в обоих слу-

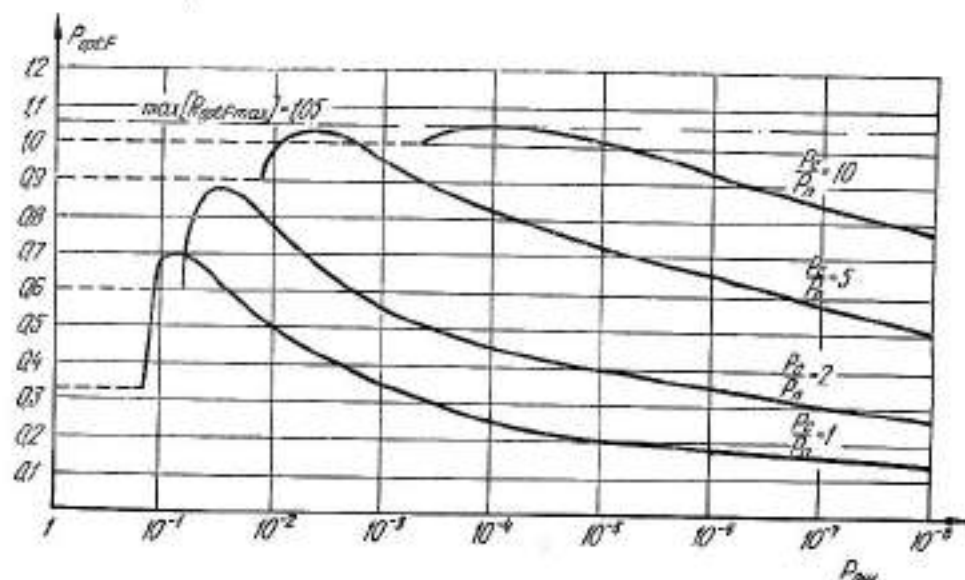


Рис. 3.

чаях поддерживается одинаковой. С этой целью на графике 4 приведены кривые $R_{2F} = R_{2F}\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и $R_{opt F} = R_{opt F}\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ для двух значений допустимой вероятности ошибки ($P_{om} = 10^{-1}$ и 10^{-7}), где

$$R_{2F} = \frac{1 + P_{om} \log_2 P_{om} + (1 - P_{om}) \log_2 (1 - P_{om})}{T_{min} F_n}. \quad (14)$$

Это выражение вытекает из формулы (11), а T_{min} , входящее в него, при заданном значении P_{om} для различных соотношений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ определяется из уравнения

$$P_{om} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) T_{min} F_n} \right) \right]. \quad (15)$$

При вычислении T_{min} необходимо иметь в виду, что теоретически минимально возможное значение T_{min} для случая $m = 2$ определяется по формуле (13) и может быть получено, как следует из (15), при достаточно большом значении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$. При дальнейшем увеличении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ T_{min} будет оста-

ваться постоянным и равным своему минимальному значению. Величина R_{2F} при этом достигает своего максимального значения, после чего, очевидно, также остается постоянной и равной

$$R_{2F \max} = 1 + P_{\text{ош}} \log_2 P_{\text{ош}} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}}). \quad (16)$$

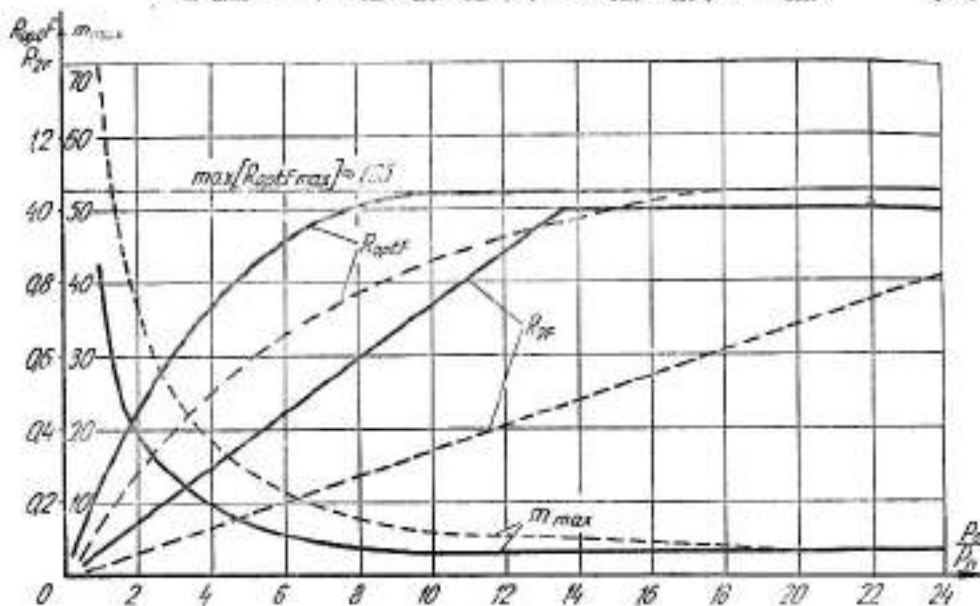


Рис. 4.

При малых значениях вероятности ошибки ($P_{\text{ош}} < 10^{-6}$) выражение (16) можно записать так:

$$R_{2F \max} \approx 1 \left[\frac{\partial \ln \text{ош}}{\partial \ln} \right] \quad (17)$$

$R_{\text{опт } P}$ вычислялось по формулам (11), (3) и (8).

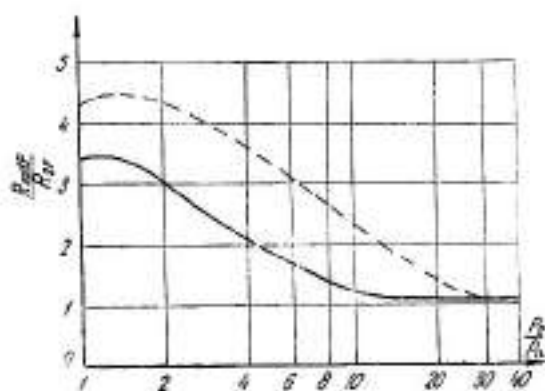


Рис. 5.

Кроме зависимостей, указанных выше, на рис. 4 показаны изменения основания кода m_{max} , соответствующие значениям оптимальной скорости передачи $R_{\text{опт } P}$.

Все зависимости на рис. 4, относящиеся к вероятности ошибки $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$, нанесены сплошными линиями, а к $P_{\text{ош}} = 10^{-7}$ — пунктирными.

Полученные графики показывают, что применение кодов с основанием $m = m_{\text{max}}$ для большого диапазона значений $\left(\frac{P_{\text{ош}}}{P_{\text{ош}}}\right)$ дает значительный

выигрыш в скорости передачи информации по сравнению со случаем, когда основание кода представлено двумя ортогональными сигналами.

На рис. 5 приведена зависимость величины этого выигрыша $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ как функция отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ для тех же значений вероятностей ошибки ($P_{ош} = 10^{-4}, 10^{-7}$). Максимальное значение величины $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ соответствует малым отношениям $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и может быть реализовано, как это следует из рис. 4, применением достаточно высоких оснований кода. Так, для $P_{ош} = 10^{-7}$ максимальное значение $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ равно 4,5 и соответствует отношению $\left(\frac{P_c}{P_n}\right) = 1,5$, при этом основание кода $m_{max} = 52$. С увеличением допустимой вероятности ошибки $P_{ош}$ и отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ величина выигрыша уменьшается, однако при этом резко уменьшается требуемое значение m_{max} , что значительно упрощает практическую реализацию подобных систем.

Так, увеличив отношение $\frac{P_c}{P_n} = 1,5$ в два раза, т. е. обеспечив $\frac{P_c}{P_n} = 3$, получим для

$P_{ош} = 10^{-7}$ значение $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}} = 3,9$, а требуемое основание кода $m_{max} = 24$.

Если удельные скорости передачи информации равны, т. е. $R_{2F} = R_{opt F}$, то, как следует из графиков рис. 4, применение оснований кода $m = m_{max}$ позволяет осуществлять передачу информации с заданной скоростью при значительно меньшем отношении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, чем в случае бинарных ортогональных систем.

На рис. 6 изображены изменения отношения $\frac{(P_c/P_n)m=2}{(P_c/P_n)m=m_{max}}$ в зависимости от $R_{opt F}$ для рассмотренных случаев, т. е. когда вероятности ошибки $P_{ош} = 10^{-4}$ и 10^{-7} .

В заключение отметим, что рассмотренные ортогональные системы с активной паузой и с основанием $m = m_{max}$ помимо положительных свойств имеют некоторые недостатки, наиболее существенный из которых заключается в том, что удельная оптимальная скорость передачи информации $R_{opt F}$ ни при каких условиях не может быть сделана больше некоторого максимального значения, равного

$$\max [R_{opt F \max}] = 1,05 \left[\frac{\text{дв. ед./сек}}{\text{сц}} \right].$$

В этом смысле лучшие результаты удается получить, применяя системы, использующие биортогональные сигналы.

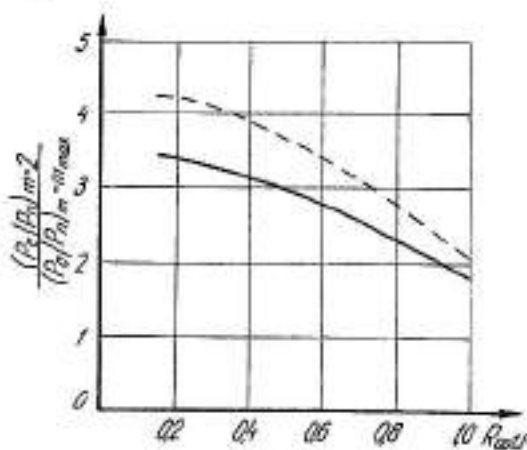
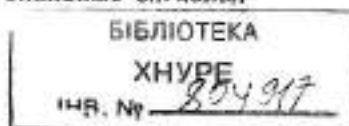


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Ф и н к. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.
 2. К. Е. Шеннон. Статистическая теория передачи электрических сигналов. Сб. «Теория передачи импульсных сигналов при наличии помех». Изд-во ИЛ, 1953.
 3. В. А. Котельников. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.
 4. Передача цифровой информации. Сборник статей под редакцией С. И. Самойленко. Изд-во ИЛ, 1963.
 5. Д. В. Агеев. Основы теории линейной селекции. Научно-технический сборник ЛЭИС, 1935, № 10.
 6. Б. А. Варшавер. К теории передачи дискретных сигналов при флуктуационных помехах. Труды МЭИ, вып. XXIX, Госэнергоиздат, 1957.
-

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ БИОРТОГОНАЛЬНЫМИ СИГНАЛАМИ С АКТИВНОЙ ПАУЗОЙ

И. Д. Задеренко

В данной работе рассматривается вопрос о максимально возможной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами с активной паузой по каналу с постоянными параметрами и ограниченной полосой F_k при условии, что вероятность ошибочного приема сигналов не превышает заданной. При этом предполагается, что передаваемые сигналы равновероятны, независимы и характеризуются одинаковой энергией.

Скорость, определенную таким образом, обозначим $R_{(1)opt}$ и назовем оптимальной скоростью передачи дискретной информации биортогональными сигналами, кроме этого, будем также пользоваться понятием удельной оптимальной скорости $R_{(1)opt F} = \frac{R_{(1)opt}}{F_k}$.

Постановка задачи совпадает с принятой в работе [1] при рассмотрении оптимальной скорости передачи дискретной информации ортогональными сигналами.

Следовательно, считаем, что в приемнике используется оптимальная решающая схема, основанная на критерии идеального наблюдателя и позволяющая работать с сигналами наименьшей длительности при заданной вероятности ошибки; канал связи с эффективной полосой F_k находится под воздействием флюктуационной помехи со спектральной плотностью χ_{θ}^2 ; отношение мощности сигнала к мощности помехи $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ задано.

Рассмотрим систему биортогональных сигналов с активной паузой с некоторым основанием $m_{(1)}$. Будем считать, что используемые в кодовых комбинациях при передаче символы представляются одним биортогональным сигналом из $m_{(1)}$ возможных.

Отметим, что эти системы не являются эквидистантными и в энергетическом отношении несколько проигрывают эквидистантным (частным случаем последних, как известно, являются ортогональные системы с активной паузой). Тем не менее комплексное рассмотрение биортогональных систем с активной паузой не только с энергетической точки зрения, но и с точки зрения оптимальной скорости передачи информации, как будет показано ниже, является весьма целесообразным.

Находя оптимальную скорость передачи $R_{(1)opt}$, которая, как следует из определения, является максимально возможной при условии, что вероятность ошибочного приема не превосходит заданной, будем учитывать взаимосвязь степени уплотнения информацией передаваемых сигналов с вероятностью ошибочного приема отдельных сигналов $\rho_{ош}$.

Для рассматриваемого случая вероятность неправильного приема сигнала идеальным приемником найдем из выражения [2]

$$\rho_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{\rho_c}{\rho_n} \right) F_k T + v} \right) \right]^{\frac{m_{(1)}}{2} - 1} \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right) dv, \quad (1)$$

где

$$\Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{\rho_c}{\rho_n} \right) F_k T + v} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2 \left(\frac{\rho_c}{\rho_n} \right) F_k T + v}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx -$$

— функция Крампа;

ρ_c — средняя мощность шумовой помехи;

$\rho_n = \nu_0^2 F_k$ — мощность шумовой помехи;

$F_k = \frac{1}{|k(f)|_{\text{max}}^2} \int_0^{\pi} |k(f)|^2 df$ — эффективная полоса пропускания канала;

$|k(f)|_{\text{max}}^2$ — максимальное значение квадрата модуля коэффициента передачи канала.

Выражение (1) показывает, что при заданных значениях $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n} \right)$, F_k и $\rho_{\text{ош}}$ длительность сигналов T зависит только от основания кода $m_{(1)}$, т. е. $T = T[m_{(1)}]$.

Следовательно, заданную вероятность ошибочного приема можно обеспечить при различных соотношениях между основанием кода $m_{(1)}$ и длительностью сигнала T . Так как нас интересует максимально возможная скорость передачи информации при условии, что вероятность ошибочного приема не превосходит заданной, то, очевидно, заданное значение $\rho_{\text{ош}}$ необходимо обеспечивать при минимально возможном T и максимальном $m_{(1)}$.

Для биортогональных систем максимальное число различных сигналов $m_{(1)\text{max}}$ в случае, когда заданы эффективная полоса канала F_k и длительность сигналов T , легко определить, учитывая, что для каждого из ортогональных сигналов m_{max} существует противоположный и, следовательно, $m_{(1)\text{max}} = 2m_{\text{max}}$.

В свою очередь m_{max} для заданных условий определяется теоремой Агева [3] $m_{\text{max}} = 2F_k T$, окончательно для $m_{(1)\text{max}}$ имеем

$$m_{(1)\text{max}} = 4F_k T. \quad (2)$$

Очевидно, что в биортогональных системах с активной паузой $m_{(1)\text{max}}$ всегда четное число, причем для каждого сигнала $Z_i(t)$ (где $i = 1, 2, \dots, \frac{m_{(1)\text{max}}}{2}$) существует противоположный $-Z_i(t)$, а остальные $(m_{(1)\text{max}} - 2^i)$ сигнала ортогональны $Z_i(t)$.

Подставляя в формулу (1) значение минимальной длительности сигнала T_{min} , определяемое из выражения (2) и соответствующее значению $m_{(1)\text{max}}$, получим

$$\rho_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi \left(\sqrt{\left(\frac{\rho_c}{\rho_n} \right) \frac{m_{(1)\text{max}}}{2} + v} \right) \right]^{\frac{m_{(1)\text{max}}}{2} - 1} \exp \left[-\frac{v^2}{2} \right] dv. \quad (3)$$

Выражение (3) связывает вероятность ошибки $p_{\text{ош}}$ с максимально возможным основанием кода $m_{(1) \text{ max}}$ при условии, что $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ и F_x заданы, т. е.

$$m_{(1) \text{ max}} = m(p_{\text{ош}}). \quad (4)$$

Эта зависимость через элементарные функции не выражается, поэтому при расчетах необходимо применять численные методы.

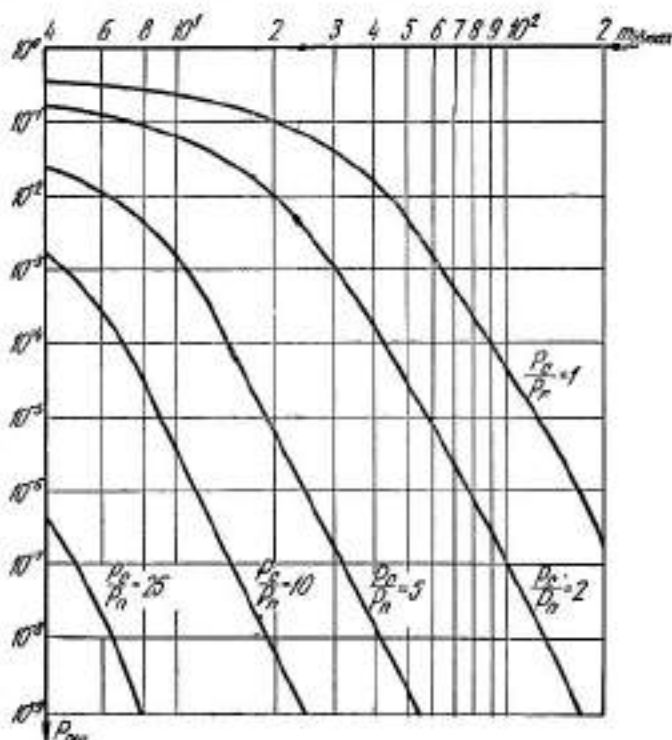


Рис. 1.

На рис. 1 представлены графики зависимости $m_{(1) \text{ max}} = m(p_{\text{ош}})$ для некоторых значений $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$, вычисленные по формуле (3).

Из графиков видно, что при применении более высоких оснований кодов $m_{(1) \text{ max}}$, вероятность ошибочного приема сигналов уменьшается и тем быстрее, чем больше отношение $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$.

Однако с ростом $m_{(1) \text{ max}}$ увеличивается, согласно выражению (2), минимальная длительность сигналов, равная

$$T_{\text{min}} = \frac{m_{(1) \text{ max}}}{4F_x} \quad (5)$$

Учитывая вышесказанное, найдем выражение для удельной оптимальной скорости передачи дискретной информации биортогональными

сигналами. Если сигналы имеют число дискретных значений m , выражение для скорости передачи при заданных ограничениях будет [2]

$$R = \frac{\log_2 m + p_{\text{ош}} \log_2 \frac{p_{\text{ош}}}{m-1} + (1-p_{\text{ош}}) \log_2 (1-p_{\text{ош}})}{T}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) вместо m максимальное значение основания кода $m_{(1) \text{ max}}$, а вместо T — минимально возможную длительность элементарных сигналов T_{min} , соответствующую значению $m_{(1) \text{ max}}$ и определяемую выражением (5), при которых вероятность ошибки $p_{\text{ош}}$ не превосходит заданной,

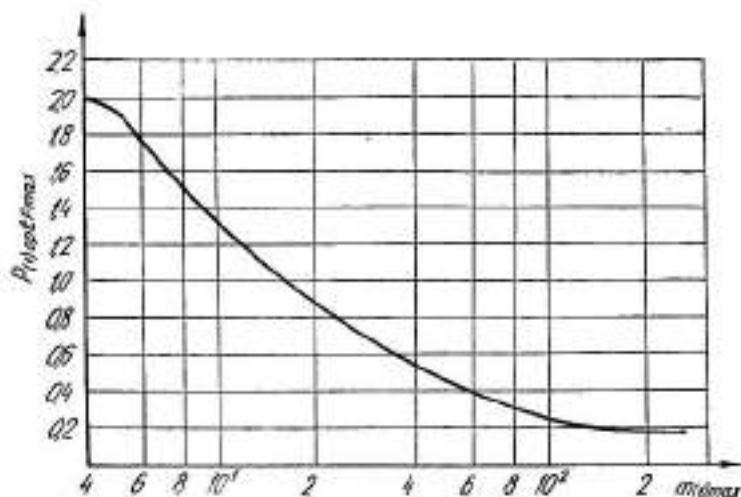


Рис. 2.

получаем окончательно выражение для удельной оптимальной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами $R_{(1) \text{ opt } F}$

$$R_{(1) \text{ opt } F} = 4 \frac{\log_2 m_{(1) \text{ max}} + p_{\text{ош}} \log_2 \frac{p_{\text{ош}}}{m_{(1) \text{ max}} - 1} + (1-p_{\text{ош}}) \log_2 (1-p_{\text{ош}})}{m_{(1) \text{ max}}}. \quad (7)$$

Пользуясь формулой (7), необходимо иметь в виду, что $m_{(1) \text{ max}}$ при заданном отношении $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ является функцией вероятности ошибки $p_{\text{ош}}$ и определяется выражением (3) или по графикам рис. 1.

В практически важных случаях малых значений допустимых вероятностей ошибок выражение (7) можно записать

$$R'_{(1) \text{ opt } F} \approx 4 \frac{\log_2 m_{(1) \text{ max}}}{m_{(1) \text{ max}}}. \quad (8)$$

Очевидно, следующее неравенство $R'_{(1) \text{ opt } F} > R_{(1) \text{ opt } F}$, т. е. $R'_{(1) \text{ opt } F}$ в общем случае представляет максимальное значение для удельной оптимальной скорости и будет обозначаться в дальнейшем $R_{(1) \text{ opt } F \text{ max}}$.

На рис. 2 изображен график зависимости $R_{(1) \text{ opt } F \text{ max}}$ как функция от $m_{(1) \text{ max}}$. Отметим, что график начинается с $m_{(1) \text{ max}} = 4$. Это объясняется тем, что для биортогональных систем минимальное значение $m_{(1) \text{ max}} = 4$.

Из графика видно, что $\max \{R_{(1) \text{ opt } F \text{ max}}\} = 2$, т. е. почти в два раза превышает максимально возможное значение удельной оптимальной скорости передачи информации для ортогональных систем.

При этом основание кода $m_{(1) \text{ max}} = 4$. Следовательно, для получения значений $R_{(1) \text{ opt } F \text{ max}}$, близких к максимуму, необходимо применять коды с малым основанием ($m_{(1) \text{ max}} = 4; 6$). Однако это возможно, если отношение $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ достаточно велико и поэтому, несмотря на малое основание

кода, получаемая в системе вероятность ошибки не превосходит заданной $p_{\text{ош}}$, т. е. значение $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ при выбранном $m_{(1) \text{ max}}$ должно удовлетворять уравнению (3).

На рис. 3 и 4 представлена зависимость удельной оптимальной скорости передачи информации биортогональными сигналами с активной паузой $R_{(1) \text{ opt } F}$ как функция отношения $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$.

При этом расчеты проводились по формулам (7) и (3). Из выражения (3) для заданной величины $p_{\text{ош}}$ и соответствующего значения $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ определялось значение требуемого основания кода $m_{(1) \text{ max}}$, а затем по формуле (7) вычислялась удельная оптимальная скорость $R_{(1) \text{ opt } F}$. Рис. 3 соответствует случаю, когда допустимая вероятность ошибки $p_{\text{ош}} = 10^{-4}$, а рис. 4 $p_{\text{ош}} = 10^{-7}$.

Для сравнения на этих же рисунках показаны изменения удельной скорости передачи дискретной информации в зависимости от отношения $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ для ортогональных систем с активной паузой и с основанием $m = m_{\text{max}} - R_{\text{opt } F}$; биарных ортогональных систем $-R_{2F}$, а также для систем с противоположными сигналами $-R_{\text{пр. } F}$, где $R_{\text{пр. } F}$, как следует из (6), определяется выражением

$$R_{\text{пр. } F} = \frac{1 + p_{\text{ош}} \log_2 p_{\text{ош}} + (1 - p_{\text{ош}}) \log_2 (1 - p_{\text{ош}})}{F_k T_{\text{min}}}, \quad (9)$$

а T_{min} при заданном значении $p_{\text{ош}}$ и различных отношениях $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ находим из формулы для вероятности ошибки противоположных сигналов [2]

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{p_c}{p_n}\right) F_k T_{\text{min}}} \right) \right]. \quad (10)$$

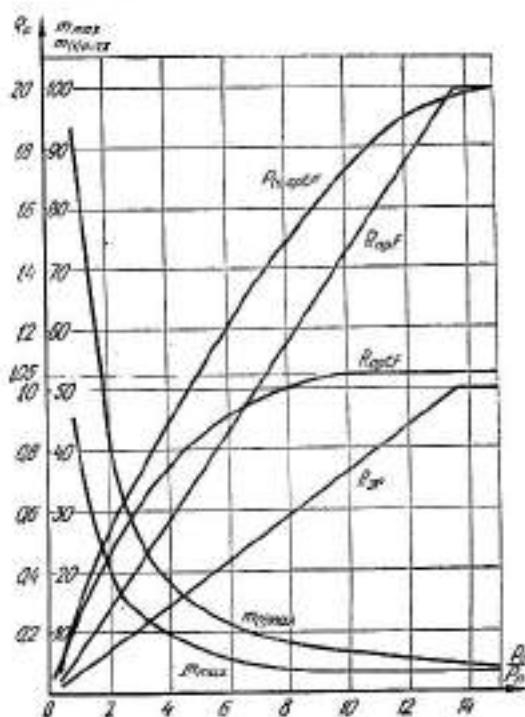


Рис. 3.

Определяя T_{\min} , необходимо помнить, что для данного случая теоретически минимально возможное значение T_{\min} , как следует из (5), равно

$$\min [T_{\min}] = \frac{1}{2F_k}. \quad (11)$$

Из (10) следует, что это значение может быть получено, если достаточно большое отношение $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n}\right)$. При дальнейшем увеличении $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n}\right)$ T_{\min}

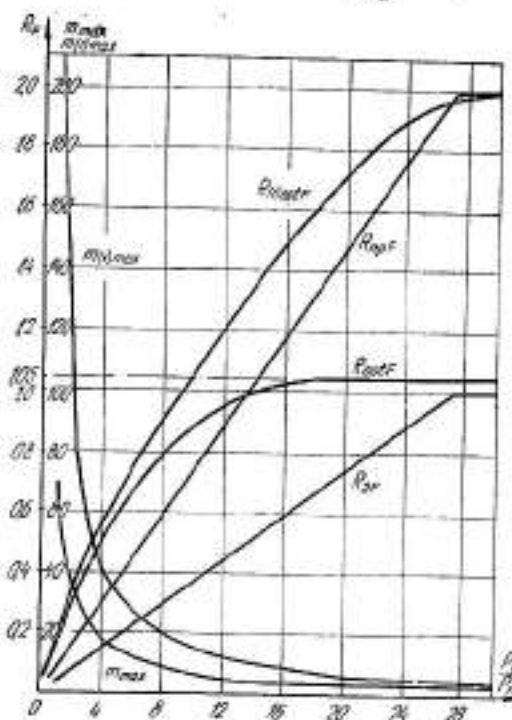


Рис. 4.

будет оставаться постоянным и равным своему минимальному значению $\frac{1}{2F_k} \cdot R_{\text{пр. } F}$ при этом достигает своего максимального значения

$$R_{\text{пр. } F, \text{ max}} = 2 [1 + \rho_{\text{ош}} \log_2 \rho_{\text{ош}} + (1 - \rho_{\text{ош}}) \log_2 (1 - \rho_{\text{ош}})]. \quad (12)$$

Для малых значений допустимой вероятности ошибки $\rho_{\text{ош}}$ выражение (12) можно записать так:

$$R_{\text{пр. } F, \text{ max}} \approx 2 \left[\frac{\text{дв. ед./сек}}{\text{Гц}} \right] \quad (13)$$

Таким образом, при больших значениях отношения $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n}\right)$ и малых $\rho_{\text{ош}}$ ($\rho_{\text{ош}} < 10^{-2}$) как биортогональные, так и противоположные сигналы имеют одно и то же предельное значение удельной скорости передачи информации, равное $2 \frac{\text{дв. ед./сек}}{\text{Гц}}$.

Кроме перечисленных выше зависимостей, на рис. 3 и рис. 4 изображены изменения основ-

ания кода m_{max} , соответствующие значениям удельной оптимальной скорости передачи ортогональными сигналами $R_{\text{opt } F}$ и $m_{(1)\text{max}}$, соответствующие $R_{(1)\text{opt } F}$.

Зависимости $R_{\text{opt } F}$, R_{2F} и m_{max} взяты из работы [1].

Анализ полученных выражений для удельных скоростей передачи и графиков, представленных на рис. 3 и 4, показывает, что в области малых значений отношений $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n}\right)$ при заданной допустимой вероятности ошибки $\rho_{\text{ош}}$ наибольшая удельная скорость передачи информации R_F может быть получена при использовании ортогональных сигналов с основанием $m = m_{\text{max}}$.

Однако получаемая при этом величина удельной скорости передачи информации невелика и может быть реализована при использовании очень высоких оснований m_{max} .

С ростом величины отношения $\left(\frac{\rho_c}{\rho_n}\right)$, в частности для рассмотренных двух

значений допустимой вероятности ошибки ($p_{\text{ош}} = 10^{-4}$ и 10^{-5}), уже при $\left(\frac{p_c}{p_n} \geq 1\right)$ лучшими, с точки зрения скорости передачи информации, являются системы, использующие биортогональные сигналы с активной паузой и основанием $m = m_{(1) \text{ max}}$. Чем больше отношение $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$, тем меньше требуется основание $m_{(1) \text{ max}}$ для обеспечения заданной вероятности ошибки и тем с большей скоростью может передаваться информация. Кроме этого, из графиков видно, что применение биортогональных сигналов с основанием $m = m_{(1) \text{ max}}$ для большого диапазона значений $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ увеличивает скорость передачи информации по сравнению с указанными выше системами.

Следует, однако, отметить, что в области небольших значений $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ ($\frac{p_c}{p_n} = 1 \div 3$) применение биортогональных сигналов по сравнению с ортогональными дает небольшой выигрыш в скорости передачи (порядка 5-20%), однако для реализации

этого преимущества требуются весьма высокие значения основания $m_{(1) \text{ max}}$. Поэтому более целесообразно, видимо, использовать в этой области значений $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$ ортогональные сигналы, которые мало уступают биортогональным по удельной скорости, но требуют значительно меньшего основания m_{max} .

На рис. 5 представлены изменения величины получаемых выигрышей $\frac{R_{(1) \text{ опт } F}}{R_{2F}}$, $\frac{R_{(1) \text{ опт } F}}{R_{\text{пр } F}}$ и $\frac{R_{(1) \text{ опт } F}}{R_{\text{орт } F}}$ в зависимости от величины отношения $\left(\frac{p_c}{p_n}\right)$.

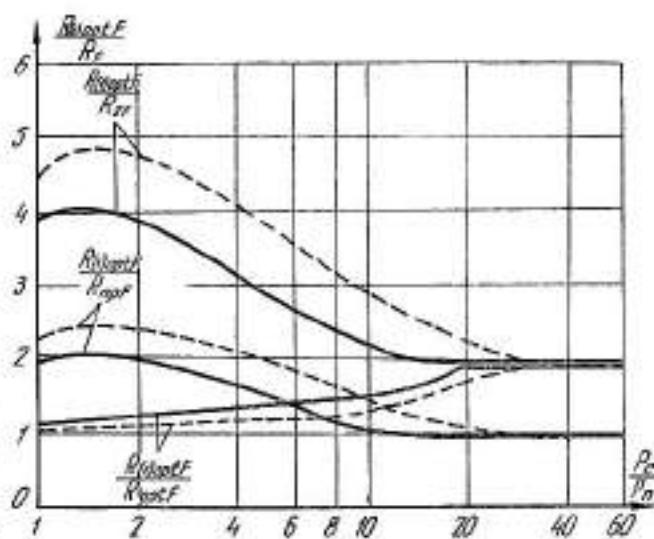


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Задеренко. Оптимальная скорость передачи дискретной информации ортогональными сигналами по каналу с ограниченной полосой (печатается в данном сборнике).
2. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.
3. Д. В. Агеев. Основы теории линейной селекции. Научно-технический сборник ЛЭИС, 1935, № 10.

ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПОТОКА ОШИБОК

Н. П. Суворов

Рассмотрим стационарный случайный импульсный поток с детерминированным тактовым интервалом, значение которого в фиксированный момент времени может быть либо 0, либо 1. Обозначим вероятность появления 0 и 1 соответственно $p(0)$ и $p(1)$. Будем считать данный поток коррелированным, причем вид функции корреляции предполагается известным.

Во многих практических случаях возникает задача экстраполяции указанного импульсного потока, заключающаяся в том, что, зная значения потока $X[x(n), x(n-1), \dots, x(n-m)]$ в предыдущие моменты времени $t(n), t(n-1), \dots, t(n-m)$, требуется предсказать значение импульсного потока в следующий момент времени $t(n+\alpha)$, α — целое число. Как известно [1], в качестве меры отклонения предсказанного значения $y = y(n+\alpha)$ от действительного значения потока $y^* = x(n+\alpha)$ принимается величина

$$\epsilon = y - y^*. \quad (1)$$

Чем меньше ошибка ϵ , тем эффективнее будет осуществляться предсказание. Среднеквадратичная ошибка предсказания имеет вид

$$\bar{\epsilon}^2 = \overline{(y - y^*)^2}, \quad (2)$$

где « $\bar{}$ » знак усреднения.

Если осуществляется линейная экстраполяция, то предсказанное значение выразится в виде

$$y = \sum_{k=0}^m C(k)x(n-k). \quad (3)$$

Такой закон экстраполяции осуществляется импульсным фильтром, импульсная характеристика которого $C(k)$ равна

$$C(k) = \begin{cases} a_k & \text{при } 0 \leq k < m, \\ 0 & \text{при } k > m; \end{cases} \quad (4)$$

a_k — постоянные числа. С учетом (3) и (4) (1) и (2) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{k=0}^m a_k x(n-k) - y^*, \\ \bar{\epsilon}^2 &= \overline{\left[\sum_{k=0}^m a_k x(n-k) - y^* \right]^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

После преобразований в (5) получим

$$\bar{z}^2 = R_{y^*y^*}(0) - 2 \sum_{k=0}^m a_k R_{xy^*}(k) + \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^m a_k a_r R_{xx}(k-r), \quad (6)$$

где $R_{y^*y^*}(0)$, $R_{xy^*}(k)$, $R_{xx}(k-r)$ — функции корреляции

$$R_{xx}(k-r) = \overline{x(n-k)x(n-r)} \text{ и т. д.}$$

Определим условия, при которых (6) достигает минимума, для чего необходимо продифференцировать это выражение по a_k и приравнять производную нулю

$$\frac{\partial \bar{z}^2}{\partial a_k} = -2R_{xy^*}(k) + 2 \sum_{r=0}^m a_r R_{xx}(k-r) = 0,$$

следовательно, при оптимальном предсказании значения коэффициентов a_k определяется из условия

$$R_{xy^*}(k) = \sum_{r=0}^m a_r R_{xx}(k-r), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (7)$$

Если осуществляется предсказание на один шаг вперед, то $y^* = x(n+1)$ и система (7) имеет вид

$$R_{xx}(k+1) = \sum_{r=0}^m a_r R_{xx}(k-r), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Аналогичные выражения получаются при предсказании на α шагов вперед. Минимальное значение дисперсии ошибки предсказания получим, если в выражение (6) в качестве коэффициентов a_k подставим их значения, найденные из решения системы (7),

$$\min \bar{z}^2 = R_{y^*y^*}(0) - \sum_{k=0}^m a_k R_{xy^*}(k). \quad (8)$$

Для эргодического импульсного потока функция корреляции равна

$$R_{xx}(k-r) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 x_i(n-k)x_j(n-r) p[x_i(n-k), x_j(n-r)], \quad (9)$$

где $x_0(n-k) = 0$, $x_1(n-k) = 1$, следовательно, (9) имеет вид

$$R_{xx}(k-r) = p[x_1(n-k), x_1(n-r)] = p(x_1) b(k-r), \quad (10)$$

где $b(k-r) = p[x_1(n-k)/x_1(n-r)]$ — коэффициент корреляции. Из (10) видно, что функция корреляции данного потока определяется безусловной вероятностью появления 1, т. е. $p(x_1) = p(1)$ и условной вероятностью появления 1 через $(k-r)$ тактов.

Таким образом, предсказываемое значение потока X в момент времени $t(n+\alpha)$ основывается на определении коэффициентов a_k , которые находятся из решения системы уравнений (7). Но в общем случае в результате решения этой системы значения a_k , а, следовательно, и предсказанные значения y , будут лежать в интервале $[0-1]$, и то время как истинное значение y^* может быть только либо 0, либо 1. Для обоснованного принятия решения относительно того, считать ли y за 0 или за 1, можно использовать решающую схему, минимизирующую полную

вероятность ошибки в определении предсказанного значения. Из (1) видно, что предсказанное значение y может представлять собой сумму сигнала, действительное значение которого $x_1 = 1$ плюс сигнал ошибки, т. е.

$$y = x_1 + \varepsilon \quad (11)$$

либо сумму сигнала, действительное значение которого $x_0 = 0$ плюс сигнал ошибки, т. е.

$$y = x_0 + \varepsilon, \quad (12)$$

Закон распределения ошибок ε считаем известным. В дальнейшем для определенности будем полагать его нормальным. Задача решающей схемы состоит в том, чтобы на основании предсказанного значения вынести одно из двух (11) или (12) решений, т. е. либо предсказанное значение равно 0, если $y < u_0$, либо 1, если $y > u_0$; u_0 — некоторый порог. Решение может быть принято при двух взаимно исключающих условиях:

условие x_1 — действительное значение потока равно 1,

условие x_0 — действительное значение потока равно 0, соответственно

обозначим:

решение x_1^* — предсказанное значение равно 1,

решение x_0^* — предсказанное значение равно 0.

Качественными показателями решающей схемы являются [2]:

$P_{\text{пр. } 0} = P(x_1^*/x_1)$ — условная вероятность правильного обнаружения,

$P_{\text{проп.}} = P(x_0^*/x_1)$ — пропуск цели,

$P_{\text{л. т.}} = P(x_1^*/x_0)$ — ложная тревога,

$P_{\text{пр. } 1} = P(x_0^*/x_0)$ — условная вероятность правильного необнаружения.

Оптимальная решающая схема должна обеспечить минимум полной вероятности ошибки, определяемой выражением

$$P_{\text{ош.}} = p(x_0)P_{\text{л. т.}} + p(x_1)P_{\text{проп.}} \quad (13)$$

Обозначим плотность вероятности предсказанной величины y при условиях, когда действительное значение сигнала $x_0 = 0$ и когда $x_1 = 1$ соответственно

$$\begin{aligned} \omega(y/x_0) &= \omega_1(y) \\ \omega(y/x_1) &= \omega_2(y). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая ранее принятое предположение о нормальном законе распределения ошибок, предсказания выражения (14) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1(y) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\ \omega_2(y) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

α — нормировочный коэффициент;

$\sigma^2 = \bar{\varepsilon}^2$ — среднеквадратичная ошибка предсказания.

Выражение (13) может быть представлено в виде

$$P_{\text{ош.}} = p(x_0) \int_{u_0}^{\infty} \omega_1'(y) dy + p(x_1) \int_0^{u_0} \omega_2'(y) dy. \quad (16)$$

Для минимизации полной вероятности ошибки достаточно продифференцировать последнее выражение по u_0 , с учетом выражений (15), и приравнять производную нулю

$$\frac{d\rho_{\text{ош.}}}{du_0} = -p(x_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u_0^2}{2\sigma^2}} + p(x_1) e^{-\frac{(u_0-1)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 0.$$

Оптимальное значение порога будет иметь значение

$$u_0 = \sigma^2 \ln \frac{p(x_0)}{p(x_1)} + \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Если $p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$, то $u_0 = \frac{1}{2}$. На практике часто бывают случаи, когда $p(x_0) \neq p(x_1)$. Тогда значение порога зависит от априорных вероятностей появления 0 и 1 в импульсном потоке. Кроме того, как видно из (17), значение порога определяется среднеквадратичной ошибкой предсказания. Поскольку предсказание на различное число шагов вперед σ^2 изменяется в соответствии с (8), то, следовательно, и порог в оптимальной решающей схеме должен меняться при предсказании на различное число шагов вперед с учетом выражения дисперсии ошибок предсказания. Окончательное выражение вероятности ошибки предсказания, с учетом выражения (17), можно записать в виде

$$\rho_{\text{ош.}} = \alpha p(x_0) \left(F\left(\frac{1}{\sigma}\right) - F\left[\sigma \ln \frac{p(x_0)}{p(x_1)} + \frac{1}{2\sigma}\right] \right) + \alpha p(x_1) \left(F\left[\sigma \ln \frac{p(x_0)}{p(x_1)} - \frac{1}{2\sigma} - F\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \right] \right), \quad (18)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа.}$$

Приведенный выше метод предсказания значений импульсного потока может быть применен для повышения достоверности двоичной информации, передаваемой по каналам с шумами. Если поток ошибок в канале известен, т. е. известна функция корреляции потока, вероятность появления ошибочных позиций $p(1)$ и поток ошибок является стационарным, то, зная предысторию потока, можно предсказывать, будет или не будет ошибка в следующие моменты времени и таким образом проводить коррекцию ошибок в передаваемой информации. Каков выигрыш в скорости и достоверности информации можно при этом получить, зависит в каждом конкретном случае от вида функции корреляции потока ошибок. Однако принципиальную возможность осуществления подобного метода повышения достоверности двоичной информации и некоторые количественные характеристики можно получить, предположив, что поток ошибок может быть описан простой цепью Маркова. Известно [3], что пропускная способность двоичного канала с независимыми ошибками имеет вид

$$C = 1 - H(p) \quad (19)$$

$H(p)$ — энтропия потока ошибок,
 p — вероятность ошибки.

Энтропию потока ошибок, описываемых простой марковской цепью, можно определить [4] в виде

$$H = - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_i p_{ik} \log p_{ik}, \quad (20)$$

где p_i — вероятность i -го состояния цепи,

p_{ik} — вероятность перехода цепи из i -го состояния в k -е.

Двоичный канал может быть задан в этом случае матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{vmatrix} p^{(1/1)} & p^{(0/1)} \\ p^{(1/0)} & p^{(0/0)} \end{vmatrix} \quad (21)$$

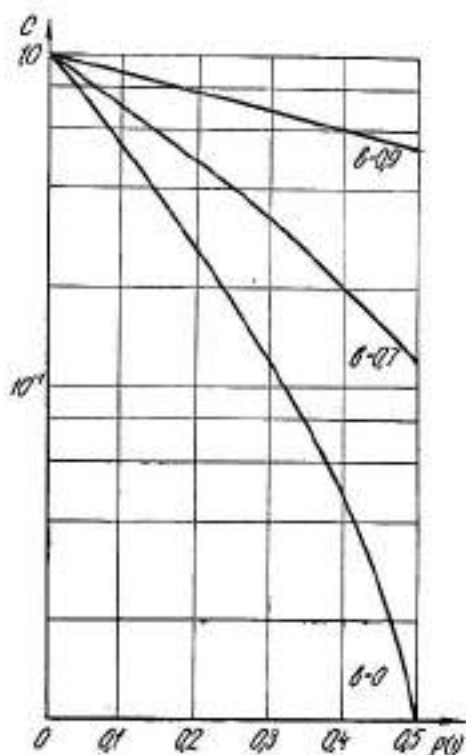


Рис. 1.

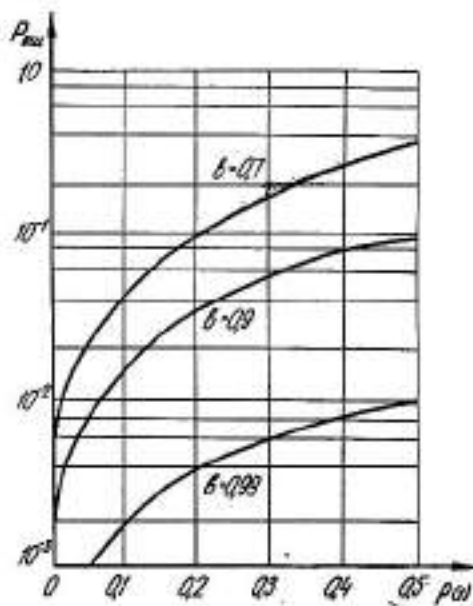


Рис. 2.

1 — ошибочный прием,
0 — правильный прием.

С учетом (21), (22) выражение (20) примет вид

$$C = 1 + p(1) \{ p^{(1/1)} \log p^{(1/1)} + [1 - p^{(1/1)}] \log [1 - p^{(1/1)}] \} + \\ + p(0) \{ p^{(1/0)} \log p^{(1/0)} + [1 - p^{(1/0)}] \log [1 - p^{(1/0)}] \}. \quad (22)$$

Если ошибки возникают независимо, то $p^{(1/1)} = p^{(1/0)} = p(1)$, и тогда выражение (22) переходит в (19).

Для простой марковской цепи с матрицей переходных вероятностей (21) при некоторых дополнительных условиях, называемых условиями эргодичности, которые выполняются для всех каналов, представляющих практический интерес, существуют безусловные вероятности; они выражаются [5—6] в виде

$$p(1) = \frac{p^{(1/0)}}{1 - p^{(1/1)} + p^{(1/0)}}, \quad p(0) = \frac{1 - p^{(1/1)}}{1 - p^{(1/1)} + p^{(1/0)}} \quad (23)$$

из (23) можно определить

$$p^{(1/0)} = \frac{p(1)}{p(0)} (1 - b),$$

где $b = p^{(1/1)}$ — коэффициент корреляции потока ошибок.
Пропускная способность запишется следующим образом:

$$C = 1 + p(1) \{b \log b + (1 - b) \log (1 - b)\} + \\ p(0) \left\{ \frac{p(1)}{p(0)} (1 - b) \log \frac{p(1)}{p(0)} (1 - b) + \left[1 - \frac{p(1)}{p(0)} (1 - b) \right] \log \left[1 - \frac{p(1)}{p(0)} (1 - b) \right] \right\} \quad (24)$$

Расчеты, проведенные в соответствии с (24) для различных значений $p(1)$ и b , показаны на рис. 1, откуда видно, что учет зависимости ошибок в канале может привести к значительному увеличению скорости передачи информации. В силу этого необходимо осуществлять предсказание потока зависимых ошибок. Вероятность ошибки предсказания с учетом (13) может быть записана в виде

$$p_{\text{ош.}} = p(0) p^{(1/0)} + p(1) p^{(0/1)} = 2p(1)(1 - b). \quad (25)$$

Значения $p_{\text{ош.}}$ при различных значениях $p(1)$ и b приведены на рис. 2. При больших значениях коэффициента корреляции ошибок, $p_{\text{ош.}}$ может быть довольно малой, и, таким образом, ясно, что предсказание ошибок позволит повысить достоверность передаваемой информации. Отметим, что пропускная способность простого марковского канала может быть получена с учетом выражения (19), где вероятность ошибки определяется вероятностью ошибки предсказания (25). При более сложных связях между ошибками, пропускная способность каналов с зависимыми ошибками тоже может быть оценена по формуле (19), но с учетом вероятности ошибок предсказания, определяемой выражением (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом. Теория экстраполяции и фильтрации случайных процессов. Украинский математический журнал, 1954, том 6, № 1.
2. И. Н. Амиантов. Применение теории решений к задаче обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1956.
3. К. Шеннон. Математическая теория связи, сб. «Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике», Изд-во ИЛ., 1963.
4. А. Я. Хинчин. Понятие энтропии в теории вероятности. Успехи математических наук, 1953, 8, вып. 3.
5. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», М., 1963.
6. В. И. Романовский. Дискретные цепи Маркова. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИКЕ ОШИБОК В КАНАЛАХ СВЯЗИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

А. С. Масичук, Н. П. Суворов

Известно [1—3], что при передаче двоичной информации по каналам связи случайные ошибки, возникающие при этом в результате воздействия помех, группируются в пакеты различной длины. От того, насколько объективно учитывается этот факт, зависит эффект решения целого ряда практически важных задач (выбор алгоритма кодирования, моделирование каналов и систем связи и т. п.).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы по возможности полнее отразить математически причинно-следственную взаимосвязь процесса образования пакетов ошибок. Вывод формул для расчета вероятности появления определенного числа пакетов ошибок на заданном интервале времени основан на следующих предположениях:

а) каждый пакет ошибок вызывается своей, не зависящей от других, физической причиной;

б) моменты возникновения причин пакетов ошибок никак не связаны с их длительностью, а совпадение начал двух и более причин практически невозможно;

в) закон распределения длин пакетов — показательный, т. е.

$$F(t) = 1 - e^{-t/\tau},$$

где $\tau_{cp} = \frac{1}{\lambda}$ — средняя длина пакета;

г) возможно перекрытие пачек ошибок, состоящее в том, что в течение интервала времени t может одновременно действовать несколько причин ошибок.

На основании сделанных предположений можно сказать, что моменты начал пачек ошибок образуют простейший поток с параметром $\lambda = \text{const}$. (λ — среднее число моментов возникновения пакетов ошибок). В этом случае вероятность того, что в течение интервала времени t появятся k начал пачек ошибок, будет равна

$$v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Если поток начал пачек нестационарен, то выражение (1) имеет вид

$$v_k(\tau, \tau + \xi) = \frac{[\Lambda(\tau, \tau + \xi)]^k}{k!} e^{-\Lambda(\tau, \tau + \xi)}, \quad (2)$$

где $\Lambda(\tau, \tau + \xi) = \int_{\tau}^{\tau + \xi} \lambda(t) dt$ — среднее число моментов возникновения пакетов ошибок на интервале $[\tau, \tau + \xi]$;
 $\lambda(t)$ — мгновенное значение параметра;
 τ — начало рассматриваемого промежутка времени.

Рассмотрим теперь возможные варианты воздействия помех на канал связи. В любой момент времени t канал связи может оказаться в одном из следующих состояний:

- канал свободен от помех;
- в канале действует одна причина, вызывающая пачку ошибок;
- в канале действуют две причины, вызывающие каждая пачку ошибок,
- и так далее;
- в канале действуют n причин.

Задача состоит в определении вероятного состояния канала связи $p_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) для любого момента времени t .

Если известно, что в начальный момент времени t_0 в канале действует k причин ошибок (при этом $p_k(t_0) = 1$, а $p_{j \neq k}(t_0) = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$), то за любой произвольный промежуток времени $[t_0, t_0 + t_1]$ априорно можно ожидать какого-то нового распределения вероятностей $p_k(t_1)$, а в момент времени t_2 — распределение вероятностей $p_k(t_2)$ и так далее с вероятностями перехода в эти состояния $p_{k, i}(t_0, t_0 + t_1)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Определение искомых вероятностей возможных состояний канала связи через переходные вероятности $p_{k, i}(t_0, t_0 + t_1) = p_{k, i}(t)$ облегчается применением математического аппарата марковских процессов, для которых неизвестные вероятности состояний $p_k(t)$ определяются из обыкновенных интегродифференциальных уравнений.

Искомые вероятности $p_k(t)$ находят из системы $n + 1$ дифференциальных уравнений, известных в теории массового обслуживания как уравнения Эрланга:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \nu p_1(t), \\
 \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \nu) p_1(t) + 2\nu p_2(t), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dp_k(t)}{dt} &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu) p_k(t) + (k+1)\nu p_{k+1}(t), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - n\nu p_n(t).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Интегрируя эти уравнения при известных начальных условиях для $t_0 = 0$, получаем зависимость искомых вероятностей $p_k(t)$ от параметров λ и ν . Для этих вероятностей при достаточно большом значении t существуют предельные стационарные значения вероятностей p_k , равные

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t).$$

Так как при этом все $\frac{dp_k}{dt} = 0$, то система дифференциальных уравнений (3) превращается в систему обычных алгебраических урав-

нений, из которых для любого значения $k = 0, 1, 2, \dots, n$ получаем

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\nu^k k!} p_0 = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (4)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ — приведенная плотность потока начал пакетов ошибок.

Из условия нормировки

$$\sum_{k=0}^n p_k = p_0 \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} = 1 \quad (5)$$

определяем

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}. \quad (6)$$

Выражение (4) окончательно примет вид

$$p_k = \frac{\rho^k}{k! \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (7)$$

Зная параметр потока начал пакетов ошибок λ и математическое ожидание длины пакета $\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{\nu}$ (по материалам статистических испытаний канала связи), можно определить вероятность p_k того, что в произвольно взятый момент времени в канале связи одновременно будут действовать k причин пакетов ошибок. Тем самым учитывается эффект перекрытия пакетов ошибок во времени. При решении задачи большое значение имела предпосылка о показательном законе распределения длин пакетов ошибок, так как только в этом случае процесс перехода канала связи из одного состояния в другое является марковским. Однако, основываясь на результатах работы [5], можно показать, что конечные формулы (6), (7) будут справедливы при любом законе распределения длин пакетов.

При практических вычислениях надо знать n — число причин ошибок, одновременно действующих в канале связи, что не всегда может быть известно. Поэтому попытаемся формулы (6), (7) несколько преобразовать. При $n \rightarrow \infty$ выражение (7) имеет вид

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}.$$

Но при $n \rightarrow \infty$ вывод формул (6), (7) несправедлив, так как марковский процесс определен для случая конечного состояния систем. Для проведения дальнейшего анализа при $n \rightarrow \infty$ можно воспользоваться методом производящих функций [4].

Составление дифференциальных уравнений при $n \rightarrow \infty$ в принципе ничем не отличается от указанного ранее при ограниченном n , только канал уже может переходить из состояния n в $(n+1)$ и так далее.

При бесконечном множестве различных состояний канала связи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0(t)}{dt} &= -\lambda\rho_0(t) + \nu\rho_1(t), \\ \frac{d\rho_k(t)}{dt} &= \lambda\rho_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)\rho_k(t) + \nu(k+1)\rho_{k+1}(t) \quad k > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение этой системы методами интегрирования — довольно сложная задача. Однако для всех $k > 0$ система (8) состоит из уравнений одинакового типа, что позволяет применить для ее решения метод производящих функций.

Пусть

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(t) x^k \quad (9)$$

ряд, абсолютно сходящийся при любых t и $|x| \leq 1$.

Если определить вид производящей функции (9), то, разложив ее в ряд по степеням k можно будет определять и вероятности $\rho_k(t)$, являющиеся коэффициентами разложения.

Дифференцирование равенства (9) по t дает

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d\rho_k(t)}{dt} \cdot x^k. \quad (10)$$

Подставив значения из системы (8) в (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} &= -\lambda\rho_0(t) + \nu\rho_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda\rho_{k-1}(t) - \\ &\quad - (\lambda + k\nu)\rho_k(t) + \nu(k+1)\rho_{k+1}(t)] x^k - \\ &= \lambda(x-1) \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(t) x^k - \nu(x-1) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k(t) x^{k-1} \\ &= \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} - \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k(t) x^{k-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ряд (11) при $x=1$ равен математическому ожиданию числа действующих в канале причин ошибок. Эта величина конечна, и, следовательно, дифференцирование ряда правомерно, а поэтому

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = \lambda(x-1)\Phi(t, x) - \nu(x-1) \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x}. \quad (12)$$

Будем искать производящую функцию в виде

$$\Phi(t, x) = e^{\nu(x-1)t(1-e^{-\lambda t})} F(t, x),$$

где $F(t, x)$ — новая неизвестная функция.

Обозначим $e^{\nu(x-1)t(1-e^{-\lambda t})} = G(t, x)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= G \frac{\partial F}{\partial t} + FG\lambda(x-1)e^{-\lambda t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= G \frac{\partial F}{\partial x} + FG\nu(1-e^{-\lambda t}). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим (13) в (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (x-1) \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda(x-1)\Phi &= G \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + F\lambda(x-1)e^{-\nu t} + \right. \\ &+ (x-1) \nu \frac{\partial F}{\partial x} + (x-1)\lambda(1-e^{-\nu t})F - \lambda(x-1)F \left. \right\} = \\ &= G \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + (x-1) \nu \frac{\partial F}{\partial x} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (12) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (x-1) \nu \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Введем вспомогательную функцию

$$L(t, x) = (x-1)e^{-\nu t}.$$

Докажем, что $L(t, x)$ и $F(t, x)$ связаны функциональной зависимостью. С этой целью составим функциональный определитель Остроградского—Якоби

$$\frac{D(F, L)}{D(t, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial t} & \frac{\partial L}{\partial x} \end{vmatrix} = e^{-\nu t} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (x-1) \nu \frac{\partial F}{\partial x} \right].$$

Согласно (14)

$$\frac{D(F, L)}{D(t, x)} = 0,$$

это означает, что

$$F = R(L) = R[(x-1)e^{-\nu t}],$$

где R — произвольная дифференцируемая функция.

Итак,

$$\Phi(t, x) = e^{-(x-1)\lambda(1-e^{-\nu t})} R[(x-1)e^{-\nu t}]. \quad (15)$$

Полученное выражение является общим решением дифференциального уравнения (12). Для определения вида функции R необходимо воспользоваться начальными условиями.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ имеем $\rho_k(0) = \alpha_k$ ($k=0, 1, 2, \dots$), где α_k — известные числа.

В частности, если известно, что в момент $t=0$ в канале действуют i причин ошибок, то $\alpha_i = 1$, а $\alpha_k = 0$ ($k \neq i$). Во всех случаях выполняется

условие нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1$. Выражение (9) принимает вид

$$\Phi(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

а выражение (15) — $\Phi(0, x) = R(x-1)$.

Следовательно,

$$R(x-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k.$$

Если обозначить $x - 1 = Z$, то

$$R(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1 + Z)^k,$$

а

$$R[(x-1)e^{-\rho t}] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [1 + (x-1)e^{-\rho t}]^k. \quad (16)$$

Формулу (15) с учетом (16) можно записать окончательно в виде

$$\Phi(t, x) = e^{-(x-1)\rho(1-e^{-\rho t})} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [1 + (x-1)e^{-\rho t}]^k. \quad (17)$$

Этот ряд абсолютно сходится при $t > 0$ и $|x| < 1$, так как при этом выполняется условие

$$|1 + (x-1)e^{-\rho t}| < 1.$$

Вероятности $p_k(t)$ равны коэффициентам при x^k в разложении (17) по степеням x . Для упрощения операций разложения зададимся следующими начальными условиями:

$$p_0(0) = \alpha_0 = 1, \quad p_k(0) = \alpha_k = 0. \quad (18)$$

Это значит, что с вероятностью, равной единице, можно считать канал свободным от помех в момент $t = 0$. Конечные же результаты оказываются справедливыми при любом предположении относительно начальных условий [4].

Подставим (18) в (17)

$$\Phi(t, x) = e^{-(x-1)\rho(1-e^{-\rho t})} = e^{-\rho(1-e^{-\rho t})} e^{\rho(1-e^{-\rho t})x}.$$

Разлагая второй множитель в этом выражении в ряд по степеням показателя x , получим

$$\Phi(t, x) = e^{-\rho(1-e^{-\rho t})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} [\rho(1-e^{-\rho t})]^k.$$

Следовательно, вероятность того, что в момент времени t в канале связи будут действовать k причин ошибок, равна

$$p_k(t) = \frac{1}{k!} \rho^k (1 - e^{-\rho t})^k e^{-\rho(1-e^{-\rho t})}.$$

В пределе при $t \rightarrow \infty$

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = \frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} = \frac{(\lambda \tau_{ep})^k}{k!} e^{-\lambda \tau_{ep}}.$$

Определим вероятность того, что в течение интервала времени $[0, T]$ в канале возникнут не более k пакетов ошибок при условии появления k причин ошибок. Искомая вероятность будет равна произведению вероятности отсутствия помех в начальный момент времени на вероятность возникновения за время T k причин ошибок.

$$p_{\leq k}(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda(T+\tau_{ep})},$$

Вероятность появления в канале не более $(k-1)$ пачек ошибок за время T равна

$$p_{(k-1) \leq}(T) = \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(T+\tau_{cp})}$$

Вероятность появления ровно k пачек за время T

$$p_k(T) = p_{k \leq}(T) - p_{(k-1) \leq}(T) = \begin{cases} (\lambda T)^{k-1} \frac{(\lambda T - k)}{k!} e^{-\lambda(T+\tau_{cp})}, & k < \lambda T, \\ 0, & k \geq \lambda T. \end{cases} \quad (19)$$

Для $k=0$ за время T имеем

$$p_0(T) = e^{-\lambda(T+\tau_{cp})}$$

а вероятность возникновения ошибок

$$p_{\text{ош}}(T) = 1 - e^{-\lambda(T+\tau_{cp})}$$

При нестационарном потоке моментов возникновения причин ошибок можно показать, что вероятность одновременного действия k пакетов в интервале времени $[\tau, \tau + \xi]$ подчинена тому же закону (19).

$$p_k(\tau, \tau + \xi) = \begin{cases} [\Lambda(\tau, \tau + \xi)]^{k-1} \frac{[\Lambda(\tau, \tau + \xi) - k]}{k!} e^{-[\Lambda(\tau, \tau + \xi) + \lambda'(\tau, \tau)]}, & k < \Lambda(\tau, \tau + \xi), \\ 0, & k \geq \Lambda(\tau, \tau + \xi). \end{cases}$$

Здесь параметр потока переменный $\lambda(t)$ и для интервала $[\tau, \tau + \xi]$

$$\Lambda(\tau, \tau + \xi) = \int_{\tau}^{\tau + \xi} \lambda(t) dt,$$

$$\Lambda'(\tau, \tau) = e^{-\lambda(\tau - \tau)} \int_{\tau}^{\tau} e^{\lambda u} \lambda(u) du,$$

где $\tau - t = \tau_m$ — максимально возможная длина пакета ошибок.

Пологая $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, получим (19).

Таким образом, на основании учета эффекта перекрытия причин, вызывающих ошибки на выходе каналов передачи двоичной информации, получены формулы, которые определяют вероятности появления заданного числа пачек ошибок на известном интервале времени для стационарного и нестационарного потоков начал пачек ошибок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Пуртов, А. С. Замрий, Н. Ф. Шаловалов. Характер распределения ошибок в телефонных каналах при передаче дискретных сигналов. «Электросвязь», 1965, № 6.
2. A. V. Fountain. Error statistics and codins for digital data transmission over telephone and teletype circuits. Proc. IEEE, 1963, 51, № 3.
3. К. А. Брусилковский. Измерения искажений импульсов в системах передачи дискретной информации. Изд-во «Наука», М.—Л., 1965.
4. А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз, 1963.
5. Б. А. Севастьянов. Эргодическая теория для марковских процессов и ее приложения к телефонным задачам с отказами. Теория вероятностей и ее применение, т. II, выпуск 1, 1957.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДЕКОДИРОВАНИЯ ДВОИЧНЫХ ГРУППОВЫХ КОДОВ

Н. Н. Буга, И. М. Израйлит

Многие каналы связи, использующие помехоустойчивые коды, характеризуются сравнительно низкой скоростью телеграфирования — от десятков до нескольких тысяч бод. В то же время скорость работы импульсных устройств в счетных схемах кодопреобразователей достигает 10^6 операций/сек. Таким образом, имеется резерв времени, который может использоваться для осуществления динамического декодирования, повышающего эффективность групповых кодов.

Действие помех в канале связи на передаваемую кодограмму A_i можно представить в виде двоичного вектора помехи X . При этом принимаемая кодограмма будет представлять собой случайный вектор $Z_i = A_i \oplus X$, образованный посимвольным суммированием по модулю два векторов A_i и X .

Пусть декодирующее устройство содержит генератор исправляющих векторов B_i той же значности, что и кодограммы $\{A_i\}$. Множество $\{B_i\}$ представляет собой совокупность двоичных последовательностей, тождественных векторам ошибок, исправляемых данным кодом. Результирующая кодовая комбинация

$$N_i = Z_i \oplus B_i = A_i \oplus X \oplus B_i.$$

Очевидно, что $N_i = A_i$ только тогда, когда $B_i = X$.

Априорное знание вектора помехи на приемном конце системы исключается. Однако с помощью проверок на соответствие принятой кодограммы можно из всей совокупности исправляющих векторов выбрать один единственный, обеспечивающий правильное декодирование. Действительно, при выполнении проверок на соответствие получается $l = (n - k)$ -значный корректор Q , где n — значность кода, k — число информационных символов. Введем функцию обнаружения

$$F = \begin{cases} 0 & \text{при } Q = 0; \\ 1 & \text{при } Q \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

При смене исправляющих векторов Q и F дискретно изменяют свои значения. Максимально время обработки принятой кодограммы

$$T_0 = \Delta t 2^{n-l}, \quad (2)$$

где Δt — временной интервал, необходимый для определения значения одного исправляющего вектора.

Функциональная схема устройства, работающего по принципу динамического декодирования, представлена на рис. 1. Генератор исправляющих векторов (ГИВ) формирует последовательно во времени векторы ошибок B_i до тех пор, пока на выходе решающего устройства (РУ) не появится

сигнал, указывающий на отсутствие ошибки в кодограмме N_i . Этот сигнал останавливает ГИВ и выдает результат получателю информации (ПИ).

Для коррекции m -кратных ошибок хэммингово расстояние между различными кодограммами должно быть $d > 2m + 1$. Искажение помехой переданного вектора A_i с трансформацией его в вектор Z_i уменьшает расстояние d до одной из ближайших комбинаций. Однако его величина

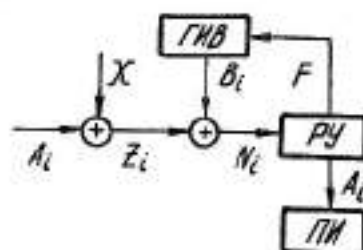


Рис. 1.

не может превышать значения m . Генератор ГИВ вырабатывает векторы с весом, также не превышающим m . При суммировании по модулю два векторов Z_i и B_i , когда вектор помехи X и исправляющий вектор B_i имеют максимальный вес (кроме векторов, имеющих единицы на одноименных позициях), расстояние $d = (2m + 1) - 2m = 1$.

Этот наиболее неблагоприятный случай показывает, что даже при ошибке с максимальным весом расстояние d обеспечивает

возможность обнаружения ошибки. При $X = B_i$ происходит взаимная компенсация векторов, и принятая кодограмма декодируется как неискаженная.

Проиллюстрируем принцип динамического декодирования на коде с хэмминговым расстоянием $d = 3$. Пусть A_i — кодовая комбинация, соответствующая i -у сообщению алфавита источника 2^k . Любая другая комбинация $A_{i \neq j}$, где $j < 2^k - 1$, отстоит от нее на расстоянии $d = 3$. Пусть помеха искажила кодограмму A_i так, что она трансформировалась в запрещенную кодограмму. Проверка на соответствие выявит наличие искажений ($F = 1$), и будет включен ГИВ.

Последним методом проб будет изменять положение импульсной последовательности в кодовом пространстве, перемещая ее по точкам запрещенных комбинаций, отстоящим на расстоянии $d > 1$, до тех пор, пока проверка на соответствие не укажет на отсутствие ошибки.

Метод динамического декодирования исключает возможность трансформации одной кодограммы в другую, если веса векторов помехи и ошибки не превышают d .

Рассмотрим следующий пример. Пусть в канале применен (7,4) — код Хэмминга с расстоянием $d = 3$; очевидно, что алфавит источника может содержать 16 сообщений. Уравнения проверок на соответствие имеют вид $Z_1 = Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_7$; $Z_2 = Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_7$; $Z_4 = Z_3 \oplus Z_6 \oplus Z_7$. Пусть передается кодограмма $A_i = 0010110$, а вектор помехи $X = 0000100$. Тогда принятая кодограмма $Z_i = 0010010$, корректор $q_1 q_2 q_3 = 101$, а функция $F = 1$. Генератор ГИВ формирует исправляющие векторы с весом $w = 1$, например, в следующем порядке: $B_1 = 1000000$, $B_2 = 0100000$, $B_3 = 0010000$, $B_4 = 0001000$, $B_5 = 0000100$, $B_6 = 0000010$, $B_7 = 0000001$, которые поочередно поцифровому складываются по модулю два с принятой кодограммой Z_i , и производится проверка на соответствие. Возможные варианты сумм $Z_i \oplus B_j$ представлены в таблице, где измененный с помощью вектора B_j

Операция	Разряды							Q	F
	1	2	3	4	5	6	7		
$Z_i \oplus$	B_1	1	0	1	0	0	1	0	1
	B_2	0	1	1	0	0	1	0	1
	B_3	0	0	0	0	0	1	0	1
	B_4	0	0	1	1	0	1	0	1
	B_5	0	0	1	0	1	1	0	0
	B_6	0	0	1	0	0	0	0	1
	B_7	0	0	1	0	0	1	1	1

кодированный символ подчеркнут. Анализ таблицы показывает, что искаженная кодограмма $Z_1 = 0010010$ в процессе своего изменения по два раза приближается к кодограммам 1011010 и 0110011 на расстояние $d = 1$; дважды она оказывается удаленной от всех комбинаций алфавита на расстояние $d = 2$ и только один раз совпадает с переданной кодограммой. В последнем случае $F = 0$, что обуславливает однозначность декодирования.

Динамическое декодирование выгодно отличается от известных методов статического декодирования тем, что позволяет учитывать различные законы распределения ошибок в канале связи, изменяя программу работы ГИВ. Так, например, при биномиальном законе распределения ошибок ГИВ должен генерировать сначала все векторы с весом $w = 1$, затем с весом $w = 2$ и т. д. Если наиболее вероятными оказываются пакеты ошибок, то ГИВ перестраивается на формирование векторов ошибок в порядке убывания их наиболее вероятного веса.

Рассмотрим в качестве примера (11,7) — код Слепяна. Кроме коррекции ошибок при биномиальном законе распределения, когда код исправляет все 11 одиночных и 4 из 55 двойных ошибок (вариант I), его можно использовать при других законах распределения ошибок в канале связи. В частности, при преобладании парных (стоящих рядом) ошибок метод динамического декодирования обеспечивает коррекцию 8 из 10 парных ошибок, 2 двойных разнесенных и 5 одиночных ошибок (вариант II). Если же условия в канале таковы, что после одной ошибки искажение двух последующих символов маловероятно, то код можно использовать для исправления только двойных ошибок (вариант III). Во всех рассмотренных случаях используется полный объем корректора, допускающий исправление 15 ошибок. Больших возможностей при (11,7) — коде достигнуть невозможно. Заметим, что несмотря на различные исправляющие векторы при рассмотренных трех вариантах декодирования, алгоритм кодирования остается неизменным и определяется образующими векторами $Y_1 = 10000001111$, $Y_2 = 01000000111$, $Y_3 = 00100001011$, $Y_4 = 00010001101$, $Y_5 = 00001001110$, $Y_6 = 00000100011$, $Y_7 = 00000010101$.

Рассмотрим возможность построения универсального алгоритма декодирования, позволяющего осуществлять обработку любого группового кода в одном кодопреобразователе. Естественно, что должна быть обеспечена возможность перестройки программы в соответствии с заданием.

Выше было показано, что при динамическом декодировании корректор Q получается согласно $l = (n - k)$ проверкам на соответствие и реализуется посредством функции обнаружения F , учитывающей наличие или отсутствие ошибок в принятой кодограмме. Таким образом, изменение алгоритма декодирования при различных кодах обеспечивается суммированием по модулю два различных сочетаний символов принятой кодограммы.

Корректор для (n, k) -кода представляет собой $(n - k)$ -мерный вектор, каждая реализация которого является функцией принятой кодограммы

$$Q = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n),$$

где $Z_i = 0$ или 1. Так как групповые коды линейные, то

$$Q_j = \bigoplus_{i=1}^n \psi_{ji} Z_i,$$

где $\psi_{ji} = 0$ или 1 — коэффициент, характеризующий зависимость j -й компоненты корректора от i -го символа принятой кодограммы.

Составим матрицу для всех возможных значений корректора

$$M_Q = \begin{pmatrix} \psi_{11}Z_1 & \dots & \psi_{1n}Z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{j-1,1}Z_1 & \dots & \psi_{j-1,n}Z_n \end{pmatrix},$$

где для каждого разряда корректора в соответствующей j -й строке производится суммирование по модулю два посимвольных произведений компонент ψ_{ji} и Z_i . Так как совокупность символов $\{Z_i\}$ составляет принятую кодограмму Z_j , то совокупность элементов $\{\psi_{ji}\}$ для каждой строки матрицы может быть представлена в виде управляющего вектора $C_j = (\psi_{j1}, \psi_{j2}, \dots, \psi_{jn})$. Таким образом, принятая кодограмма посимвольно умножается на векторы C_j всех строк. Символы результирующей двоичной последовательности суммируются по модулю два, образуя реализацию корректора. Совокупность компонент корректора образует $(n-k)$ -значное двоичное число, преобразуемое затем в одноразрядную двоичную функцию обнаружения F .

Управляющие векторы C_j для каждого частного алгоритма кода формируются по следующим правилам:

выявляется соответствие между компонентами корректора и контрольными позициями кодограммы ($Q_j \leftrightarrow Z_j$);

уравнения проверок на соответствие представляются в виде функциональной зависимости от информационных символов

$$Q_j = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

для каждого значения Z_i в матрицу M_Q вписывается значение $\psi_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{— при наличии зависимости от соответствующего разряда } Z_i \\ 0 & \text{— при отсутствии такой зависимости.} \end{cases}$

Рассмотрим примеры построения управляющих векторов.

(12,8) — код Слэяна. Уравнения проверок кода имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Z_1; & \alpha_2 &= Z_2; & \alpha_3 &= Z_3; & \alpha_4 &= Z_4; & \alpha_5 &= Z_5; \\ \alpha_6 &= Z_6; & \alpha_7 &= Z_7; & \alpha_8 &= Z_8; \\ Z_9 &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_6 \oplus Z_7 \oplus Z_8; \\ Z_{10} &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_6; \\ Z_{11} &= Z_1 \oplus Z_5 \oplus Z_6 \oplus Z_7 \oplus Z_8; \\ Z_{12} &= Z_1 \oplus Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_6 \oplus Z_8; \end{aligned}$$

Управляющие векторы, построенные по описанной методике, следующие: $C_1 = 11101111000$, $C_2 = 111101000100$, $C_3 = 110110100010$, $C_4 = 101110010001$.

(12,8) — код Хэмминга. Уравнения проверок кода имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Z_3; & \alpha_2 &= Z_6; & \alpha_3 &= Z_9; & \alpha_4 &= Z_7; & \alpha_5 &= Z_8; \\ \alpha_6 &= Z_{10}; & \alpha_7 &= Z_{11}; & \alpha_8 &= Z_{12}; \\ Z_1 &= Z_3 \oplus Z_6 \oplus Z_7 \oplus Z_9 \oplus Z_{11}; \\ Z_2 &= Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_7 \oplus Z_{10} \oplus Z_{11}; \\ Z_4 &= Z_3 \oplus Z_6 \oplus Z_7 \oplus Z_{12}; \\ Z_5 &= Z_6 \oplus Z_{10} \oplus Z_{11} \oplus Z_{12}. \end{aligned}$$

Управляющие векторы будут: $C_1 = 101010101010$, $C_2 = 011001100110$,
 $C_3 = 000111100001$, $C_4 = 000000011111$.

Для других кодов управляющие векторы строятся аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Буга, И. М. Израйлит. Устройство кодирования двоичной информации в самокорректирующийся групповой код, авт. свидетельство № 166260 от 29. 08. 1964.
2. Н. Н. Буга, И. М. Израйлит. Устройство динамического декодирования групповых кодов. Описание к авторскому свидетельству с приоритетом от 9. 02. 1965.
3. У. Питерсон. Коды, исправляющие ошибки, перев. с англ. под ред. Р. Л. Добрушина. Изд-во «Мир», 1964.

ИНФОРМАЦИЯ И ИНФОРМАТИВНОСТЬ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ

Х. М. Виленский

Классический критерий минимума среднего риска дает оценку системы передачи информации с точки зрения вероятностей и значимостей ошибочных и правильных решений. Для ряда практических применений и, в частности, для большинства современных радиосистем, такая оценка недостаточна, ибо существенную роль играет использование сигнала и канала по мощности, времени и спектру. В связи с этим в последние годы отмечается все расширяющееся проникновение информационных критериев в технику связи и управления, шифровую систему автоматики, вычислительную технику, теорию надежности и т. д.

Накопленный за последние годы опыт разработки радиосистем различного назначения [1, 2, 3] показывает, что технически оправданными информационными критериями являются критерий максимума информации (выражающий скорость передачи информации на символ или в единицу времени) и критерий максимума информативности (выражающий количество принятой информации, приходящееся на единицу затраченной средней энергии сигнала). Для пользования этими критериями требуются явные вычисления информации и информативности реальных каналов связи.

Известно, что любые дискретные сообщения можно перевести в двоичный алфавит, который наиболее удобен для аппаратурной реализации. Ансамбль сигналов любой двоичной системы состоит из двух сигналов, поэтому для большей общности, наглядности и упрощения записей приемлем следующую систему обозначений: $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — сигналы, $p_1 = p$ и $p_2 = 1 - p$ — априорные вероятности, \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — энергии, $q_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{N_0}$ и $q_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{N_0}$ — энергетические отношения сигнал-помеха соответственно сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (N_0 — спектральная плотность помехи), $q_{cp} = p_1 q_1 + p_2 q_2$ — среднее энергетическое отношение сигнал-помеха, при $q_1 = q_2 = q_0 = q$ величина $q_{cp} = q$.

В настоящей работе исследуются аналоговые информационные показатели двоичных сигналов — информация и информативность. Предполагается, что над принимаемым сигналом производятся лишь те необратимые операции, которые достаточны для извлечения из него всей возможной информации. Известно [4], что эти операции формируют функцию правдоподобия или любую функцию, являющуюся информационным эквивалентом функции правдоподобия. Выходное напряжение такого достаточного приемника представляет собой смесь сигнала и шума и является непрерывной величиной даже в том случае, когда на вход приемника поступают дискретные сигналы. Информация, содержащаяся в выходном

непрерывном напряжении (названная выше аналоговой), во многих случаях не может быть непосредственно использована. Тогда применяется дальнейшая обработка сигнала с целью извлечения из него цифровой (дискретной) информации, что связано с потерями информации. Знание аналоговой информации позволяет оценить степень совершенства методов и устройств (квантующих, накопительных, решающих), которые служат для получения цифровой информации.

Аналоговая информация двоичных систем произвольного типа

Выведем соотношения для вычисления аналоговой информации и информативности двоичных сигналов произвольного типа, не делая никаких предположений о характере действующей в канале помехи. Воспользуемся для этого основным информационным соотношением

$$I = H(x) - M_y[H(x/y)], \quad (1)$$

где x и y — многомерные векторы, представляющие соответственно посланный и наблюдаемый на входе приемника сигнал, $H(x)$ — энтропия априорного распределения $p(x)$, $H(x/y)$ — энтропия апостериорного распределения $p(x)$, $M_y[H(x/y)]$ — усредненная по всем значениям y энтропия $H(x/y)$,

$$M_y[H(x/y)] = - \int \int p(x) P(y/x) \lg[P(x/y)] dx dy, \quad (2)$$

$P(y/x)$ — функция правдоподобия.

Для двоичного сигнала последнее соотношение преобразуется к виду

$$M_y[H(x/y)] = -p_1 \int P(y/x_1) \lg[P(x_1/y)] dy - \\ - p_2 \int P(y/x_2) \lg[P(x_2/y)] dy, \quad (3)$$

где $P(y/x_1)$ и $P(y/x_2)$, $P(x_1/y)$ и $P(x_2/y)$ — функции правдоподобия и апостериорные плотности вероятностей наличия в принятом (наблюдаемом) колебании сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно.

Воспользовавшись известным соотношением для обобщенного коэффициента правдоподобия [5]

$$l_1 = \frac{p_1 P(y/x_1)}{p_2 P(y/x_2)} = \frac{P(x_1/y)}{P(x_2/y)} \quad (4)$$

и очевидным соотношением

$$P(x_2/y) = 1 - P(x_1/y),$$

находим

$$P(x_1/y) = \frac{l_1}{1+l_1}, \quad P(x_2/y) = \frac{1}{1+l_1}.$$

Аналогично (4) определяем величину $l_2 = \frac{1}{l_1}$.

Подставляя теперь выражения для $P(x_1/y)$ и $P(x_2/y)$ в (3) и возвращаясь к исходному соотношению (1), будем иметь

$$I = -p_1 \lg p_1 - p_2 \lg p_2 - p_1 \int P(y/x_1) \lg[1 + l_2(y)] dy - \\ - p_2 \int P(y/x_2) \lg[1 + l_1(y)] dy. \quad (5)$$

Полученное общее соотношение для аналоговой информации, как и следовало ожидать, совершенно симметрично относительно индексов (сигналов) 1 и 2, однако индексы у функции правдоподобия и коэффициента правдоподобия в каждом подынтегральном выражении различны, т. е. каждая подынтегральная функция содержит функцию правдоподобия одного и коэффициент правдоподобия другого из различаемых сигналов.

При $p_1 = p_2$ информационные интегралы, входящие в (5), как это можно показать, равны друг другу. Тогда выражение для аналоговой информации принимает наиболее простой вид

$$I = 1 - \int P(y/x_i) \lg[1 + l_i(y)] dy; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (6)$$

Отметим, что формула для аналоговой информации, применительно к частному случаю обнаружения радиолокационного сигнала, приводится в работе [6]. Эта формула, однако, отличается от полученных здесь формул (5) и (6).

Переходя от информации к информативности, заметим прежде всего, что хотя информация сигнала всегда стремится к нулю при $q \rightarrow 0$ или $p \rightarrow 0$, изменяется монотонно с изменением этих величин, информативность сигнала при этом в общем случае изменяется не монотонно и не стремится к нулю.

Отправляясь от исходного определения информативности

$$V = \frac{I}{q} \quad (7)$$

и составляя условие $V' = 0$, находим экстремальное значение информативности $V_{\text{э}} = I'$, которое наступает при $q_{\text{э}} = \frac{I}{I'}$ (I' — значение производной I по параметру q в точке $q = q_{\text{э}}$). Отсюда следует, что в точка экстремума всегда

$$\frac{I}{q} = \frac{dI}{dq} \quad (8)$$

и, в частности, при $q \rightarrow 0$

$$V(0) = \frac{0}{0} = \lim_{q \rightarrow 0} I'(q). \quad (9)$$

Этот предел можно, как видно из (5), найти также по формуле

$$V(0) = - \int \{ \lim_{q \rightarrow 0} [P(y, q)] \} dy, \quad (10)$$

если только несобственные интегралы в (5) и (10) удовлетворяют условиям непрерывной дифференцируемости и равномерной сходимости.

Нам остается максимизировать информацию и информативность по параметру p . Для этого представим выражение (5) в виде

$$I = -p \lg p - (1-p) \lg(1-p) - \varphi(p, q). \quad (11)$$

На основании (11) можно написать следующее:

1) для $q \gg 1$, когда энтропия помехи $\varphi(p, q) \rightarrow 0$,

$$I \approx -p \lg p - (1-p) \lg(1-p); \quad (12)$$

2) для $q \ll 1$, когда энтропия помехи $\varphi(p, q)$ стремится к энтропии сигнала,

$$I = -p \lg p - (1-p) \lg(1-p) + p \lg p \varphi_1(q) + [(1-p) \lg(1-p)] \varphi_2(q). \quad (13)$$

В обоих случаях, из условия $\frac{dI}{dp} = 0$, оптимальная априорная вероятность оказывается равной 0,5. Этот вывод справедлив для любых значений q , что вполне естественно: в аналоговом случае передаваемые сигналы в одинаковой мере подвержены влиянию помех и способа обработки, так что максимум информации всегда совпадает с максимумом энтропии источника.

Иначе обстоит дело при максимизации информативности сигнала. Отметим сначала тот единственный случай, когда информативность, как и информация, достигает максимума при $p = 0,5$. Такое положение имеет место при различении сигналов с одинаковой энергией, когда

$$q_{\varphi} = p_1 q + p_2 q = q$$

оказывается независимой от априорной вероятности p .

Применительно к задаче обнаружения имеем для $q \gg 1$ (Здесь $q_2 = 0$, $q_1 = q$)

$$V = \frac{I}{pq} = -\frac{p \lg p + (1-p) \lg(1-p)}{pq},$$

а при $q \ll 1$

$$V = \frac{I}{pq} = -\lg p \frac{1 - \varphi_1(q)}{q} - \frac{(1-p) \lg(1-p)}{p} \frac{1 - \varphi_2(q)}{q}.$$

Из условия $\frac{dV}{dp} = 0$ находим, что в обоих случаях $V = V_{\max}$ при $p \rightarrow 0$. При любом q

$$V_{\max} = \frac{1}{q} \lim_{p \rightarrow 0} I'(p). \quad (14)$$

Информация и информативность основных типов двоичных сигналов

Рассмотрим с информационной точки зрения три типа двоичных сигналов: сигнал с полностью известными параметрами, сигнал с неизвестными (паразитными) параметрами, шумовой сигнал, принимаемый на фоне белой гауссовой аддитивной помехи.

Начнем с парафазного двоичного сигнала, удовлетворяющего условию $x_1(t) = -x_2(t)$. Такой сигнал соответствует предельному случаю фазовой манипуляции полностью известного сигнала. Требуемые (для расчета) функции правдоподобия можно получить следующим образом.

Одномерные функции правдоподобия для k -й выборки имеют здесь вид

$$P(y_k/x_{1k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{(y_k - x_{1k})^2}{2z}}, \quad (15)$$

$$P(y_k/x_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{(y_k + x_{1k})^2}{2z}}, \quad (16)$$

где $z = N_0 F$ — дисперсия помехи, F — полоса частот.

Для решения поставленной задачи необходимо перейти к многомерным (в случае белого шума — к бесконечно-мерным) функциям правдоподобия, которые, как показано в [7] применительно к (15), имеют вид

$$P(z/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-\frac{(z-3)^2}{2v_0}},$$

$$P(z/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-\frac{(z+3)^2}{2v_0}},$$

где z — оптимально преобразованное колебание y на выходе оптимального фильтра, являющееся одномерной гауссовой величиной с дисперсией

$$v_0^1 = \frac{\exists N_0}{2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\exists}{v_0} = \sqrt{\frac{\exists \exists}{N_0}} = Vq,$$

имеем

$$P(z/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{v_0} - Vq \right)^2},$$

$$P(z/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{v_0} + Vq \right)^2}.$$

Поскольку

$$P(z/x_1) = p(y/x_1) = P[y(t)/x_1(t)],$$

$$P(z/x_2) = P(y/x_2) = P[y(t)/x_2(t)],$$

в формуле (5) можно оперировать одномерной величиной z вместо многомерного вектора y .

Сделанный вывод вытекает из общего свойства оптимальной схемы обработки двоичных сигналов: такая схема всегда преобразует многомерный (бесконечно-мерный) входной сигнал в одномерный выходной сигнал (этим обстоятельством мы будем пользоваться далее без особых оговорок).

Считаем, что при вычислении информации по формуле (5) дисперсия выходного эффекта исчезает в процессе интегрирования, функциям правдоподобия для рассматриваемого парафазного сигнала можно придать простой вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (y-Vq)^2}, \quad (17)$$

$$P(y/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (y+Vq)^2}, \quad (18)$$

где вместо z мы сохранили обозначение y .

Подставляя (17, 18) в (5), находим выраженную в двоичных единицах информацию

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (y-Vq)^2} \lg(1 + e^{-2yVq}) dy. \quad (19)$$

При $q \rightarrow 0$ это соотношение можно переписать в виде

$$I = 1 - e^{-\frac{q}{2}},$$

при этом информативность

$$V = \frac{1 - e^{-\frac{q}{2}}}{q},$$

откуда следует, что потенциальная информативность

$$V_{\text{max}} = \lim_{q \rightarrow 0} V = 0,5 \text{ двоичных единиц.}$$

В предельном случае амплитудной манипуляции (случай обнаружения) функции правдоподобия имеют вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2},$$

$$P(y/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

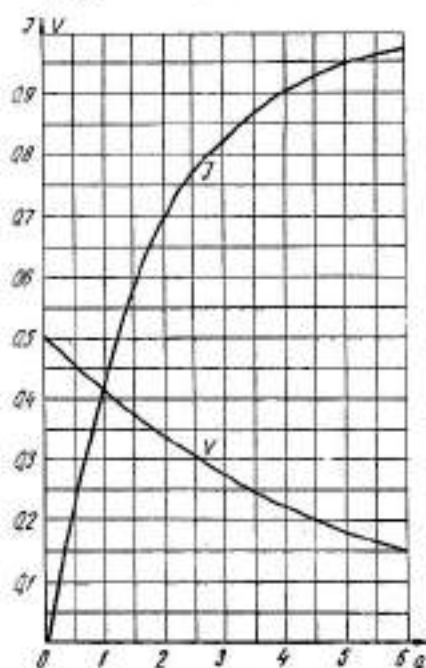


Рис. 1.

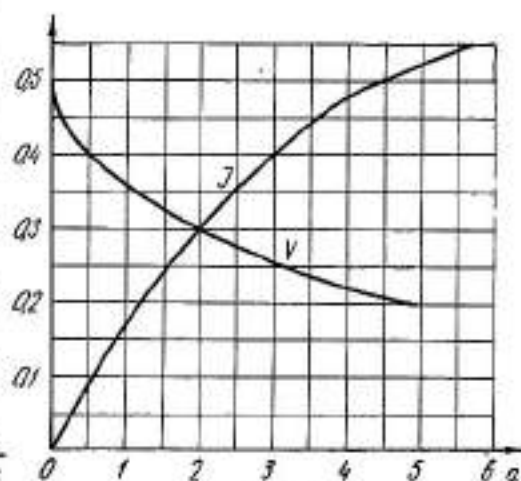


Рис. 2.

а информация (при $p = 0,5$)

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2} \lg \left[1 + \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2}} \right] dy. \quad (20)$$

При $q \rightarrow 0$ имеем

$$I = 1 - e^{-\frac{q}{4}}.$$

Отсюда снова получаем $V_{\text{max}} = 0,5$ двоичных единиц (с учетом того, что средняя энергия сигнала теперь в 2 раза меньше). Вместе с этим при

$q \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 0$ из (7) получаем абсолютный максимум информативности $V_{\max} = 0,5$ натуральных единиц информации.

На рис. 1 и 2 представлены полные информационные характеристики фазо-манипулированных и амплитудно-манипулированных сигналов указанного типа.

В качестве флюктуирующего сигнала рассмотрим сигнал со случайной равномерно-распределенной начальной фазой и случайной, распределенной по закону Релея амплитудой. Бесконечно-мерные функции правдоподобия (при $q_1 = q$, $q_2 = 0$, $p_1 = p_2$) имеют здесь вид

$$P(y/x_1) = \frac{y}{1 + \frac{q}{2}} e^{-\frac{y^2}{2(1 + \frac{q}{2})}}, \quad P(y/x_2) = ye^{-\frac{y^2}{2}},$$

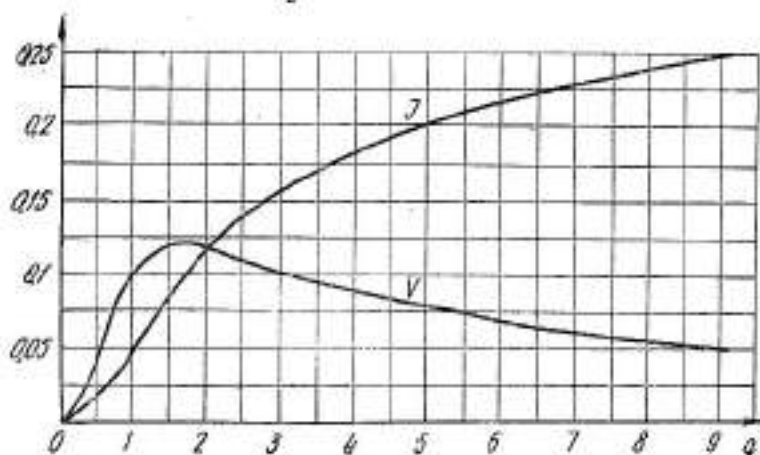


Рис. 3.

а информация, согласно (5),

$$I = 1 - \frac{1}{1 + \frac{q}{2}} \int_0^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2(1 + \frac{q}{2})}} \lg \left[1 + \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-\frac{y^2}{2(1 + \frac{q}{2})}}} \right] dy. \quad (21)$$

Пользуясь (10), легко установить, что при $q \rightarrow 0$ информативность $V_{\max} = 0$; это характерно для сигналов с паразитными параметрами. На рис. 3 представлены соответствующие информационные характеристики, из которых видно, что потенциальная информативность такого сигнала, равная 0,12 двоичных единиц, достигается при $q \approx 1,5$.

При разрешении флюктуирующего сигнала рассматриваемого типа от такого же мешающего сигнала (при наличии гауссового шума), коэффициент использования энергии, как показано в [7],

$$\gamma = 1 - \rho^2 \frac{E}{E + N_0},$$

где ρ — коэффициент корреляции, E — средняя энергия мешающего сигнала. С учетом этого легко получить информационные характеристики

разрешения двух сигналов, полагая в формуле (21) величину q уменьшенной в γ раз.

В задаче обнаружения одного гауссового сигнала на фоне другого такого же гауссового сигнала (эти сигналы могут отличаться только дисперсиями, равными соответственно σ_c^2 и σ_0^2) функции правдоподобия получают следующий вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n\sqrt{1+q}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2(1+q)}}$$

$$P(y/x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}}$$

При малых q информация такого сигнала приводится к простой формуле (при $p = 0,5$)

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \lg(1 + e^{-\frac{y^2}{2}}) dy.$$

Отсюда следует, что потенциальная информативность, равная 0,25 натуральных единиц, достигается здесь, как и у полностью известного сигнала, при $q \rightarrow 0$.

Информационные характеристики двоичного гауссового сигнала (при $p = 0,5$) и «полного» (идеального шенноновского) гауссового сигнала, для которого, согласно [8], информативность на символ (при базе, равной единице)

$$V = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+q)}{q},$$

представлены на рис. 4.

Для анализа любых других видов информации и способов манипуляции необходимо располагать соответствующими функциями правдоподобия. В приложении приведены в качестве примера функции правдоподобия для нескольких видов двоичной информации (сигналов с полностью известными параметрами), которые могут использоваться для решения ряда информационных задач.

ВЫВОДЫ

1. Получены выражения для нахождения информации и информативности произвольной аналоговой двоичной системы. Эти информационные показатели оптимизированы по априорной вероятности и энергетическому параметру.

2. Найдены полные информационные характеристики трех основных типов двоичных сигналов, позволяющие установить некоторые общие закономерности процесса передачи двоичной информации, в том числе

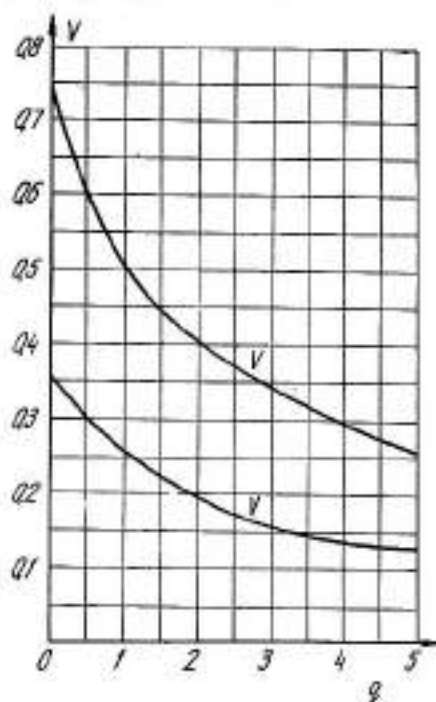


Рис. 4.

асимптотические данные для проектирования оптимальных информационных систем.

3. В противоположность информации сигнала, которая всегда достигает максимума при $p = 0,5$ и $q \rightarrow \infty$, информативность максимальна при значениях p и q , зависящих от типа сигнала. При $q = q_{\text{опт}}$ информативность равна крутизне информационной характеристики $I = I(q)$.

4. Информативность «полностью известного» и «полностью случайного» сигналов достигает максимума при $q \rightarrow 0$ — в первом случае она равна 0,5 двоичных единиц (0,35 натуральных единиц), во втором случае — 0,25 натуральных единиц (в обоих случаях при заданном $p = 0,5$). Абсолютный максимум информативности этих же сигналов, равный 0,5 натуральных единиц, достигается, когда одновременно $q \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$.

5. Информативность двоичного гауссового сигнала (при $p = 0,5$) в два раза меньше информативности идеального гауссового сигнала, имеющего структуру белого гауссового шума.

6. Информативность двоичных сигналов с паразитными параметрами достигает максимума при $q > 0$, а потенциальная информативность достигается при $p \rightarrow 0$. Информативность сигналов с распределенной по закону Релея амплитудой и равновероятной фазой достигает максимума, равного 0,12 двоичных единиц, при $q \approx 1,5$ (если априорные вероятности p_1 и p_2 одинаковы).

7. Оптимальная априорная вероятность двоичного сигнала зависит от глубины манипуляции $r = \frac{q_2}{q_1}$; она изменяется от 0 до 0,5 при изменении r от 0 до 1.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимальных систем передачи, обработки и хранения информации в устройствах различного назначения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции правдоподобия двоичных сигналов, (не содержащих паразитных параметров), для различных видов информации

Вид информации	Функция правдоподобия
1. Обнаружение амплитудно-манипулированных сигналов ($q_1 = q$; $q_2 = 0$)	$\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q})^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$.
2. Различение амплитудно-манипулированных сигналов	$\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_1})^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_2})^2\right]$.
3. Различение фазо-манипулированных сигналов	$\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q})^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}(y + \sqrt{q})^2\right]$.
4. Различение частотно-манипулированных сигналов	$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{\frac{q}{2}}\right)^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \sqrt{\frac{q}{2}}\right)^2\right]$.
5. Различение амплитудно- и фазо-манипулированных сигналов	$\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_1})^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}(y + \sqrt{q_2})^2\right]$.
6. Различение амплитудно- и частотно-манипулированных сигналов.	$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{\frac{q_1}{2}}\right)^2\right]; \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \sqrt{\frac{q_2}{2}}\right)^2\right]$.

Продолжение

Вид информации	Функции правдоподобия
7. Разрешение одного сигнала от другого сигнала	$+ \sqrt{\frac{q_2}{2}} \Big] \cdot$ $\exp \left[-\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{\frac{q}{2}} (1 - \rho) \right)^2 \right];$ $\exp \left[-\frac{1}{2} y^2 \right].$
8. Взаимное разрешение двух сигналов	$\exp \left[-\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{\frac{q}{2}} (1 - \rho) \right)^2 \right];$ $\exp \left[-\frac{1}{2} \left(y + \sqrt{\frac{q}{2}} (1 - \rho) \right)^2 \right].$

Примечания. Нормирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ везде для простоты опущен; в л. 3, 4, 7, 8 $q_1 = q_2 = q$; в л. 4 и 6 сигналы ортогональны; в л. 3 и 5 сдвиг фаз равен π ; в л. 7 и 8 коэффициент взаимной корреляции

$$\rho = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t) dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретной информации. Изд-во «Сов. радио» М., 1963.
2. Сборник статей «Передача цифровой информации» (перевод под ред. С. И. Самойленко). Изд-во ИЛ, М., 1963.
3. А. Г. Зюко. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. Связьдат, М., 1963.
4. С. Е. Фалькович. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. Изд-во «Сов. радио», М., 1961.
5. Д. Ван-Митер, Д. Мидлтон. Современные статистические методы в теории приема сигналов. Сборник статей «Прием сигналов при наличии шума» (перевод под редакцией Л. С. Туткина). Изд-во ИЛ, М., 1960.
6. Ф. П. Тарасенко. Сравнение методов радиолокационного приема с точки зрения теории информации. «Радиотехника», 1959, № 7.
7. Я. Д. Шарман, В. Н. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Сов. радио», 1963.
8. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. Изд-во ИЛ, М., 1963.

ИНФОРМАЦИЯ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ

С. Ю. Олейников

В радиосвязи, радиолокации, радионавигации и других областях техники связи распространенным и характерным является некогерентный прием сигналов. Неопределенность фазы гармонических составляющих сигнала может быть вызвана различными причинами: условиями формирования сигнала в передающем устройстве, флюктуацией времени распространения сигнала в канале связи, случайными свойствами отражающей поверхности и т. д.

Представим сигнал, поступающий на вход приемного устройства канала связи, в виде [1]

$$y(t) = x(t, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots) + n(t),$$

где $n(t)$ — функция помехи,
 $x(t, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots)$ — функция сигнала, зависящая от времени и параметров $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$.

a_1, a_2, \dots — параметры, несущие информацию о наблюдаемом процессе.

b_1, b_2, \dots — случайные параметры сигнала, которые с точки зрения передачи информации можно считать паразитными.

К числу паразитных параметров можно отнести и случайную фазу принимаемого сигнала.

Для информационного анализа исследуемой операции необходимо получить зависимости количества информации $I(q)$ и информативности $V(q)$ от энергии полезного сигнала, которую можно характеризовать энергетическим отношением сигнал-помеха

$$q = \frac{\mathcal{E}}{N_0},$$

где \mathcal{E} — энергия полезного сигнала,

N_0 — спектральная плотность помехи.

Информативностью будем называть отношение количества информации к величине средней нормированной энергии

$$V = \frac{I}{\sum_{n=1}^m p_n \mathcal{E}_n}$$

p_n — априорная вероятность появления сигнала, $m = 2$.

Анализ указанных зависимостей проведем как до квантования, так и после него, что позволит сравнить эффективность проведенной обработки сигнала, выяснить ее информационный к. п. д. Далее, решая вариационную задачу оптимизации условий обработки сигнала, найдем зависимость оптимального порога квантования $k_{opt}(q)$ для двух критериев согласования канала связи — минимальной вероятности ошибки и максимума получаемой информации; наконец, выясним вопрос о целесообразности регулирования порога квантования при изменении уровня входящего сигнала для получения максимальной информации.

Исходным соотношением для подсчета количества информации, заключенного в двоичном сигнале до квантования, является формула [2]. Известно, что функция правдоподобия $P(y/x)$ для сигнала со случайной начальной фазой имеет вид [1]

$$P(y/x) = \frac{y}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2v_0^2} - \frac{q}{2}} I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right), \quad (1)$$

где $v_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2} \Theta}$ — среднеквадратичное значение шумовой составляющей корреляционного интеграла $v = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) x(t) dt$,

I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Функцию правдоподобия для случая отсутствия сигнала получим, положив в выражении (1) $\Theta = 0$

$$P(y/0) = \frac{y}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2v_0^2}}.$$

Рассмотрим случай наибольшей неопределенности, когда априорные вероятности одинаковы и равны 0,5. Формула для подсчета количества информации приобретает вид

$$I = 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2v_0^2} - \frac{q}{2}} \cdot I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right) \log \left[1 + \frac{e^{q/2}}{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right)} \right] dy - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2v_0^2}} \log \left[1 + \frac{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right)}{e^{q/2}} \right] dy. \quad (2)$$

Интегралы в формуле (2) не выражаются через известные функции, поэтому для получения аналитического выражения зависимости $I(q)$ рассмотрим сначала область $q \ll 1$, где справедливы следующие допущения:

1) коэффициенты правдоподобия при малых уровнях полезного сигнала близки к 1

$$\frac{e^{q/2}}{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right)} \approx \frac{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{v_0}\right)}{e^{q/2}} \approx 1;$$

2) модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка можно разложить в степенной ряд, ограничиваясь только первыми двумя членами разложения

$$I_0\left(\frac{\sqrt{Vq}}{v_0}\right) = 1 + \frac{V^2 q}{4v_0^2}.$$

Тогда формула (2) приобретает вид

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-q/v_0} - \frac{q}{2} e^{-q/v_0} \right).$$

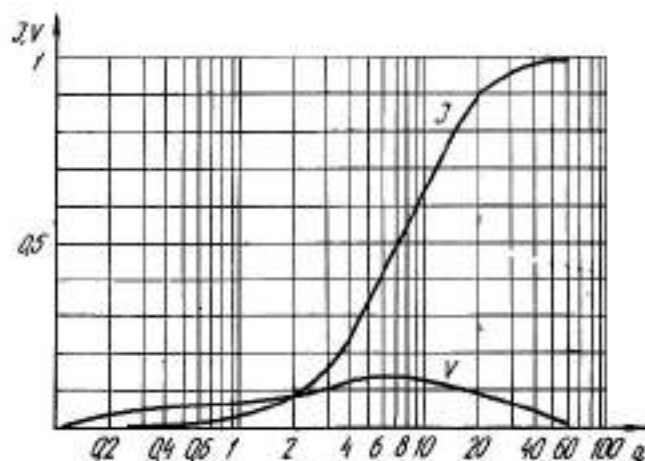


Рис. 1.

Анализируя полученное выражение, можно заключить, что первая производная от информации по параметру q при $q \rightarrow 0$ стремится к 0: при очень малых уровнях сигнала прирост получаемой информации невелик.

С помощью численного интегрирования исследовано поведение величин I, V при других значениях q . Результаты представлены на рис. 1. Характерным в полученных результатах является наличие экстремума для функции $V(q)$. Это значит, что работа при определенных уровнях полезного сигнала приведет к наибольшему уплотнению канала связи информацией на единицу энергии полезного сигнала.

На рис. 2 представлены зависимости $I(p)$ и $V(p)$ для случая $q = 1$, а также кривая $qV(p)$ для $q \gg 1$.

Подвергая сигнал, поступающий на вход решающего устройства, квантованию, мы тем самым разрушаем часть полезной информации. Выясним, при каких условиях величина информационных потерь будет наименьшей. С этой целью рассмотрим формулу для количества информации, получаемой после квантования при обнаружении двоичного сигнала [3], которая при равных априорных вероятностях запишется так:

$$I = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \log \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} + \beta_1 \log \frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} + \alpha_2 \log \frac{2\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2} + \beta_2 \log \frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right),$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Вероятности правильного обнаружения β_2 и ложной тревоги α_1 для сигнала со случайной начальной фазой определяется следующими выражениями [1]:

$$\beta_2 = \int_{\sqrt{k}}^{\infty} s \cdot I_0(s\sqrt{q}) \cdot e^{-\frac{s^2+q}{s}} ds = Q(\sqrt{k}; \sqrt{q}) \quad (3)$$

$$\alpha_1 = e^{-\frac{k}{2}}, \text{ где } k = \frac{V_0^2}{V_n^2}. \quad (4)$$

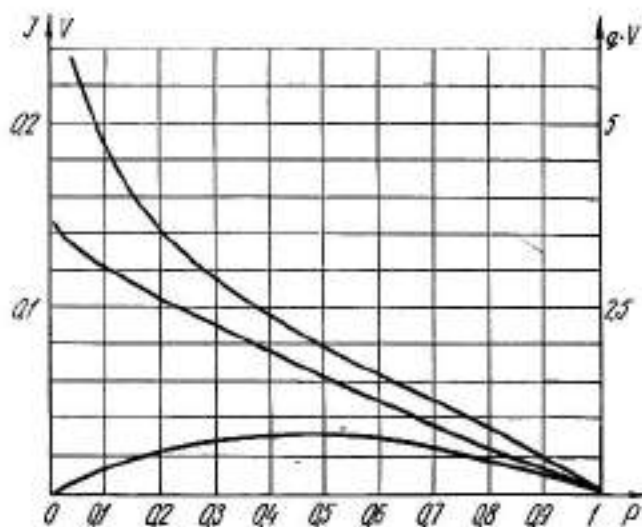


Рис. 2.

Подставляя (3) и (4) в условие максимизации I в зависимости от порога квантования [3], получим

$$\frac{e^{q/2}}{I_0(\sqrt{kq})} = \frac{\log \frac{Q(\sqrt{k}; \sqrt{q}) [2 - e^{-\frac{k}{2}} - Q(\sqrt{k}; \sqrt{q})]}{[1 - Q(\sqrt{k}; \sqrt{q})] [e^{-\frac{k}{2}} + Q(\sqrt{k}; \sqrt{q})]}}{\log \frac{e^{-\frac{k}{2}} [2 - e^{-\frac{k}{2}} - Q(\sqrt{k}; \sqrt{q})]}{(1 - e^{-\frac{k}{2}}) [e^{-\frac{k}{2}} + Q(\sqrt{k}; \sqrt{q})]}}. \quad (5)$$

С помощью этого трансцендентного уравнения, в которое входит интеграл вероятностей распределения Релея — Райса Q , находим зависимость оптимального порога квантования k от величины q , представленную на рис. 3. Уравнение (5) в области значений $q \gg 1$ преобразуется в более удобную для расчетов форму заменой функции I_0 и Q их приближенными выражениями

$$e^{\frac{q}{2} - \sqrt{kq}} = \frac{\ln 2\sqrt{\pi}(\sqrt{q} - \sqrt{k}) + (\sqrt{q} - \sqrt{k})^2}{\sqrt{2\pi\sqrt{kq}} \frac{k}{2}}.$$

Из графика рис. 3 видно, что при малых значениях q величина k близка к 3, при $q \gg 1$ k стремится к значению $q/4$. Чтобы провести сравне-

ние, на рис. 3 представлен график зависимости $k(q)$, где критерием оптимума выбран минимум вероятности ошибки, для которого справедливо условие [3]

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_2'} = \frac{e^{\alpha_1 q}}{I_0(\sqrt{kq})} = 1.$$

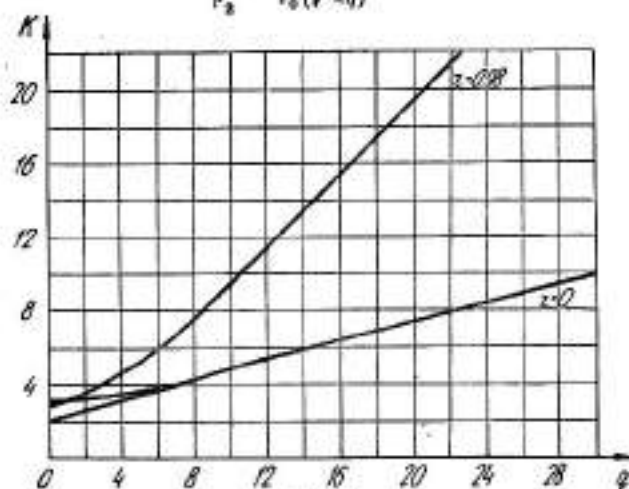


Рис. 3

При значениях $q > 10$ оптимальные пороги квантования для получения минимума вероятности ошибки и максимума информации мало отличаются друг от друга и стремятся к величине $q/4$.

Далее находим зависимости $I(q)$ и $V(q)$ для оптимально квантованного сигнала. Результаты представлены на рис. 4. Характерно, что зна-

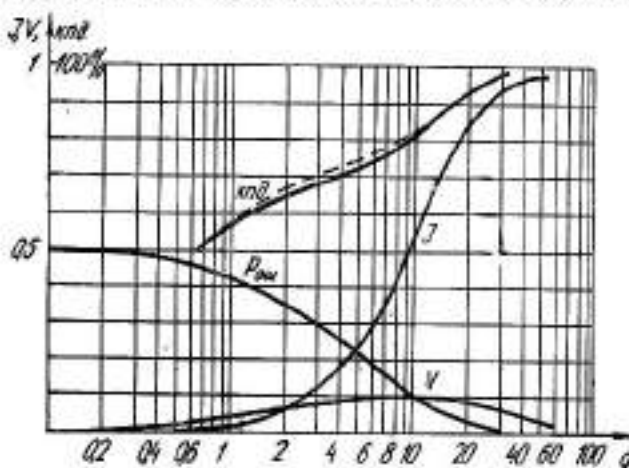


Рис. 4.

чение q , при котором величина V максимальна, сдвигается в сторону больших значений q , причем максимальное значение информативности уменьшается. На этом же рисунке приведена зависимость средней вероятности ошибки $P = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$ от уровня проходящего сигнала, когда порог квантования выбирается из соображений минимальной вероятности ошибки.

Полученные информационные зависимости $I(q)$ и $k_{\text{опт}}(q)$ для случая квантованной информации в основном совпадают с результатами ранее опубликованной работы [4].

Рассмотрим вопрос о целесообразности следящего порога квантования. Пусть величина принимаемого сигнала меняется в два раза по сравнению с уровнем, обеспечивающим максимальную информативность $V_{\text{макс}} = 0,1 \text{ дб. ед.}$, причем порог квантования фиксирован. Информативность при этом падает до 0,07. Если же установить оптимальный порог квантования для нового значения уровня принимаемого сигнала, то получим информативность $V = 0,09 \text{ дб. ед.}$ Выигрыш составит 20%. Как указывалось выше, все полученные результаты относятся к случаю, когда априорные вероятности сигнала одинаковы; известно, однако, что условие равенства априорных вероятностей не является оптимальным для получения максимального количества информации. С помощью уравнения

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \frac{1 - \alpha_1(1 + \varepsilon)}{1 - \beta_1(1 + \varepsilon)} \frac{\log \frac{\beta_1}{\beta_2 \cdot \varepsilon}}{\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \cdot \varepsilon}},$$

где $\varepsilon = \frac{p(\alpha_2 - \beta_1) + \beta_2}{p(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_1}$, были получены результаты, позволяющие сравнить информационный к. п. д., получаемый при согласовании канала связи по

всем параметрам, с информационным к. п. д., получаемым при фиксированном распределении априорных вероятностей (случай наибольшей неопределенности). На рис. 3 характер изменения информационного к. п. д. при полном согласовании представлен пунктирной кривой. Выигрыш, получаемый благодаря полному согласованию, по сравнению со случаем наибольшей неопределенности не превышает 3–4%.

Обнаружение двоичных сигналов можно рассматривать как частный случай различения двух амплитудно-манипулированных сигналов при индексе манипуляции $r = q_2/q_1 = 0$. При значениях $r > 0$ количество аналоговой и дискретной информации уменьшается по сравнению со случаем $r = 0$. При этом кривая зависимости $k_{\text{опт}}(q)$ вращается вокруг точки с координатами $q = 1$, $k = 3$; а при $r \rightarrow 1$ стремится к прямой с уравнением $k = q$ (см. рис. 3). На рис. 5 представлены зависимости $I(q)$ до и после квантования при $r = 0,5$ и $r = 0,25$.

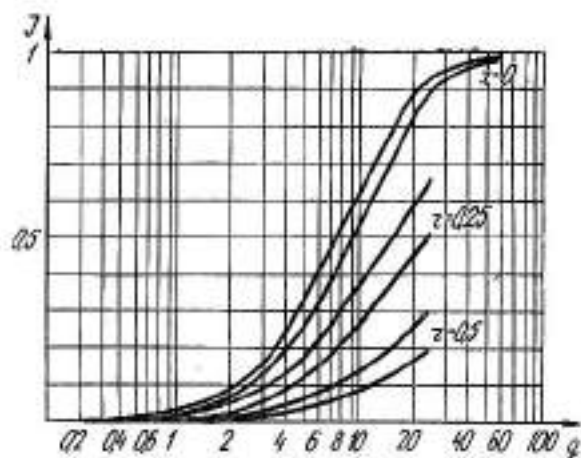


Рис. 5.

ВЫВОДЫ

1. Представляется возможность путем правильного выбора энергетического соотношения сигнал-шум получить наибольшее уплотнение канала связи информацией, приходящейся на единицу энергии полезного сигнала. Для $\rho = 0,5$ величина $q_{\text{опт}} \approx 7$, при этом информативность $V_{\text{макс}} = 0,14 \text{ дб. ед.}$

2. При обнаружении сигнала со случайной начальной фазой можно, в зависимости от предъявляемых требований, выбрать наиболее подходящий режим работы, пользуясь кривыми $I(q)$ и $P(q)$, представляемыми на рис. 4. Максимальная информативность квантованного сигнала $V_{\text{макс}}$ равная 0,1 дв. ед. достигается при $q_{\text{опт}} \approx 9$.

3. Введение следящего порога квантования позволяет получить существенный выигрыш по информативности.

4. При $q > 10$ можно установить единый порог квантования, выгодный с точки зрения минимизации средней вероятности ошибки, так и максимизации получаемой информации.

5. Для квантованных на два уровня сигналов выбор оптимального распределения априорных вероятностей в общем случае существенно влияет на величину информации, однако при оптимальном пороге квантования не дает значительного выигрыша по сравнению со случаем равных априорных вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман, В. И. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Сов. радио», 1963.
 2. Х. М. Виленский. Информация и информативность двоичных сигналов. (В этом сборнике).
 3. Х. М. Виленский. Информатика двоичных систем. Тезисы докладов на 22 и 23 научной конференции. Изд-во ХАИ, 1965 и 1966.
 4. Ф. П. Тарасенко. Об оптимальном пороге квантования принимаемого сигнала для бинарных систем обнаружения. «Известия вузов МВО СССР. Радиотехника», 1959, № 3.
-

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, ПОЯВЛЯЮЩЕГОСЯ В СЛУЧАЙНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Н. Ф. Клюев

1. Постановка задачи

На вход анализатора в дискретные моменты времени поступают независимые случайные величины $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, которые при $n < x$ представляют собой отсчеты помехи, а при $n \geq x$ — отсчеты смеси сигнала с помехой. Закон распределения вероятностей отсчета U_n при $n < x$ определяется функцией $P_0(u_n)$, а при $n \geq x$ — функцией $P_1(u_n)$. Предполагается, что при поступлении отсчета u_n любое значение x от $x = 1$ до $x = n$ равновероятно. Анализатор должен зафиксировать факт появления сигнала на фоне помехи.

При обнаружении сигнала в рассматриваемых условиях могут применяться либо серийные процедуры, либо процедуры типа последовательного анализа [1]. В первом случае при поступлении очередного отсчета U_n решение о наличии сигнала выдается в результате анализа заданного числа m смежных отсчетов $u_{n-m+1}, u_{n-m+2}, \dots, u_{n-1}, u_n$. Во втором случае решение на каждом шаге (при поступлении очередного отсчета) определяется результатом обработки всех отсчетов, поступивших к этому шагу на вход анализатора. Ниже рассматривается последовательная процедура, при которой решение на каждом шаге определяется величиной наибольшего коэффициента правдоподобия, соответствующего одному из возможных моментов появления сигнала.

2. Описание процедуры

При поступлении очередного отсчета определяется коэффициент правдоподобия $\Lambda_{\max}^{(n)}$, соответствующий такому значению x , при котором имеющаяся совокупность отсчетов наиболее вероятна. Наличие сигнала фиксируется в том случае, если $\Lambda_{\max}^{(n)} \geq \Lambda_0$, где Λ_0 — заданная величина.

Коэффициент правдоподобия, соответствующий $x = r$, определяется выражением

$$\Delta_r^{(n)} = \prod_{j=r}^n \lambda(u_j), \quad (1)$$

где

$$\lambda(u_j) = \frac{P_1(u_j)}{P_0(u_j)}.$$

Используя последнее равенство, нетрудно убедиться в том, что величина $\Lambda_{\max}^{(n)}$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\Lambda_{\max}^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{\max}^{(n-1)} \lambda(u_n), & \Lambda_{\max}^{(n-1)} > 1 \\ \lambda(u_n), & \Lambda_{\max}^{(n-1)} < 1 \end{cases} \quad (2)$$

В процессе обработки вместо Λ_{\max} можно вычислить величину $x = \log \Lambda_{\max}$ и сравнивать ее с порогом $\log \Lambda_0$. В этом случае

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + l(u_n), & x^{(n-1)} > 0 \\ l(u_n), & x^{(n-1)} \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

где

$$l(u_n) = \log \lambda(u_n).$$

Если предварительно осуществляется бинарная дискретизация (квантование) отсчетов, то

$$l(u_n) = \begin{cases} \log \frac{p_1}{p_0}, & u_n \geq u_0 \\ \log \frac{1-p_1}{1-p_0}, & u_n < u_0 \end{cases} \quad (4)$$

где u_0 — уровень квантования, p_0 и p_1 — вероятности превышения уровня квантования u_0 соответственно отсчетом помехи и отсчетом смеси сигнала с помехой ($p_1 > p_0$).

Уровень квантования u_0 можно установить таким, чтобы выполнялось условие

$$\nu \log \frac{p_1}{p_0} = \mu \log \frac{1-p_1}{1-p_0},$$

где ν и μ — целые числа.

При этом, приняв наибольший общий делитель величин $\log \frac{p_1}{p_0}$ и $\log \frac{1-p_1}{1-p_0}$ за единицу измерения, формулу (4) можно записать в виде

$$l(u_n) = \begin{cases} \mu, & u_n \geq u_0 \\ -\nu, & u_n < u_0 \end{cases} \quad (5)$$

Из (3) и (5) получим следующий алгоритм обработки бинарно-квантованных отсчетов:

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + \mu, & u_n \geq u_0 \\ x^{(n-1)} - \nu, & u_n < u_0, \quad x^{(n-1)} > \nu \\ 0, & u_n < u_0, \quad x^{(n-1)} \leq \nu \end{cases} \quad (6)$$

3. Показатели эффективности

Эффективность рассматриваемого метода в первом приближении определяется средним числом \bar{n}_0 шагов между смежными ложными обнаружениями сигнала и средним числом \bar{n}_1 шагов между моментом появления сигнала и моментом его обнаружения.

Оценим величины \bar{n}_0 и \bar{n}_1 , предполагая, что осуществляется бинарное квантование отсчетов, а уровень квантования u_0 установлен таким образом, чтобы выполнялось равенство $p_1 = 1 - p_0$. Можно показать (3), что выполнение этого условия не приводит к заметному снижению эффективности процедур обнаружения бинарно-квантованных сигналов.

Если $p_1 = 1 - p_0$, то $v = \mu = 1$, и соотношение (6) записывается в виде

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + 1, & u_n \geq u_0 \\ x^{(n-1)} - 1, & u_n < u_0, x^{(n-1)} > 1 \\ 0, & u_n < u_0, x^{(n-1)} < 1. \end{cases} \quad (7)$$

В процессе анализа величина x может иметь следующие целочисленные значения: $0, 1, 2, \dots, k-1, k$ (при $x = k$ выдается решение о наличии сигнала). Среднее число $\bar{n}(z)$ шагов, необходимых для достижения этой величины значения k при исходном значении z , удовлетворяет уравнению (2)

$$\bar{n}(z) = p\bar{n}(z+1) + q\bar{n}(z-1) + 1, \quad (8)$$

где $p = p_1$ при наличии сигнала, $p = p_0$, если сигнал отсутствует, то $q = 1 - p$. При $z = k$ и $z = 0$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} \bar{n}(k) &= 0 \\ \bar{n}(0) &= q\bar{n}(0) + p\bar{n}(1) + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Решением уравнения (8) при граничных условиях (9) является функция

$$\bar{n}(z) = \frac{k-z}{p-q} + \frac{q}{(p-q)^2} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^k - \left(\frac{q}{p} \right)^z \right]. \quad (10)$$

Положив в (10) $p = p_0$ и $z = 0$, получим искомую величину \bar{n}_0

$$\bar{n}_0 = \frac{k}{p_0 - q_0} + \frac{q_0}{(p_0 - q_0)^2} \left[\left(\frac{q_0}{p_0} \right)^k - 1 \right]. \quad (11)$$

Величина \bar{n}_1 определяется формулой

$$\bar{n}_1 = \sum_{z=0}^{k-1} \bar{n}_1(z) P(z), \quad (12)$$

где $\bar{n}_1(z)$ — среднее число шагов, затрачиваемое на обнаружение сигнала, если к моменту его появления $x = z$,

$P(z)$ — вероятность того, что к моменту появления сигнала $x = z$.

Величина $\bar{n}_1(z)$ определяется равенством (10) при $p = p_1$. Вероятность $P(z)$ при $\lambda \gg 1$ и $0 < z < k-1$ удовлетворяет уравнению

$$P(z) = P(z-1)P_0 + P(z+1)q_0.$$

При $z = k-1$ и $z = 0$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} P(k-1), & p_0 = P(k), \\ P(0) &= P(0)q_0 + P(1)q_0 + P(k). \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее равенство учитывает, что состояние $x = 0$ может быть достигнуто, если на предшествующем шаге величина x имеет одно из следующих значений: $0, 1, k$ (ложное обнаружение сигнала, после которого принудительно устанавливается значение $x = 0$).

Поскольку $P(k) = \frac{1}{\bar{n}_0}$, где \bar{n}_0 — известная величина равенства (14) можно использовать в качестве граничных условий при решении уравнения (13). Это решение определяется формулой

$$P(z) = \frac{1}{\bar{n}_0(p_0 - q_0)} \left[1 - \left(\frac{q_0}{p_0} \right)^{k-z} \right]. \quad (15)$$

Подставив в (12) значения $\bar{n}_1(z)$ и $P(z)$, получим

$$\bar{n}_1 = \sum_{z=0}^{k-1} \frac{\left[1 - \left(\frac{q_0}{p_0}\right)^{k-z}\right] \left\{ \frac{k-z}{p_1 - q_1} + \frac{q_1}{(p_1 - q_1)^2} \left[\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^k - \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^z \right] \right\}}{k + \frac{q_0}{p_0 - q_0} \left[\left(\frac{q_0}{p_0}\right)^k - 1 \right]}. \quad (16)$$

Для рассматриваемой процедуры при необходимости можно методом разложения производящих функций на простые дроби 2 рассчитать законы распределения вероятностей величин n_0 и n_1 .

Вероятность того, что при исходном значении z величина x впервые достигнет значения k через n шагов, удовлетворяет уравнению ($n > 0$, $0 < z < k$)

$$P(z, n) = pP(z+1, n-1) + qP(z-1, n-1). \quad (17)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} P(z, 0) &= 0, \quad 0 \leq z < k, \\ P(k, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя соотношения (17) и (18), нетрудно показать, что производящая функция

$$U_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(z, n) s^n \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению ($0 < z < k$)

$$U_z(s) = p s U_{z+1}(s) + q s U_{z-1}(s) \quad (20)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} U_k(s) &= 1, \\ U_0(s) &= p s U_1(s) + q s U_0(s). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнения (20) определяется выражением

$$U_z(s) = \frac{(1-q) [e_1^z(s) - e_2^z(s)] - q s [e_1^{z-1}(s) - e_2^{z-1}(s)]}{(1-q) [e_1^k(s) - e_2^k(s)] - q s [e_1^{k-1}(s) - e_2^{k-1}(s)]}, \quad (22)$$

где

$$e_{1,2}(s) = \frac{1 \pm (1 - 4pq s^2)^{1/2}}{2s}.$$

Выражение (22) можно записать так [2]:

$$U_z(s) = \frac{f(s)}{\varphi(s)} = \sum_{(l)} \frac{\rho_l}{s_l - s}, \quad (23)$$

где $f(s)$ и $\varphi(s)$ — многочлены от s ,

s_l — корни многочлена $\varphi(s)$,

$$\rho_l = \frac{-f(s)}{\left[\frac{d\varphi(s)}{ds} \right]_{s=s_l}}. \quad (24)$$

При этом искомая вероятность $P(z, n)$ определяется формулой (2)

$$P(z, n) = \sum_{(l)} \frac{\rho_l}{s_l^{n+1}}. \quad (25)$$

При нахождении корней s_j и коэффициентов p_j можно воспользоваться следующим приемом [2]. Нетрудно убедиться в том, что знаменатель выражения (22) не имеет корней, модуль которых меньше величины $\frac{1}{2(pq)^{1/2}} \left(\text{это можно показать, используя подстановку } S = \frac{1}{2(pq)^{1/2} \cosh \theta} \right)$. Поэтому при отыскании корней s_j можно ввести новую независимую переменную θ , полагая

$$s = \frac{1}{2(pq)^{1/2} \cos \theta}. \quad (26)$$

При этом

$$U_z(s) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-z}{2}} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \sin(z+1)\theta - \sin z\theta}{\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \sin(k+1)\theta - \sin k\theta}. \quad (27)$$

Из (26) и (27) видно, что s_j определяется равенством

$$S_j = \frac{1}{2(pq)^{1/2} \cos \theta_j}, \quad (28)$$

где θ_j — корень уравнения

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \sin(k+1)\theta - \sin k\theta = 0. \quad (29)$$

Из (24) и (27) имеем

$$p_j = - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-z}{2}} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \sin(z+1)\theta_j - \sin z\theta_j}{\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} (k+1) \cos(k+1)\theta_j - k \cos k\theta_j\right] \left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{s=s_j}}, \quad (30)$$

где

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{s=s_j} = \frac{1}{\sin \theta_j} \frac{2(pq)^{1/2} \cos^2 \theta_j}{\sin \theta_j}.$$

Подставив значения S_j и p_j в (25), получим

$$P(z, n) = 2^n p^{\frac{n-k-z}{2}} q^{\frac{n-k+z}{2}} \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} \sin(z+1)\theta_j - \sin z\theta_j\right] \cos^{\alpha-1} \theta_j \sin \theta_j}{k \cos k\theta_j - \left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} (k+1) \cos(k+1)\theta_j} \quad (31)$$

Верхний предел индекса суммирования в формуле (31) равен $2k-1$, потому что уравнение (29) имеет $2(k+1)$ корней, причем корни $\theta=0$ и $\theta=2\pi$ являются также корнями числителя выражения (27) и должны быть исключены.

В заключение произведем сравнительную оценку эффективности рассматриваемого метода и серийной процедуры, при которой решение о на-

личии сигнала выдается, если γ подряд следующих отсчетов превышают уровень ограничения H_0 .

Среднее число шагов \bar{n}_0 между ложными обнаружениями при использовании серийной процедуры определяется формулой (2)

$$\bar{n}_0 = \frac{1 - p_0^{\gamma}}{q_0 p_0^{\gamma}}. \quad (32)$$

При оценке среднего числа \bar{n}_1 шагов до обнаружения сигнала необходимо учитывать возможность превышения уровня ограничения отсчетами помехи, предшествующими моменту появления сигнала.

Если после ложного обнаружения анализатор сбрасывается на нуль и в процессе дальнейшего анализа учитываются лишь отсчеты, поступающие в последующие моменты времени, то величина \bar{n}_1 определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 = & q_0 \bar{n}_{10} + q_0 p_0 \bar{n}_{11} + \dots + q_0 p_0^{\gamma-1} \bar{n}_{1,\gamma-1} + \\ & + q_0 p_0^{\gamma} \bar{n}_{10} + q_0 p_0^{\gamma+1} \bar{n}_{11} + \dots + q_0 p_0^{2\gamma-1} \bar{n}_{1,\gamma-1} + \dots, \end{aligned} \quad (33)$$

где \bar{n}_{1i} — среднее число шагов до обнаружения сигнала, если к моменту его появления имеется i подряд следующих отсчетов помехи, превысивших уровень ограничения. Выражение (33) можно привести к виду

$$\bar{n}_1 = \frac{q_0}{1 - p_0^{\gamma}} \sum_{i=0}^{\gamma-1} p_0^i \bar{n}_{1i}. \quad (34)$$

Величина \bar{n}_{10} при $i=0$ определяется формулой (2)

$$\bar{n}_{10} = \frac{1 - p_0^{\gamma}}{q_0 p_0^{\gamma}}. \quad (35)$$

При $1 \leq i < \gamma - 1$ имеет место равенство

$$\bar{n}_{1i} = q_i \bar{n}_{10} + p_i \bar{n}_{1,i+1} + 1. \quad (36)$$

Если $i = \gamma - 1$, то

$$\bar{n}_{1,\gamma-1} = q_{\gamma-1} \bar{n}_{10} + 1. \quad (37)$$

Решение уравнения (36) при условии (37) имеет вид

$$\bar{n}_{1i} = \frac{(1 - p_1^{\gamma-i})(1 + q_1 \bar{n}_{10})}{q_1}. \quad (38)$$

Подставив значение \bar{n}_{1i} в (35), окончательно получим

$$\bar{n}_1 = \frac{q_0}{q_0 p_0^{\gamma} (1 - p_0^{\gamma})} \left\{ 1 - p_0^{\gamma} + \left[\frac{p_0}{q_0} \left(1 - p_0^{\gamma-1} \right) - \frac{p_0 p_1 (p_1^{\gamma-1} - p_0^{\gamma-1})}{p_1 - p_0} \right] \right\}. \quad (39)$$

Результаты расчета величины \bar{n}_1 для рассматриваемого метода и серийной процедуры представлены в таблице.

$$\bar{N}_d = 10^4, p_0 = 1 - p_1$$

P_1	0,9	0,85	0,8	0,75
k	8	10	13	16
\bar{N}_1 рассм. метод	10	14	20	30
τ	8	10	11	13
\bar{N}_1 сериал. пров.	13	27	53	165

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Сов. радио», 1962.
2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964.
3. Н. Ф. Ключев. Обнаружение импульсных сигналов с помощью накопителей дискретного действия. Изд-во «Сов. радио», 1963.

ОПТИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫХОДНЫХ ЭФФЕКТОВ СИСТЕМЫ СЛЕДЯЩИХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

С. Е. Фалькович

В ряде практических приложений возникает задача оптимального использования выходных эффектов $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ системы независимых следящих измерителей, воспроизводящих результаты оценки некоторого процесса $\mu(t)$ или различных функционалов этого процесса. Под оптимальным использованием понимается образование оптимальной в известном смысле результирующей оценки измеряемого процесса $\mu(t)$. Практически возникают две различные задачи. Во-первых, выходные эффекты $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ следящих измерителей могут записываться (запоминаться) в течение некоторого длительного времени t (теоретически при $-\infty < t < \infty$), а затем обрабатываться. В этом случае при формировании результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ в произвольный момент времени t_0 принимаются во внимание как все предшествующие значения частных оценок $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$, так и все последующие. Во-вторых, может возникнуть задача непрерывного формирования результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ в текущий момент времени t_0 . При этом, естественно, используются только предшествующие значения выходных эффектов $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ следящих измерителей, и выходная функция вырабатывается по мере поступления входных данных, практически без разделения во времени. Рассмотрение первой и второй задач методом теории решений, используемым в настоящей работе, практически совпадает. Поэтому мы ограничимся изложением решения одной задачи — первой, а результаты решения распространим на вторую задачу. Приводимые результаты для непрерывных процессов можно распространять на дискретные.

1. Использование независимых оценок одного и того же процесса

Задача формулируется следующим образом. Имеется n независимых результатов измерения $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ процесса $\mu(t)$. Определены корреляционные функции

$$\rho_i(t_1; t_2) = \langle \varepsilon_i(t_1) \varepsilon_i(t_2) \rangle \quad (1)$$

ошибок $\varepsilon_i(t)$

$$\varepsilon_i(t) = \gamma_i(t) - \langle \gamma_i(t) \rangle \quad (2)$$

всех измерений. Здесь и в дальнейшем скобки вида $\langle \rangle$ означают операцию статистического усреднения. Полагаем, что случайные функции $\varepsilon_i(t)$ являются нормальными и независимыми при различных значениях индекса i ,

а также для простоты изложения, что частные оценки $\gamma_i(t)$ процесса $\mu(t)$ несмещенные ($\langle \gamma_i(t) \rangle = \mu(t)$).

Требуется по результатам измерений $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ на интервале $-\infty < t < \infty$ дать в произвольный момент времени t_0 оценку $\mu^*(t_0)$ процесса $\mu(t)$, обеспечивающую наименьшую дисперсию ошибки и именуемую в дальнейшем оптимальной оценкой, определить алгоритм получения оптимальной оценки $\mu^*(t_0)$ и ее корреляционную функцию

$$\rho(t_1; t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle; \quad z(t) = \mu^*(t) - \langle \mu^*(t) \rangle. \quad (3)$$

Принимая во внимание взаимную независимость процессов $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$, функционал правдоподобия, являющийся непрерывным аналогом условной плотности распределения вероятностей для случайных многомерных векторов $\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_n$, представляющих функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$, при условии реализации $\mu(t)$, можно записать в виде

$$P[\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t) | \mu(t)] = \\ = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(t_1) - \mu(t_1)] v_1(t_1; t_2) [\gamma_1(t_2) - \mu(t_2)] dt_1 dt_2 - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_n(t_1) - \mu(t_1)] v_n(t_1; t_2) [\gamma_n(t_2) - \mu(t_2)] dt_1 dt_2, \right. \quad (4)$$

где K — коэффициент, не зависящий от реализаций $\gamma_i(t)$ и $\mu(t)$, $v_i(t_1; t_2)$ — функция, которая является непрерывным аналогом элементов матрицы, обратной корреляционной, и определяется уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(t; t_1) v_i(t_1; t_2) dt_1 = \delta(t - t_2); \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

В большинстве практически интересных случаев апостериорное распределение функции $\mu(t)$ (точнее вектора $\vec{\mu}$, представляющего функцию $\mu(t)$), которое может быть получено, исходя из (4), существенно уже априорного распределения. Это объясняется тем, что априорная информация о $\mu(t)$ (или о $\vec{\mu}$) должна использоваться при получении частных оценок $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ (или $\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_n$), в результате чего рассеяние апостериорного распределения каждой из этих оценок должно быть меньше рассеяния априорного распределения $\vec{\mu}$. Последнее условие представляет собой условие целесообразности использования каждого измерителя. Дисперсия апостериорного распределения результирующей оценки, естественно, меньше наименьшей из дисперсий частных оценок. Поэтому с точностью, достаточной для технических приложений, можно считать, что функционал правдоподобия (4), во всяком случае в окрестности своего максимума, отличается от функционала апостериорного распределения для $\mu(t)$ на постоянный коэффициент. При этом, если принять во внимание симметрию функционала (4), то оценка по максимуму правдоподобия будет оптимальной при выборе любой симметричной функции потерь, в частности, квадратичной [1]. Таким образом, в рассматриваемом случае оценка по максимуму правдоподобия обеспечивает оптимальность оценки в довольно широком смысле и в том числе с точки зрения наименьшего рассеяния ошибок.

Выражение (4) является квадратичным функционалом $\mu(t)$. В силу принципа максимума правдоподобия в непрерывном случае мы должны приравнять нулю первую вариацию этого функционала или логарифма этого функционала. Проварьируем функцию $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \mu^*(t) + \varepsilon v(t), \quad (6)$$

где ε — малый параметр, $v(t)$ — произвольная функция, $\mu^*(t)$ — оценка максимума правдоподобия процесса $\mu(t)$. Принимая во внимание, что $v_i(t_2; t_1) = v_i(t_2; t_1)$ и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$, находим вариацию логарифма функционала (4) и приравниваем ее нулю

$$\begin{aligned} \log P[\gamma_{11}(t), \dots, \gamma_{nn}(t) | \mu(t)] - \log P[\gamma_{11}(t), \dots, \gamma_{nn}(t) | \mu^*(t)] = \\ = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} v(t_1) dt_1 \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_2; t_1) [\gamma_{ii}(t_2) - \mu^*(t_2)] dt_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $v(t)$ — произвольная функция, уравнение правдоподобия (7) преобразуется в

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu^*(t_2) \sum_{i=1}^n v_i(t_1; t_2) dt_2 = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_1; t_2) \gamma_{ii}(t_2) dt_2. \quad (8)$$

Введем функцию $W(t; t_1)$ такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(t; t_1) \sum_{i=1}^n v_i(t_2; t_1) dt_2 = \delta(t - t_1). \quad (9)$$

Тогда, умножая правую и левую части равенства (8) на $W(t_0; t_1)$ и интегрируя обе части по t_1 , получаем выражение для оптимальной оценки в произвольный момент времени

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t_0; t_1) v_i(t_2; t_1) \gamma_{ii}(t_2) dt_1 dt_2 \quad (10)$$

или

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t_0; t_2) \gamma_{ii}(t_2) dt_2, \quad (11)$$

где $h_i(t; t_2)$ — реакция i -го фильтра в момент времени t на воздействие $\delta(t - t_2)$, называемая импульсной реакцией

$$h_i(t; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t; t_1) v_i(t_2; t_1) dt_1. \quad (12)$$

Таким образом, оптимальная система получения результирующей оценки $\mu^*(t)$ является линейной и может быть представлена в виде схемы (рис. 1), состоящей из n -линейных четырехполюсников (фильтров) с импульсными реакциями $h_i(t; t_2)$ и из суммирующего устройства Σ .

Фильтры, полученные в настоящей задаче и определенные посредством (12), в соответствии с классификацией, предложенной в [2], называются фильтрами I типа. Такой фильтр реализуется обычно в виде счетно-решающего устройства.

В случае, когда должна формироваться текущая оценка $\mu^*(t_0)$ по результатам предшествующих измерений $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ на интервале $-\infty < t \leq t_0$ (вторая задача), промежуточные и конечные выражения решения получаются аналогичными, но пределы интегрирования $(-\infty, \infty)$, следует заменить на $(-\infty, t_0)$. Импульсные реакции фильтров $h_i(t; t_2)$ получаются равными (1), $t_2 \leq t_0$

$$h_i(t; t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t_0} W(t; t_1) v_i(t_1; t_2) dt_1 & \text{при } t \geq t_2 \\ 0 & \text{при } t < t_2 \end{cases} \quad (13)$$

Такой фильтр в [2] назван фильтром II типа. Фильтр II типа может быть осуществлен посредством реализуемых электрических фильтров, а также посредством счетно-решающих устройств. Заметим, что во второй задаче при варьировании на $\epsilon (-\infty, t_0)$, получится оптимальная оценка $\mu^*(t)$ для всего интервала $-\infty < t \leq t_0$. Однако оценки процесса $\mu(t)$ во все предшествующие моменты времени уже сделаны и исправлению не подлежат. Решение $\mu^*(t)$ используется только для получения оценки $\mu^*(t_0)$ в текущий момент времени.

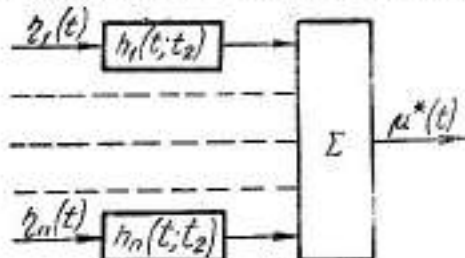


Рис. 1.

Корреляционная функция оптимальной результирующей оценки

$$p(t_1; t_2) = \langle [\mu^*(t_1) - \langle \mu^*(t_1) \rangle] [\mu^*(t_2) - \langle \mu^*(t_2) \rangle] \rangle, \quad (14)$$

с учетом, что

$$\mu^*(t) - \langle \mu^*(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t W(t; t_1) v_i(t_1; t_2) \varepsilon_i(t_2) dt_1 dt_2, \quad (15)$$

после простых преобразований получается равной функции $W(t_1; t_2)$

$$p(t_1; t_2) = W(t_1; t_2), \quad (16)$$

определенной посредством (9).

2. Использование независимых оценок различных функционалов одного и того же процесса

Положим теперь, что выходные эффекты независимых измерителей $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ представляют собой результаты измерения различных функционалов процесса $\mu(t); L^1[\mu(t)], \dots, L^n[\mu(t)]$ соответственно. Как и в предыдущем параграфе, ошибки всех измерителей полагаются нормальными, независимыми случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и с заданными корреляционными функциями $p_i(t_1; t_2)$. Нужно по результатам измерений $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ на интервале $-\infty < t < \infty$ (первая задача) или $-\infty < t < t_0$ (вторая задача) определить оптимальную систему получения результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ процесса $\mu(t)$ и корреляционную функцию $p(t_1; t_2)$ этой оценки.

Запишем функционал правдоподобия

$$\begin{aligned}
 & P[\eta_1(t), \dots, \eta_n(t) | \mu(t)] = \\
 & = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta_i(t_1) - L' \mu(t_1)] v_i(t_1; t_2) [\eta_i(t_2) - L' \mu(t_2)] dt_1 dt_2 = \right. \\
 & = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_i(t_1) v_i(t_1; t_2) \eta_i(t_2) dt_1 dt_2 + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L' [\mu(t_1)] \times \right. \\
 & \left. \times v_i(t_1; t_2) \eta_i(t_2) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L' [\mu(t_1)] v_i(t_1; t_2) L' [\mu(t_2)] dt_1 dt_2 \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Далее введем сопряженные операторы \bar{L}'_{t_1} и \bar{L}'_{t_2} , удовлетворяющие уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_1; t_2) L' [\mu(t_2)] dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}'_{t_2} [v_i(t_1; t_2)] \mu(t_2) dt_2 \quad (18)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_1; t_2) L' [\mu(t_1)] dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}'_{t_1} [v_i(t_1; t_2)] \mu(t_1) dt_1. \quad (19)$$

Тогда функционал (17) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 P[\eta_1(t), \dots, \eta_n(t) | \mu(t)] = & K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_i(t_1) v_i(t_1; t_2) \eta_i(t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t_1) \bar{L}'_{t_1} [v_i(t_1; t_2)] \eta_i(t_2) dt_1 dt_2 - \\
 & \left. - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t_1) \bar{L}'_{t_1} \bar{L}'_{t_2} [v_i(t_1; t_2)] \mu(t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

после чего применение принципа максимума правдоподобия аналогично тому, как это было сделано при выводе (8), приводит к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu^*(t_2) \sum_{i=1}^n \bar{L}'_{t_1} \bar{L}'_{t_2} [v_i(t_1; t_2)] dt_2 = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}'_{t_1} [v_i(t_1; t_2)] \eta_i(t_2) dt_2. \quad (21)$$

Подставляя в левую и правую части (21) функцию $\bar{W}(t_0; t_1)$, определенную уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(t_0; t_1) \sum_{i=1}^n \bar{L}'_{t_1} \bar{L}'_{t_2} [v_i(t_1; t_2)] dt_1 = \delta(t_0 - t_2), \quad (22)$$

и, интегрируя обе части по t_1 , получаем выражение для оптимальной оценки $\mu^*(t_0)$ в произвольный момент времени t_0

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(t_0; t_1) \bar{L}'_{t_1} [v_i(t_1; t_2)] \eta_i(t_2) dt_1 dt_2. \quad (23)$$

которое можно также привести к виду (11), (промоделированному посредством рис. 1), если импульсные реакции фильтров $h_i(t; t_2)$ определить следующим образом:

$$h_i(t; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(t; t_1) \bar{L}_i^T [v_i(t_1; t_2)] dt_1, \quad (24)$$

В практических задачах наиболее часто встречаются дифференциальные операторы L^i

$$L^i [\mu(t)] = \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k}{dt^k} \mu(t), \quad (25)$$

где a_0, \dots, a_m — в общем случае функции t . Сопряженный оператор [3]

$$\bar{L}_i^T [v_i(t_1; t_2)] = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dt_1^k} a_k v_i(t_1; t_2). \quad (26)$$

В случае интегрального оператора с ядром $k(\tau; t)$

$$L^i [\mu(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau; t) \mu(\tau) d\tau \quad (27)$$

сопряженный оператор также получается интегральным, но с транспонированным ядром

$$\bar{L}_i^T [v_i(t_1; t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(t; \tau) v_i(\tau; t_2) d\tau. \quad (28)$$

При формировании текущей оценки $\mu^*(t_0)$ по результатам предшествующих измерений (вторая задача) пределы интегрирования в выражениях (5), (22), (23) и (11), определяющих решение, следует заменить на $(-\infty, t_0)$, а импульсные реакции фильтров (рис. 1) при $t, t_2 < t_0$ должны быть

$$h_i(t; t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t_2} \bar{W}(t; t_1) \bar{L}_i^T [v_i(t_1; t_2)] dt_1 & \text{при } t < t_2 \\ 0 & \text{при } t > t_2 \end{cases} \quad (29)$$

Расчет корреляционной функции (14) оптимальной результирующей оценки $\mu^*(t)$ дает

$$\rho(t_1; t_2) = \bar{W}(t_1; t_2), \quad (30)$$

где $\bar{W}(t_1; t_2)$ — функция, определенная посредством (22).

3. Некоторые практические приложения

В качестве первого примера определим оптимальную систему получения результирующей оценки $\mu^*(t)$, когда выходные процессы $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ представляют результат измерений процесса $\mu(t)$ и $n-1$ его производных соответственно. На основании (24), (26) и (22) характеристики фильтров оптимальной схемы (рис. 1) равны

$$h_i(t; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(t; t_1) (-1)^{i-1} \frac{\partial^{i-1}}{\partial t_1^{i-1}} v_i(t_1; t_2) dt_1; \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $\bar{W}(t; t_1)$ — определяется из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(t; t_1) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2(i-1)}}{\partial t_1^{i-1} \partial t_2^{i-1}} v_i(t_1; t_2) dt_1 = \delta(t - t_2),$$

а $v_i(t_1; t_2)$, как и во всех других случаях, непрерывный аналог матрицы, обратной корреляционной (5).

Рассмотрим далее случай, когда все следящие измерители дают непосредственно оценку параметра $p(t)$, а ошибки $\xi_i(t)$ представляют собой стационарные случайные процессы с корреляционными функциями $\rho_i(t_1 - t_2)$.

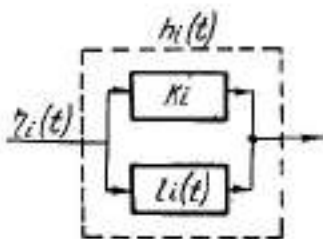


Рис. 2.

При этом интегралы (5), (9), (10) и (11) преобразуются в свертки соответствующих функций. Обозначая энергетические спектры ошибок символом $G_i(f)$

$$G_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(t) e^{-i\omega t} dt,$$

находим выражения для корреляционной функции оптимальной результирующей оценки

$$\rho(t) = \bar{W}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n G_i^{-1}(f)} e^{i\omega t} df$$

и для импульсных реакций оптимальных фильтров

$$h_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_i^{-1}(f)}{\sum_{i=1}^n G_i^{-1}(f)} e^{i\omega t} df.$$

Для иллюстрации зададим конкретный вид корреляционных функций

$$\rho_i(t) = \frac{\sigma_i^2}{2\tau_i} \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_i}\right).$$

Тогда

$$G_i(f) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{\tau_i}{\sigma_i^2} (2\pi f)^2},$$

$$\rho(t) = \bar{W}(t) = \frac{\sigma_i^2}{2\tau_i} \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_i}\right),$$

где

$$\frac{1}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}; \quad \tau_i = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$h_i(t) = \frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma_{\eta}^2} \delta(t) + \frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma_{\eta}^2} \left(1 - \frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma_{\eta}^2}\right) \frac{1}{2\sigma_{\eta}^2} \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_{\eta}}\right).$$

Таким образом, каждый канал оптимальной системы должен состоять из двух элементов, включенных параллельно (рис. 2): из безынерционного усилителя k_i , усиливающего в $\frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma_{\eta}^2}$ раз, и из инерционного элемента с импульсной реакцией $I_i(t)$, определяемой вторым слагаемым последнего выражения.

ВЫВОДЫ

Приведено решение задачи определения оптимальной системы получения оценки некоторого процесса $\mu(t)$ по n независимым результатам измерения различных функционалов этого процесса. Рассмотрение ведется методом теории решений и сводится к применению принципа максимума правдоподобия к функционалу от оцениваемого процесса $\mu(t)$. Результаты получены применительно к двум задачам: к задаче получения оценки процесса $\mu(t)$ в произвольный момент времени по результатам измерений на достаточно большом интервале (теоретически $-\infty < t < \infty$), а также к задаче получения оценки процесса в текущий момент времени t_0 по результатам предшествующих измерений на интервале $(-\infty < t \leq t_0)$. Рассчитаны корреляционные функции оптимальных результирующих оценок. Полученные решения проиллюстрированы примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Бакут и др. Вопросы статистической теории радиолокации, том II, Изд-во «Сов. радио», 1964.
2. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубяков. Выделение сигналов на фоне случайных шумов. Изд-во «Сов. радио», 1960.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, том I, Гостехиздат, 1951.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ РАЗРЕШЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ

Ю. А. Мельник

В последние годы на смену радиолокационным станциям (РЛС), осуществляющим обзор земной поверхности без учета фазы отраженной волны, приходят радиолокационные системы, в которых для получения высокой разрешающей способности производится когерентная обработка сигналов [2]. Такие системы можно использовать только при относительном перемещении цели и РЛС. Благодаря тому, что расстояние до цели в процессе радиолокационного наблюдения меняется, принимаемый отраженный сигнал приобретает фазовую модуляцию, параметры которой зависят от положения целей относительно траектории движения РЛС. Использование согласованного фильтра, настроенного на определенный закон изменения фазы, позволяет выделить сигнал заданной цели; набор фильтров обеспечивает разрешающую способность по параметрам движения.

Наметим методику оценки разрешающей способности когерентных радиолокационных систем обзора поверхности при возможно более общих исходных условиях.

§ 1. Разрешаемый фазовый набег

Полагаем, что передающая часть РЛС излучает высокочастотные колебания с длиной волны λ и создает в некоторой области пространства стационарное электромагнитное поле.

С помощью приемного устройства принимаются отраженные сигналы цели. Передатчик и приемник в общем случае могут быть разнесены, однако расстояние между ними сохраняется неизменным. Расположению одиночной цели в каждой точке рассматриваемого пространства соответствует определенная фаза φ отраженного сигнала в приемном устройстве (рис. 1а). Зона действия РЛС представляет собой поле скалярной функции φ . Поскольку расстояние между передатчиком и приемником не меняется, а частота излучаемых колебаний постоянна, это поле стационарно.

Далее полагаем, что в скалярном поле функции φ задана траектория движения некоторой точечной цели. Поскольку все кинематические параметры движения цели заданы, закон изменения сигнала на наблюдаемом участке траектории известен. После фазового детектирования сигнал цели может быть представлен двумя ортогональными составляющими в видеотракте

$$U_c(t) = U_0(t) \cos \varphi_0(t), \quad (1a)$$

$$U_s(t) = U_0(t) \sin \varphi_0(t), \quad (1b)$$

где $U_0(t)$ — закон изменения амплитуды,

$\varphi_0(t)$ — закон изменения фазы сигнала.

Полагаем, что для выделения составляющей (1а) сигнала ($U_e(t)$ на рис. 1б) построен оптимальный фильтр. Напряжение на выходе фильтра пропорционально величине

$$Q_{\text{ср}}(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} U_0(t) \cos \varphi_0(t) U_0(t) \cos \varphi_1(t) dt. \quad (2)$$

Исследуем максимальное значение этого напряжения как функцию времени накопления сигнала T . Для упрощения задачи будем считать, что амплитуда сигнала постоянна $U_0(t) = U_0 \cos \omega t$. В отношении закона изменения фазы введем лишь одно ограничение: пределы изменения фазы ($\varphi_1 - \varphi_0$ на рис. 2а) за время накопления T составляют много периодов.

Выражение для выходного напряжения оптимального фильтра в конце интервала накопления

$$Q_{\text{ср}}(T) = U_0^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \varphi_0(t) dt \quad (3)$$

может быть преобразовано

$$Q_{\text{ср}}(T) = \frac{U_0^2}{2} T - \frac{U_0^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2\varphi_0(t) dt. \quad (4)$$

Из рассмотрения формулы (4) следует, что при накоплении сигнала за много периодов изменения фазы $\varphi_0(t)$ выходное напряжение фильтра определяется в основном первым членом, пропорциональным времени интегрирования T ; второй, колебательный член изменяется в ограниченных пределах (рис. 2б).

Таким образом, при изменении фазы сигнала на много периодов максимальное напряжение на выходе согласованного фильтра пропорционально времени накопления и практически не зависит от закона изменения фазы

$$Q_{\text{ср}}(T) \approx \frac{U_0^2}{2} T. \quad (5)$$

Определим, теперь, как зависит выходное напряжение фильтра от времени накопления, если действительный закон изменения фазы сигнала $\varphi(t)$ отличается от заданного $\varphi_0(t)$, на который настроен фильтр (рис. 2а). В общем случае это различие может быть произвольным, однако мы ограничим класс функций $\varphi(t)$. Будем считать, что кривые $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ различаются мало и функция

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t) \quad (6)$$

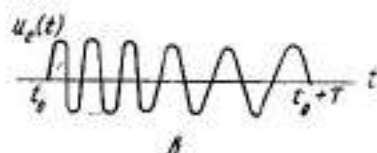
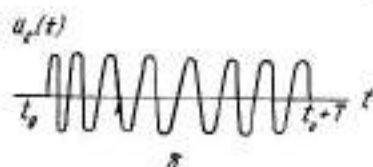
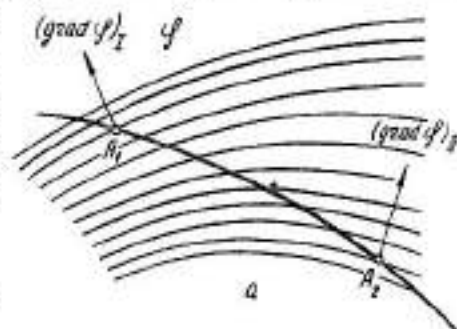


Рис. 1.

в интервале $t_0 \rightarrow t_0 + T$ близка к линейной. Изменение этой функции за время накопления сигнала будем называть в дальнейшем фазовым набегом $\Delta\varphi$.

Выходное напряжение расстроенного фильтра в конце интервала накопления (рис. 26)

$$Q_c(T) = \frac{U_0^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \varphi_0(t) \cos [\varphi_0(t) + \Delta\varphi(t)] dt \quad (7)$$

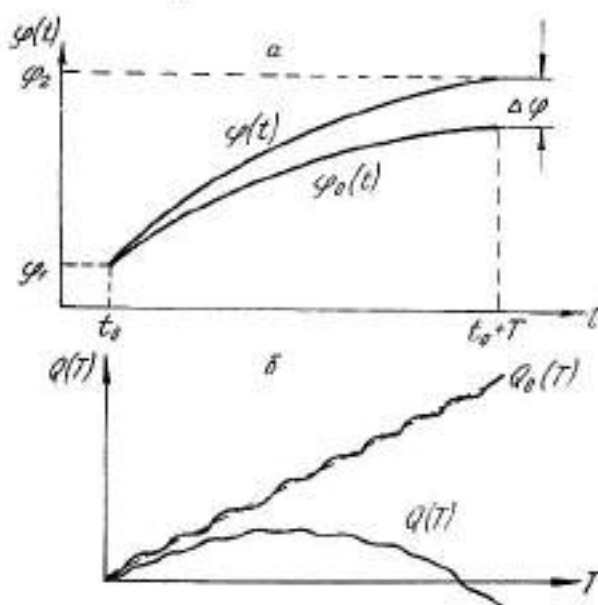


Рис. 2

вновь может быть представлено в виде двух слагаемых

$$Q_c(T) = \frac{U_0^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \Delta\varphi(t) dt + \frac{U_0^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos [2\varphi_0(t) + \Delta\varphi(t)] dt. \quad (8)$$

При принятом выше предположении, согласно которому интервалу T соответствует много периодов изменения фазы $\varphi_0(t)$, существенную величину выходного напряжения фильтра может выразить только первое слагаемое. Вторым, колебательным, членом в первом приближении можно пренебречь. Тогда выходное напряжение расстроенного фильтра может быть представлено

$$Q_c(T) \approx \frac{U_0^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \Delta\varphi(t) dt. \quad (9)$$

Воспользовавшись сделанным выше предположением в отношении рассматриваемого класса функций $\varphi(t)$, заменим $\Delta\varphi(t)$ приближенно линейной функцией

$$\Delta\varphi(t) = \frac{2\pi}{T_0} t + \Phi_0, \quad (10)$$

где T_0 — постоянная,

Φ_0 — произвольная начальная фаза.

Тогда, полагая нижний предел интегрирования в формуле (9) $t_0 = 0$, получаем выражение для выходного напряжения расстроенного фильтра

$$Q_1(T) = \frac{U_0^2}{2} \frac{T_0}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} T + \Phi_0\right) - \sin \Phi_0 \right]. \quad (11a)$$

Аналогичным выражением определяется выходное напряжение другого фильтра, согласованного с сигналом

$$Q_2(T) = -\frac{U_0^2}{2} \frac{T_0}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T_0} T + \Phi_0\right) - \cos \Phi_0 \right]. \quad (11b)$$

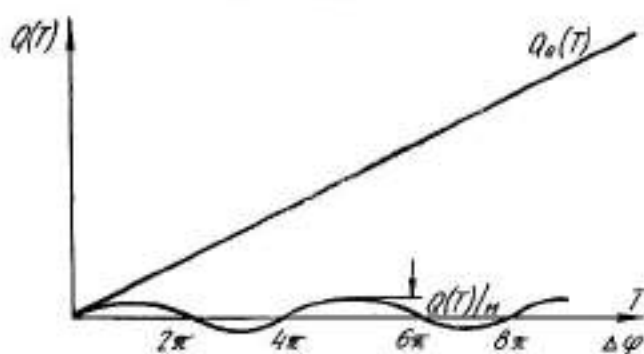


Рис. 3.

Выходной эффект оптимальной системы обработки сигнала с произвольной начальной фазой, как известно [1], определяется выражением

$$Q(T) = \sqrt{Q_1^2(T) + Q_2^2(T)}$$

и в нашем случае составит

$$Q(T) = \frac{U_0^2}{2} \frac{T_0}{\pi} \sin \frac{\pi}{T_0} T. \quad (12)$$

Для того, чтобы оценить, как фильтр ослабляет сигнал, если закон его изменения отличается от заданного, найдем отношения величины $Q(T)$ к ее максимальному значению $Q_0(T)$ при $\Delta\varphi = 0$ и $Q_1(T) = Q_2(T) = \frac{U_0^2}{2} T$

$$\frac{Q(T)}{Q_0(T)} = \frac{\sin \frac{\pi}{T_0} T}{\sqrt{2} \frac{\pi}{T_0} T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}. \quad (13)$$

Необходимо заметить, что при фазовом набеге $\Delta\varphi$, превышающем π , для характеристики подавления сигнала расстроенным фильтром правильнее пользоваться максимальными значениями выражения (12), полагая $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 1$. Действительно, формула (12) определяет выходное напряжение фильтра в момент окончания интервала накопления, когда весь сигнал «сходит» в фильтр. При $\Delta\varphi = 2\pi$ или $\Delta\varphi = 2n\pi$ (n — целое число) это напряжение близко к нулю. Однако выходное напряжение может приобретать большие значения в некоторые промежуточные моменты времени, когда накапливаемый сигнал входит в фильтр лишь частично, а фазовый набег составляет π или $(2n + 1)\pi$.

Таким образом, соотношение между полезным и мешающими сигналами на выходе фильтра (рис. 3) с точностью до постоянного множителя равно набегу фазы за время накопления

$$\frac{Q(T)}{Q_s(T)} \Big|_M = \frac{V\sqrt{2}}{\Delta\varphi}. \quad (14)$$

Теперь остается выбрать разрешаемое значение фазового набегу, которое является величиной условной, зависящей от допускаемого соотношения помеха/сигнал. Если, например, полагать, что входной сигнал отсутствует, когда его напряжение на выходе фильтра в $\frac{4\pi}{V\sqrt{2}} \approx 4,4$ раза меньше, чем для согласованного сигнала, то фазовый набег за время накопления должен составить 4π . Примем эту величину в качестве разрешаемого значения фазового набегу

$$\Delta\psi = 4\pi.$$

Можно показать, что полученные соотношения в первом приближении справедливы для значительно более широкого класса функций, чем это было принято при выводе.

§ 2. Относительное разрешение

Фазовый набег является функцией целого ряда параметров движения цели. Разрешающая способность по каждому из этих параметров определяется таким его приращением, при котором фазовый набег составляет принятую величину $\Delta\psi$. Если изменение некоторого параметра движения цели α на $\Delta\alpha$ приводит к фазовому набегу $\Delta\psi$, то величина $\Delta\alpha$ характеризует разрешающую способность системы по этому параметру. Появление двух целей с параметром α , отличающимся на $\Delta\alpha$, вызовет эффект на выходе смежных фильтров, воспринимаемый как результат наличия двух целей.

Например, можно определить разрешающую способность системы по скорости движения цели v . Пусть оптимальный фильтр рассчитан на выделение сигнала цели, движущейся на участке наблюдения с постоянной скоростью v . Изменение скорости цели приведет к изменению формы сигнала в интервале $t_0 \rightarrow t_0 + T$ (см. рис. 1в). Если фазовый набег при этом будет равен разрешаемому ($\Delta\varphi = \Delta\psi$), то соответствующее изменение скорости Δv определит разрешающую способность по скорости. Сигналы двух целей могут быть выделены раздельно двумя фильтрами, если их скорости различаются не менее, чем на Δv .

Для суждения о разрешающей способности когерентных радиолокационных систем по геометрическим параметрам траектории возвратимся к рассмотрению скалярного поля функции φ .

Полагаем, что в точке цели A (рис. 4а) задано некоторое направление в виде единичного вектора \vec{l} , фиксированного относительно множества неподвижных отражающих точек. Точки целей и вектор \vec{l} перемещаются в системе координат, связанной с РЛС; в начале (A_1) и в конце (A_2) участка накопления сигнала вектор \vec{l} занимает положения \vec{l}_1 и \vec{l}_2 . Изменение фазы отраженного сигнала цели A за время наблюдения происходит монотонно.

Требуется определить, на каком минимальном расстоянии от цели A в направлении \vec{l} может быть расположена вторая отражающая точка B , сигнал которой выделяется радиолокационной системой как сигнал новой цели.

Как было показано выше, сигналы целей A и B выделяются раздельно, если за время наблюдения T между законами изменения их фазы накапливался разрешаемый фазовый набег $\Delta\psi$. Поскольку поле функции φ потенциально, условием разрешения будет

$$\Delta\psi = (\varphi_{A_1} - \varphi_{A_2}) - (\varphi_{B_1} - \varphi_{B_2}), \quad (15)$$

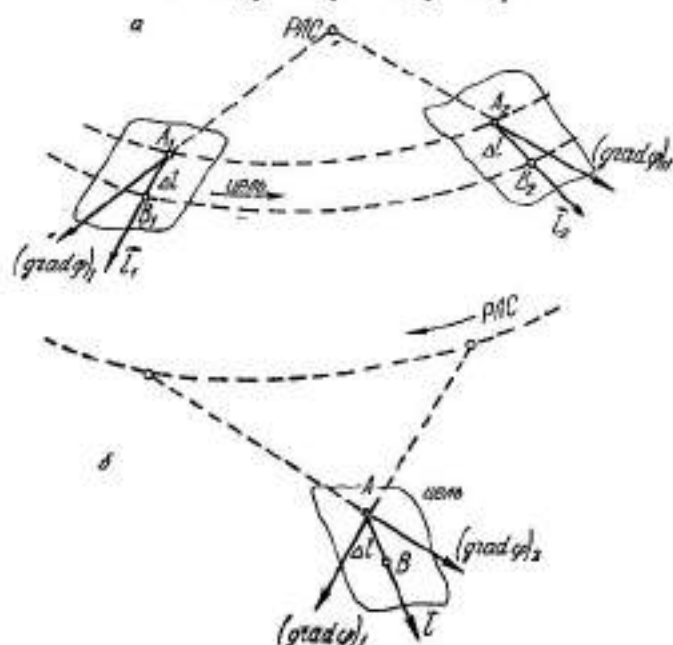


Рис. 4.

где φ_{A_1} , φ_{A_2} , φ_{B_1} , φ_{B_2} — значения фазы в точках A_1 , A_2 , B_1 , B_2 соответственно.

Переписав выражение (15)

$$\Delta\psi = (\varphi_{A_1} - \varphi_{B_1}) - (\varphi_{A_2} - \varphi_{B_2}), \quad (16)$$

замечаем, что вследствие близости разрешаемых точек выражения в скобках могут быть представлены в виде скалярных произведений градиента функции φ в точках A_1 и A_2 и малых векторов $\Delta\vec{l}_1$, $\Delta\vec{l}_2$, определяющих расстояние между наблюдаемыми точками

$$\Delta\psi = (\text{grad } \varphi)_{11} \Delta\vec{l}_2 - (\text{grad } \varphi)_{12} \Delta\vec{l}_1, \quad (17)$$

Умножим обе части формулы (17) на величину $\frac{\lambda}{\Delta\psi \Delta l}$. Полученное отношение

$$\frac{\lambda}{\Delta l} = \frac{\lambda}{\Delta\psi} [(\text{grad } \varphi)_{11} \vec{l}_2 - (\text{grad } \varphi)_{12} \vec{l}_1] \quad (18)$$

назовем относительным разрешением системы в направлении \vec{l} . Аналогичное выражение может быть получено при использовании системы координат, связанной с целью (рис. 4б)

$$\frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\Delta \varphi} [(\text{grad } \varphi)_2 - (\text{grad } \varphi)_1] \vec{l}. \quad (19)$$

Здесь $(\text{grad } \varphi)_1$ и $(\text{grad } \varphi)_2$ — значения градиента функции φ в точке A для начального и конечного положений РЛС, выраженные в системе координат, связанной с целью.

Множители \vec{l} в формуле (19) одинаковы, поэтому вследствие дистрибутивности скалярного произведения выражение (19) можно переписать:

$$\frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\Delta \varphi} [(\text{grad } \varphi)_2 - (\text{grad } \varphi)_1] \vec{l}. \quad (20)$$

В частном случае, представляющем наибольший практический интерес, приемник и передатчик РЛС совмещены. При этом

$$\text{grad } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\vec{r}, \quad (21)$$

где \vec{r} — единичный вектор в направлении РЛС — цель. Тогда, если $\Delta \varphi = 4\pi$, формула для относительного разрешения приобретает вид

$$\frac{\lambda}{\Delta t} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \vec{l}. \quad (22)$$

Аналогичные формулы могут быть получены для более сложных систем.

§ 3. Сложение относительных разрешений

Одним из условий, принятых при выводе формул для относительного разрешения, является монотонность изменения фазы вдоль наблюдаемого участка траектории. Определим разрешающую способность в более общем случае, при произвольной форме наблюдаемого участка траектории.

Предположим, что наблюдение за целью производится на двух участках траектории: 1—2 и 3—4 (рис. 5); на каждом из них фаза изменяется монотонно. Требуется определить относительное разрешение системы.

Минимальное расстояние Δl между точками A и B для раздельного выделения их сигналов должно быть таким, чтобы фазовый набег за время наблюдения этих целей составил $\Delta \varphi$. Условие разрешения может быть записано так:

$$\Delta \varphi = (\varphi_{A_1} - \varphi_{A_2}) + (\varphi_{A_3} - \varphi_{A_4}) - (\varphi_{B_1} - \varphi_{B_2}) + (\varphi_{B_3} - \varphi_{B_4}).$$

После перестановки слагаемых

$$\Delta \varphi = (\varphi_{A_1} - \varphi_{B_1}) - (\varphi_{A_2} - \varphi_{B_2}) + (\varphi_{A_3} - \varphi_{B_3}) - (\varphi_{A_4} - \varphi_{B_4}).$$

Заменяя выражения в скобках соответствующими скалярными произведениями

$$\Delta \varphi = (\text{grad } \varphi)_{11} \vec{l}_1 \Delta l - (\text{grad } \varphi)_{12} \vec{l}_2 \Delta l + (\text{grad } \varphi)_{33} \vec{l}_3 \Delta l - (\text{grad } \varphi)_{34} \vec{l}_4 \Delta l$$

и переходя к относительному разрешению, получаем

$$\frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\Delta \varphi} [(\text{grad } \varphi)_{11} \vec{l}_1 - (\text{grad } \varphi)_{12} \vec{l}_2] + \frac{\lambda}{\Delta \varphi} [(\text{grad } \varphi)_{33} \vec{l}_3 - (\text{grad } \varphi)_{34} \vec{l}_4]. \quad (23)$$

Два слагаемых в правой части выражения (23) совпадают с формулой для относительного разрешения $\frac{\lambda}{\Delta l_{12}}$ и $\frac{\lambda}{\Delta l_{34}}$ на каждом из отдельных участков траектории. Поэтому из выражения (23) следует

$$\frac{\lambda}{\Delta l} = \frac{\lambda}{\Delta l_{12}} + \frac{\lambda}{\Delta l_{34}} \quad (24)$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Относительное разрешение при наблюдении цели на двух участках траектории равняется сумме относительных разрешений, полученных при наблюдении каждого из участков отдельно.

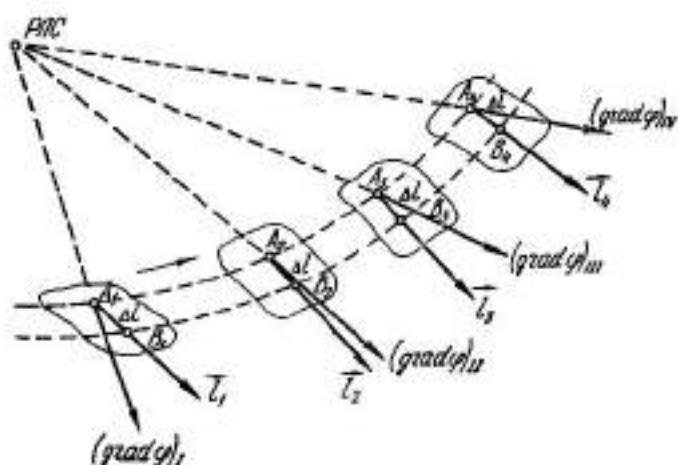


Рис. 5.

Пользуясь теоремой о сложении относительных разрешений, можно определить разрешающую способность системы при любом законе движения цели. Для этого всю наблюдаемую траекторию нужно разбить на участки, в пределах каждого из которых фаза изменяется монотонно. Вычислив относительные разрешения для этих участков и просуммировав их, можно определить относительное разрешение при накоплении сигнала на всей наблюдаемой траектории.

В заключение рассмотрим одно из следований теоремы о сложении относительных разрешений.

Предельное значение относительного разрешения, которое может быть получено при наблюдении цели на участке траектории с монотонным изменением фазы, составляет 1. Действительно, пусть, например, РЛС перемещается по прямой из бесконечности в точку, ближайшую к цели. Тогда единичные векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 в формуле (21) перпендикулярны и их проекция на направление движения равна единице, т. е.

$\frac{\lambda}{\Delta l} \Big|_{\text{л}} = 1$. В соответствии с выражением (24) предельное значение относительного разрешения при наблюдении цели на двух участках траектории, на которых фаза изменяется монотонно в противоположных направ-

лениях, должно быть в два раза больше: $\frac{i}{\Delta T} \Big|_M = 2$. В указанном примере это соответствует случаю, когда наблюдение за целью продолжается, пока она вновь не удалится в бесконечность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман, В. Н. Голяков, Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Сов. радио», 1963.
2. Катрона, Холл. Сравнение различных способов достижения высокой азимутальной разрешающей способности. «Зарубежная радиоэлектроника», 1964, № 2.

ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ

Э. Н. Хомяков

1. Состояние вопроса. Задачи линейной фильтрации достаточно широко представлены в литературе. В особенности подробно изучены вопросы выделения стационарных процессов, в том числе и векторных [1]. В ряде случаев выделяемые функции нельзя отнести к классу стационарных, в то время как их некоторая производная уже обладает стационарными свойствами. К таким процессам относятся, например, интегралы от стационарного белого шума, получившие название винеровских. Показано [2], что при полубесконечном интервале наблюдения для них существуют предельные операторы сглаживания, реализуемые цепями с постоянными параметрами. В [3] с помощью спектрального метода А. М. Яглома и С. Дарлингтона найдены эти операторы для нескольких интересных случаев. В настоящей работе для винеровских процессов, наблюдаемых на конечном интервале, синтезируются динамические фильтры в канонической форме Калмана [4]. Рассматриваемые задачи возникают, в частности, при синтезе оптимальных радиолокационных измерителей, работающих по маневрирующим целям.

2. Постановка задачи и методы решения. Пусть на интервале $t \in (0, t)$ наблюдается аддитивная смесь

$$\vec{z}(t) = \vec{w}(t) + \vec{n}(t), \quad (2.1)$$

где

$\vec{w}(t)$ — винеровский векторный процесс,

$\vec{n}(t)$ — вектор белых шумов, причем

$$\overline{\vec{w}(t)} = \overline{\vec{n}(t)} = 0; \quad \overline{\vec{n}(t_1) \vec{n}(t_2)^+} = N \delta(t_1 - t_2). \quad (2.2)$$

Здесь символ «+» означает транспонирование.

Требуется построить систему для нахождения оценки $\hat{\vec{w}}(t)$ процесса $\vec{w}(t)$, обладающую свойством

$$\| \overline{\vec{w}(t) - \hat{\vec{w}}(t)} \|^2 = \min_{\hat{\vec{w}}(t)} \quad (2.3)$$

Мы рассматриваем линейную задачу, когда оператор фильтрации представляется в виде

$$\hat{\vec{w}}(t) = \int_0^t A(t, \tau) \vec{z}(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где

$A(t, \tau)$ — матрица переходных характеристик.

Для гауссовых статистик $\vec{w}(t)$ и $\vec{n}(t)$ доказано [2], что оператор (2.4) является оптимальным в классе всех возможных операторов.

Известно, что искомая матрица $A(t, \tau)$ должна удовлетворять интегрально-матричному уравнению Винера—Хопфа

$$\int_0^t A(t, \tau) R_{z\bar{z}}(\tau, \sigma) d\tau = R_{z\bar{w}}(t, \sigma), \quad (2.5)$$

где

$$R_{z\bar{z}}(\tau, \sigma) = \overline{\vec{z}(\tau) \vec{z}(\sigma)^+}; \quad R_{z\bar{w}}(\tau, \sigma) = \overline{\vec{z}(\tau) \vec{w}(\sigma)^+}, \quad (2.6)$$

$\vec{z}(t)$ — вектор — столбец компонент входной смеси,

$\vec{z}(t)$ — вектор-строка.

Заметим теперь, что винеровский процесс может быть представлен как выходной сигнал некоторой динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = F\vec{w}(t) + I\vec{m}(t), \quad (2.7)$$

где

$$\vec{m}(t) \text{ — вектор белого шума } \begin{pmatrix} m(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица

$$\overline{m(t_1) m(t_2)} = M_0 \delta(t_1 - t_2),$$

$$F = \begin{pmatrix} 000 \dots 0 \\ 100 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 10 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Иначе говоря, процесс $\vec{w}(t)$ допускает

$$\vec{w}(t) = \Phi(t, 0) \vec{w}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) I \vec{m}(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

если

$\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица для (2.7).

В нашем случае она имеет вид

$$\Phi(t - \tau) = \begin{pmatrix} 100 \dots 0 \\ (t - \tau)10 \dots 0 \\ \frac{(t - \tau)^2}{2}(t - \tau)1 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{(t - \tau)^k}{k!} \dots \dots \dots 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ядро уравнения (2.5) для процессов (2.7) с учетом их независимости от белого шума имеет вид

$$R_{zz}(t_1, t_2) = M_0 \delta(t_1 - t_2) + \begin{cases} \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \Phi^+(t_2, \tau) d\tau, & t_2 > t_1, \\ \int_0^{t_2} \Phi(t_1, \tau) \Phi^+(t_2, \tau) d\tau, & t_2 < t_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Для рассматриваемых ниже случаев получаем

$$R_{zz}(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\} M; \quad (2.12)$$

$$R_{zz}^{-1}(t_1, t_2) = M \begin{cases} \left\| \begin{array}{cc} t_1 & \frac{t_1(t_1 - 2t_2)}{2} \\ -\frac{t_1}{2} & \frac{t_1^2(3t_2 - t_1)}{6} \end{array} \right\|, & t_1 < t_2; \\ \left\| \begin{array}{cc} t_2 & -\frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2(t_2 - 2t_1)}{2} & \frac{t_2^2(3t_1 - t_2)}{6} \end{array} \right\|, & t_1 > t_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Сущность метода Калмана заключается в том, что уравнение Винера — Хопфа не решается непосредственно, но рядом несложных преобразований сводится к некоторому дифференциальному уравнению. Решение последнего содержит всю информацию о структуре и потенциальных возможностях фильтрующей системы.

Искомый фильтр в канонической форме представляет собой динамическую систему с обратной связью

$$\frac{d\hat{w}(t)}{dt} = F \hat{w}(t) + K(t) [z(t) - \hat{w}(t)], \quad (2.14)$$

где обозначено $K(t) = A(t, t)$.

Матричное усиление вычисляется по формуле

$$K(t) = P(t) N^{-1}, \quad (2.15)$$

в которой $P(t)$ есть минимизированная дисперсионная матрица ошибки фильтрации, удовлетворяющая нелинейному дифференциально-матричному уравнению Рикати

$$\frac{dP(t)}{dt} = FP(t) + P(t)F^+ - P(t)N^{-1}P(t) + M. \quad (2.16)$$

Решение задачи для полуоси получаем приравниванием нулю правой части (2.16). В общем случае конечного интервала наблюдения требуется найти аналитическое решение (2.16) при определенных начальных условиях P_0 . Существование и единственность этого решения доказано в [5].

Для получения решения в замкнутом виде сопоставим с уравнением (2.16), следуя [6], систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= -F\vec{x} + N^{-1}\vec{y}, \\ \frac{d\vec{y}}{dt} &= M\vec{x} + F\vec{y}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если обозначить через $\Theta(t, 0)$ блочную переходную матрицу системы (2.17), то решение (2.16) запишется в виде

$$P(t) = \|\Theta_{21}(t, 0) + \Theta_{22}(t, 0)P_0\| \cdot \|\Theta_{11}(t, 0) + \Theta_{12}(t, 0)P_0\|^{-1}. \quad (2.18)$$

Если обозначить $\Psi(t, \tau)$ переходную матрицу системы (2.14), то решение уравнения Винера—Хопфа (2.5) определится выражением

$$A(t, \tau) = \Psi(t, \tau)P(\tau)N^{-1}. \quad (2.19)$$

3. Линейные фильтры для винеровских процессов. Рассмотрим винеровский процесс первого порядка

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt} = m(t). \quad (3.1)$$

Предположим сначала, что $\overline{\omega_1(t)} = 0$, $P_0 = 0$. Матрицы, входящие в (2.7), (2.14), (2.16), (2.17), имеют одноэлементную структуру

$$F = \{0\}, \quad M = \{M_0\}, \quad N = \{N_0\}, \quad I = \{1\}. \quad (3.2)$$

Корреляционное уравнение (2.16) переписывается так:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^*}{N_0} + M_0. \quad (3.3)$$

Отсюда непосредственно получаем дисперсию установившейся ошибки фильтрации $\tilde{P} = \sqrt{M_0 N_0}$ и установившийся коэффициент усиления $\tilde{K} = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}}$. Система (2.17) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{N_0}, \quad \frac{dy}{dt} = M_0 x. \quad (3.4)$$

Для нее легко найти переходную матрицу

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \text{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t; & \frac{1}{\sqrt{M_0 N_0}} \text{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t \\ \sqrt{M_0 N_0} \text{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t; & \text{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

В соответствии с допущением $P_0 = 0$ окончательно найдем для переменной во времени дисперсии ошибки и усиления выражения

$$P(t) = \sqrt{M_0 N_0} \text{th} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t. \quad (3.6)$$

$$K(t) = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \text{th} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t. \quad (3.7)$$

Заметим, что мы получили с малой затратой труда известные результаты [2], где обозначено $M_0 = B$; $N_0 = \frac{1}{k}$.

Если теперь начальная дисперсия отлична от нуля, то получим соотношение

$$P(t) = \frac{\sqrt{M_0 N_0} \text{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t + P_0 \text{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t}{\text{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t + \frac{P_0}{\sqrt{M_0 N_0}} \text{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t}. \quad (3.8)$$

При $t \rightarrow \infty$ (3.6) — (3.8) переходят соответственно в выражения для установившегося режима. Структурная схема фильтрации одномерного процесса ω_1 приведена на рис. 1.

Переходная функция (2.14) имеет вид

$$\phi(t - \tau) = \begin{cases} \exp\left[-\sqrt{\frac{M_0}{N_0}}(t - \tau)\right], & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (3.9)$$

При этом

$$A(t - \tau) = \begin{cases} \sqrt{M_0 N_0} \exp\left[-\sqrt{\frac{M_0}{N_0}}(t - \tau)\right], & t > \tau, \\ 0 & t < \tau. \end{cases} \quad (3.10)$$

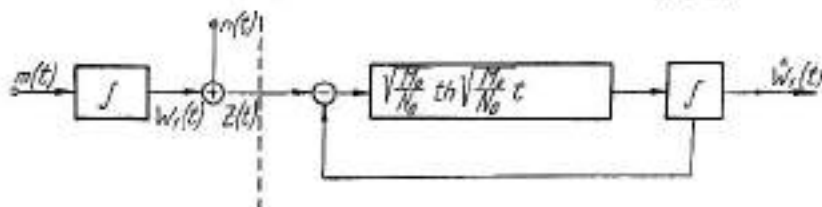


Рис. 1. Структурная схема фильтрации процесса $\omega_1(t)$.

Рассмотрим теперь винеровский процесс, состоящий из первого и второго интегралов от белого шума

$$\frac{d\vec{\omega}_{1,2}(t)}{dt} = F\vec{\omega}_{1,2}(t) + Im(t); \quad \vec{\omega}_{1,2}(t) = 0; \quad P_0 = 0. \quad (3.11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{\omega}_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Система корреляционных уравнений (2.16) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = -P_{11}k_1 - P_{12}k_2 + N_0, \\ \frac{dP_{12}}{dt} = \frac{dP_{21}}{dt} = P_{11} - P_{12}(P_{11}k_1 + P_{22}k_2), \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 2P_{12} - P_{12}^2k_1 - P_{22}^2k_2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Для аналитического решения (3.14) найдем переходную матрицу системы (2.17)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + k_1 y_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2 y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = N_0 x_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Собственные значения для матрицы коэффициентов (3.15) равны соответственно

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\frac{g_1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.16)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{g_1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.17)$$

где

$$\beta = \frac{g_2}{g_1}, \quad g_1 = k_1 N_0, \quad g_2 = k_2 N_0. \quad (3.18)$$

Получив переходную матрицу и выполнив преобразования согласно (2.18) при $P_0 = 0$, найдем для элементов матрицы текущих дисперсий ошибок выделения процесса выражения

$$P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{g_1 - 2g_2} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (2g_2 + g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}, \quad (3.19)$$

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = N_0 \frac{(2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t - (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (2g_2 + g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}, \quad (3.20)$$

$$P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{g_1 - 2g_2} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}{g_2 (g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + g_2 (g_1 - g_2) (2g_2 + g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}. \quad (3.21)$$

При $t \rightarrow \infty$ получим решение задачи на полюсах

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2}}{g_1 + g_2}, \quad (3.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{12}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{21}(t) = \frac{N_0}{g_1 + g_2}, \quad (3.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2}}{(g_1 + g_2) g_2}, \quad (3.24)$$

что совпадает с полученными ранее результатами [2,3]. Скорость сходимости (3.19) - (3.21) к (3.22) - (3.24) определяется только соотношением между белыми шумами и может быть оценена, например, с помощью второго метода Ляпунова.

Дисперсии ошибок наблюдения и переменное усиление может содержать незагужающие гармонические составляющие, либо быть полностью аperiодическим.

При $g_1 < 2g_2$ имеем

$$P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{2g_2 - g_1} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{2g_2 - g_1} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{2g_2 - g_1} t}, \quad (3.25)$$

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = N_0 \frac{(2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t - (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{2g_2 - g_1} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{2g_2 - g_1} t}, \quad (3.26)$$

$$P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{2g_2 - g_1} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{2g_2 - g_1} t}{g_2 (g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + g_2 (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{2g_2 - g_1} t}. \quad (3.27)$$

Поскольку белые шумы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ некоррелированы, то матрица переменного усиления диагональная

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_1 P_{11}(t) & 0 \\ 0 & k_2 P_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Структурная схема двумерной фильтрации приведена на рис. 2.

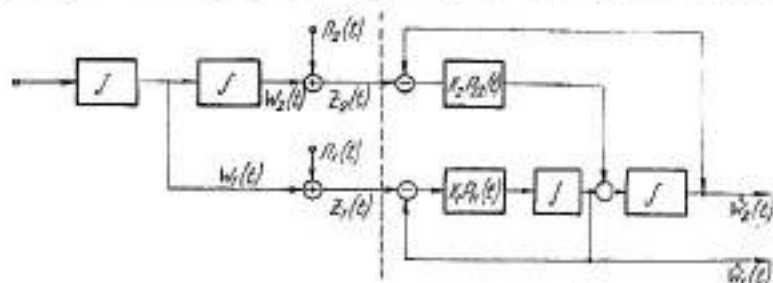


Рис. 2. Структурная схема фильтрации процесса. $\vec{W}_{1,2}(t) = \vec{W}_1(t), \vec{W}_2(t)$

ВЫВОДЫ

Приведенные результаты показывают, что характер переменного усиления и поведения текущих дисперсий ошибок наблюдения винеровских процессов полностью определяется соотношением между спектральными интенсивностями белых шумов $\vec{n}(t)$ и $\vec{m}(t)$. Они же определяют и скорость сходимости к установившемуся режиму, причем начальная дисперсия влияет на результирующую ошибку только в переходном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей и ее применение, т. 5, вып. 3, 1960.
2. П. А. Бакут и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Изд-во «Сов. радио», т. 2, 1964.
3. И. А. Большаков, Э. Н. Хомяков. Некоторые задачи многомерной фильтрации процессов со стационарными производными. Техническая кибернетика, Изв. АН СССР, 6, 1966.
4. Р. Е. Калман, Вьюси. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Trans. A. S. M. E., vol. 83, No 1, 1961, series D.
5. R. E. Kalman, «Contribution to the theory of Optimal Control». Proceedings of the Conference on Ordinary Differential Equations, Mexico City, 1959. Vol. soc, mat, mech., 1961.
6. J. J. Levin. On the matrix Picatti equation, Trans. Amer. math. soc. No 10, 1959, p. 519—524.

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛОСКОПА НА ЕГО ВЫХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ЗАПИСИ И СЧИТЫВАНИИ ПОЛУТОНОВЫХ СИГНАЛОВ

М. С. Куст

Электронно-лучевые трубки с накоплением зарядов (потенциалоскопы) широко применяются в радиолокационной и вычислительной технике, в телевидении, телеметрии и радиосвязи. Внедрение потенциалоскопов в технику связи и телевидения позволяет шире освоить новые виды связи (метеорную, тропосферную, ионосферную, космическую и др.) и повысить эффективность, помехоустойчивость и скрытность каналов связи.

С перспективностью применения потенциалоскопов в системах связи и их высокой разрешающей способностью (до 20 линий на 1 мк) связан ряд актуальных задач. К ним относятся исследование влияния параметров потенциалоскопа на величину сигнала считывания при различных коэффициентах компрессии по времени. Кроме этого, большой интерес представляет вопрос о преобразовании непрерывных сигналов с помощью потенциалоскопа, так как во многих случаях возникает необходимость передачи таких сигналов по каналам связи.

Теоретические исследования режимов потенциалоскопов, проведенные в ряде работ, в том числе в [1], [2], [3], а также теоретические и экспериментальные исследования, осуществленные автором, показали, что преобразование непрерывного сигнала с помощью потенциалоскопа возможно в режиме равновесной записи и перезарядного считывания. Этот режим в ряде работ называется режимом записи и считывания полутоновых сигналов. В таком режиме амплитудная характеристика потенциалоскопа линейная, его чувствительность достаточно высокая, а частотная характеристика может быть равномерной.

Ниже рассматривается влияние параметров потенциалоскопа на эти характеристики. При работе потенциалоскопа в других режимах наряду с режимом уменьшенным величиной сигнала считывания возникают сильные искажения этого сигнала.

В процессе преобразования сигнала с помощью потенциалоскопа воздействие его параметров на сигнал сказывается дважды — при записи и при считывании сигнала. Учет этого действия усложняется, когда запись и считывание осуществляются с различными скоростями. В этом случае необходимо рассматривать процесс записи и процесс считывания сигнала раздельно.

Рассматривая процесс образования потенциального рельефа при записи и процесс съема потенциального рельефа при считывании сигналов, необходимо учитывать:

1) несоответствие потенциального рельефа распределению зарядов при конечной толщине мишени;

2) неравномерность перераспределения вторичных электронов;

3) влияние потенциала коммутирующего элемента на работу выхода вторичных электронов из мишени;

4) влияние потенциала соседних элементов на поток и перераспределение вторичных электронов и др.

Все эти факторы приводят к резкому усложнению рассматриваемых процессов. Ослабить их влияние можно путем применения тонких мишеней и барьерной сетки, расположенной на небольшом расстоянии от поверхности мишени. В этом случае плотность поверхностного заряда

$$\rho = C'u, \quad (1)$$

где $C' = \frac{C_1 + C_2}{dS}$ — удельная суммарная емкость мишени относительно сигнальной пластины и барьерной сетки (рис. 1).

Изменение во времени плотности заряда элементарного участка мишени dS можно выразить как

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = j_2^A(x, y, t) - j_1(x, y, t) = j_2(x, y, t)(\sigma_2(u) - 1), \quad (2)$$

где $j_1(x, y, t)$ — плотность тока первичных электронов, попадающих на данный элемент мишени;

$j_2^A(x, y, t)$ — плотность тока вторичных электронов, достигающих коллектор (рис. 1).

Выражение (2) показывает, что изменение плотности заряда элемента мишени зависит от плотности тока в пучке и эффективного коэффициента вторичной эмиссии $\sigma_2(u)$, который является функцией потенциала мишени

$$\sigma_2(u) = \frac{j_2^A(x, y, t)}{j_1(x, y, t)} = e^{-\lambda u}, \quad (3)$$

где λ — крутизна характеристики $\sigma_2 = f(u)$ в области равновесного режима;

u — потенциал элемента мишени, отсчитываемый относительно равновесного.

При одновременном действии электронного пучка и входного сигнала потенциал элемента мишени

$$u = \frac{1}{C'} \rho(x, y, t) + k u_{\text{вх}}, \quad (4)$$

где

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_1'}{C_1' + C_2'}.$$

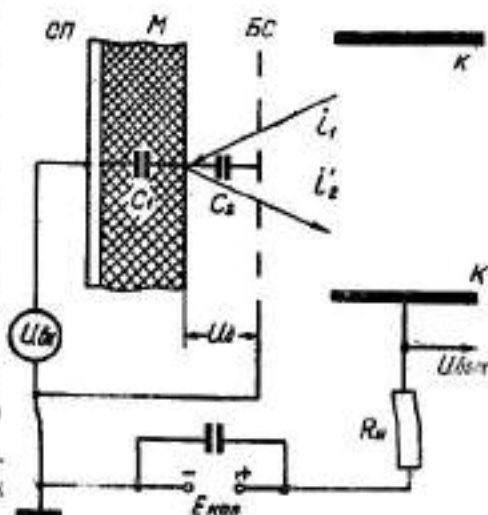


Рис. 1.

В конце записи распределение плотности заряда, с учетом (3), (4) и гауссовским распределением тока в пучке, определится выражением

$$\rho_a(x, y, t) = \frac{C'}{\lambda} \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} B_0 e^{-B_0} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{r_e}} e^{-[z^2 + B_0 \Phi(z)]} \times \\ \times e^{-\lambda k u_{ax} \left(\frac{x-x_0}{v_0} - \frac{t}{v_0} \right)} dz, \quad (5)$$

где

$$z = \frac{x-x_0-v_0 t}{r_e}; \quad B_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\lambda r_e}{C' v_0} j_0 \exp \left[-\left(\frac{y}{r_e} \right)^2 \right] \\ \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-p^2} dp.$$

Из (5) видно, что между плотностью заряда, параметрами трубки, скоростью движения пучка и формой входного сигнала существует сложная зависимость.

Для упрощения анализа процесса записи рассмотрим случай, когда на вход потенциалоскопа действует сигнал малой величины. При этом условии выражение (3) можно представить в виде

$$u_0(u) = 1 - \lambda u. \quad (6)$$

Тогда с учетом (4), (6), выражение (2) принимает вид

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\lambda}{C'} j_0 e^{\frac{(x-x_0-v_0 t)^2 + y^2}{r_e^2}} \rho(x, y, t) = \\ = -\lambda k j_0 e^{\frac{(x-x_0-v_0 t)^2 + y^2}{r_e^2}} u_{ax}(t). \quad (7)$$

С учетом начальных условий и распределения плотности тока в пучке плотность заряда элемента мишени в конце записи определится выражением

$$\rho_a(x, y, \infty) = -k C' \int_0^{\infty} I(\theta) u_{ax}(\theta) e^{-\int_0^{\theta} I(\tau) d\tau} d\theta.$$

Раскрыв введенные ранее обозначения и произведя интегрирование, получим

$$\rho_a(x, y) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} C' B_0 e^{-B_0} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{r_e}} e^{-[z^2 + B_0 \Phi(z)]} \times \\ \times u_{ax} \left(\frac{x-x_0}{v_0} - \frac{t}{v_0} z \right) dz. \quad (8)$$

Выражение (8) показывает, что при малых входных сигналах существует линейная зависимость между плотностью распределения заряда и величиной входного сигнала.

Зная распределение плотности заряда по поверхности мишени, можно определить потенциальный рельеф ее по окончании записи сигнала. С учетом (1) выражение для распределения потенциального рельефа по окончании записи примет вид

$$u_{\text{мз}}(x, y) = -\frac{q}{V_{\pi}} k B_0 e^{-B_0} \int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{r_e}} e^{-|x^2+B_0\Phi(x)|} \times \\ \times u_{0x} \left(\frac{x-x_0}{v_x} - \frac{r_e}{v_x} z \right) dz. \quad (9)$$

Выражение (9) показывает, что в процессе записи сохраняется линейная зависимость между потенциалом мишени и напряжением входного сигнала. Поэтому в дальнейшем рассматривается этот режим записи сигналов.

Для рассмотрения процесса установления потенциального рельефа мишени и его связи с параметрами потенциалокопа обратимся к случаю, когда на вход подано напряжение вида

$$u_{\text{вх}}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta < 0 \\ u_0 & \text{при } \theta > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Потенциальный рельеф мишени определится выражением

$$u_{\text{мз}}(x, y) = -k u_0 \{ 1 - e^{-B_0 |1+\Phi(x, y)|} \} \quad (11)$$

или

$$u_{\text{мз}}^1 = -\frac{u_{\text{мз}}(x, y)}{k u_0} = \\ = 1 - e^{-B_0 |1+\Phi(x, y)|}$$

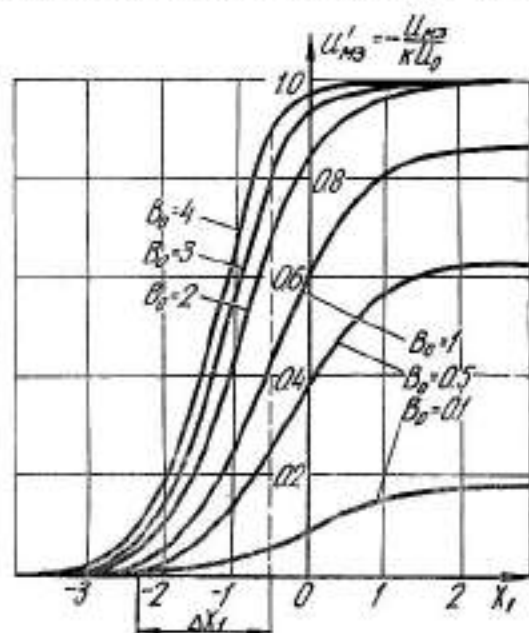


Рис. 2.

где $x_1 = \frac{x-x_0}{r_e}$ — безразмерное расстояние вдоль строки;

r_e — эффективный радиус пучка;

$u_{\text{мз}}^1$ — относительное изменение потенциала мишени.

Из (11) видно, что процесс установления потенциала зависит от коэффициента B_0 , который определяется формулой

$$B_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{v_x}{c v_z} I_0 \exp(-y_1^2), \quad (12)$$

где $y_1 = \frac{y}{r_e}$.

На рис. 2 приведено изменение потенциала мишени вдоль строки при различных значениях B_0 . Из семейства кривых видно, что длительность переходного процесса можно характеризовать «зоной размытости» Δx_1 . С ростом B_0 «зона размытости» уменьшается, следовательно, уменьшается

длительность переходного процесса. Длительность процесса установления для элементов мишени, расположенных в центре строки, ниже, чем для элементов, расположенных на периферии.

Выражения (11) и (12) показывают, что при соответствующем выборе параметров трубки (толщины мишени, ее материала, диаметра пучка и максимальной плотности тока в нем) и скорости движения пучка можно «зону размытости» свести к минимуму. Однако полностью избавиться от «зоны размытости» невозможно, так как минимальный ее размер определяется апертурой пучка. Следовательно, искажение фронта импульса имеет место даже при больших B_0 и зависит от разрешающей способности потенциалоскопа и скорости движения пучка. Чем выше разрешающая способность потенциалоскопа и чем меньше скорость движения пучка, тем меньше искажения фронта импульса.

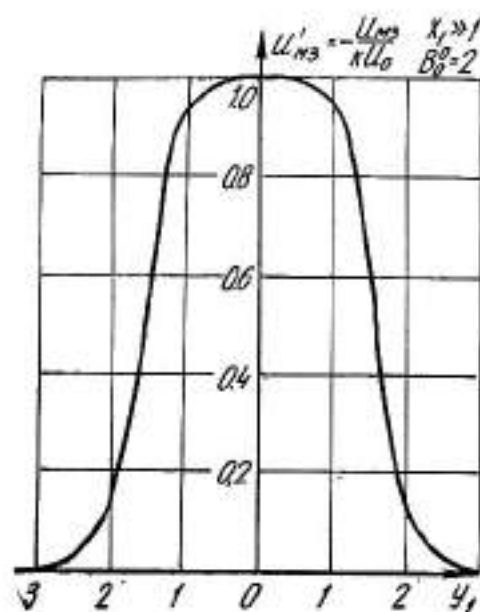


Рис. 3.

Из семейства кривых (рис. 2) видно, что в реальных условиях работы достаточно обеспечить $B_0 = 4$. Дальнейшее увеличение B_0 не приводит к заметному уменьшению «зоны размытости».

Изменение потенциала мишени поперек строки в установившемся режиме, т. е. при $x_1 \gg 1$, определяется выражением

$$u'_{мз} = 1 - e^{-2B_0^2 x_1^2} \quad (13)$$

где

$$B_0^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\gamma_e}{C' v_0} j_0 \quad (14)$$

Из (13) и графика рис. 3 видно, что крутизна спада потенциала зависит от коэффициента B_0^2 , определяемого параметрами трубки. Чем больше B_0^2 , тем круче фронт изменения потенциала. Следовательно, увеличение B_0^2 благоприятно сказывается на распределении потенциала как вдоль, так и поперек строки, и приводит к увеличению разрешающей способности потенциалоскопа.

Обеспечение заданного значения B_0^2 в процессе записи еще не означает, что обеспечивается минимальное искажение сигнала, так как в процессе считывания коэффициент B_0 также влияет на форму сигнала. Поэтому, если скорость считывания сигнала больше скорости записи, то необходимо при считывании обеспечить заданное значение B_0^2 , тогда при записи заданная величина B_0^2 будет обеспечена и подавно.

Решение уравнения (9) при форме входного сигнала, отличной от (10), представляет определенные затруднения. Вот почему в инженерной практике целесообразно пойти на некоторые допущения. Будем считать, что пучок имеет конечные размеры и гауссовское распределение тока. Такой пучок с конечными размерами можно заменить эквивалентным пучком с постоянной плотностью тока. Это допущение справедливо при

$$\tau_0 \gg T_{инт}$$

где τ_2 — время пребывания пучка на данном элементе мишени, равном размеру самого пучка;

T_{\min} — минимальный период записываемого сигнала. Тогда при подаче на вход сигнала

$$u_{\text{вх}} = U_m \cos \Omega(t_1 + t) \quad (15)$$

потенциальный рельеф мишени в процессе записи определится выражением

$$u_{\text{мш}}(\theta, \varphi) = -kU_m \gamma A_1 [\sin a(\theta + \delta_1 + \varphi) - e^{-\gamma \tau} \sin a(\theta + \delta_1)],$$

$$\text{где } \theta = \frac{t_1}{\tau_2}; \quad \varphi = \frac{t}{\tau_2};$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{c} l_0 \tau_2; \quad a = \Omega \tau_2; \quad \beta = \frac{\lambda}{c} l_0;$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + a^2}};$$

$$\operatorname{tg} a \delta_1 = \frac{\gamma}{a} = \frac{\beta}{\Omega}.$$

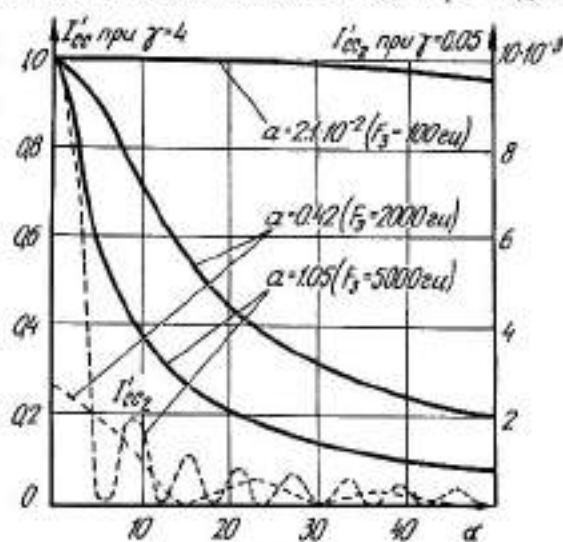


Рис. 4.

По окончании записи ($t = \tau_2$) выражение для потенциала элемента мишени принимает вид

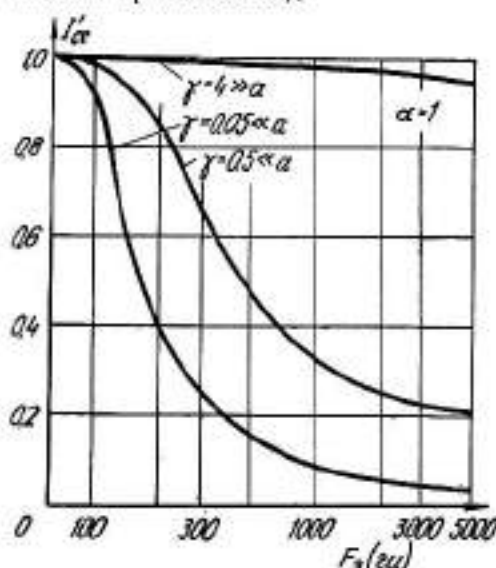


Рис. 5.

$$u_{\text{мш}}(\theta, 1) = -kU_m \gamma A_1 B_1 \sin a(\theta + \delta_1 + \delta_2), \quad (16)$$

$$\text{где } B_1 = \sqrt{1 - 2e^{-\gamma} \cos a + e^{-2\gamma}};$$

$$\operatorname{tg} a \delta_2 = \frac{\sin a}{\cos a - e^{-\gamma}}.$$

Из (16) видно, что потенциал мишени является функцией времени ($\theta = \frac{t_1}{\tau_2}$) с периодом, равным периоду входного сигнала с фазовым сдвигом $a(\delta_1 + \delta_2) + \frac{\pi}{2}$. Величина фазового сдвига зависит от соотношения $\frac{\beta}{\Omega}$ и скорости движения пучка. Чем больше отношение $\frac{\beta}{\Omega}$ и чем меньше скорость движения пучка, тем выше величина фазового сдвига. Величина γ характе-

ризует степень приближения потенциала к равновесному. Она связана с B_1 следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} B_1.$$

При считывании сигнала входной сигнал равен нулю и распределение плотности заряда может быть выражено дифференциальным уравнением

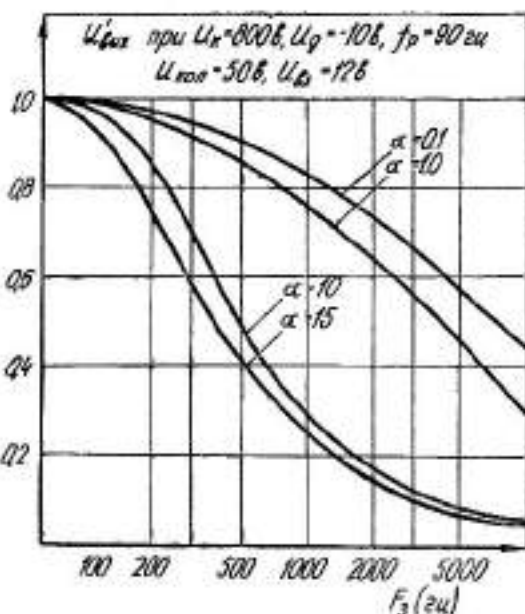


Рис. 6.

(7) без правой части, а потенциал элементов мишени, с учетом начальных условий, определится выражением

$$u_{\text{мс}}(x, y, t) = u_{\text{мс}}(x, y) \times \int_0^t i_c(\tau) d\tau \times e^{-\dots}$$

где $u_{\text{мс}}(x, y)$ — начальное значение потенциала при считывании, соответствующее значению по окончании процесса записи.

Принимая во внимание (16) и допущение конечных размеров пучка и постоянство тока в нем, потенциальный рельеф мишени при считывании можно определить выражением

$$u_{\text{мс}}(\theta, \varphi_c) = -kU_m \gamma A_1 B_2 e^{-\gamma r_c} \sin a (\theta + \beta_1 + \beta_2).$$

При считывании в результате проведения потенциального рельефа к равновесному возникает ток сигнала считывания. Величина этого тока определится выражением

$$i_{\text{сч}} = \int_S \frac{\partial \rho_c(x, y, t)}{\partial t} dx dy$$

или

$$i_{\text{сч}} = C' \int_S \frac{\partial u_{\text{мс}}(x, y, t)}{\partial t} dx dy. \quad (17)$$

После интегрирования несложных преобразований выражение (17) приводится к виду

$$i_{\text{сч}} = C' v_c d U_m \gamma r_c A_1 A_2 B_1 B_2 \cos a_c (\beta_1' + \beta_2' + \beta_0). \quad (18)$$

где

$$B_2 = \sqrt{1 - 2e^{-\gamma r_c} \cos a_c + e^{-2\gamma r_c}}$$

$$a_c = \Omega \alpha \tau_c; \quad \beta_2' = \frac{\beta_2}{\alpha}; \quad \theta' = \frac{\theta}{\alpha};$$

d — сторона пучка, имеющего квадратное сечение;

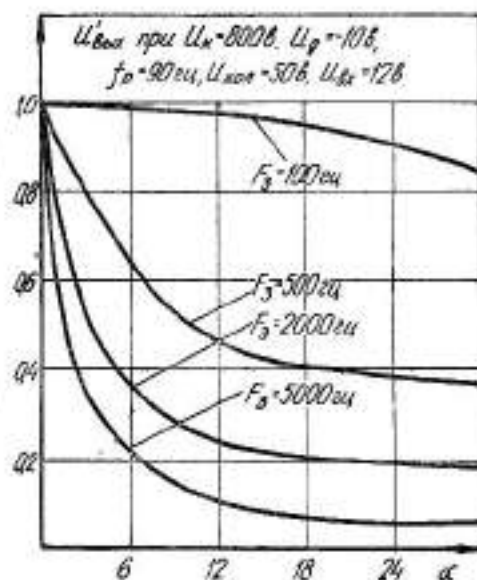


Рис. 7.

v_c — скорость движения пучка при считывании;

$\alpha = \frac{\tau_s}{\tau_c} = \frac{v_c}{v_s}$ — коэффициент компрессии сигнала во времени.

Выражение (18) определяет величину тока считывания, а следовательно, величину сигнала на выходе потенциалоскопа. Из этого выражения видно, что результирующая амплитудная характеристика потенциалоскопа линейная.

Для анализа частотных свойств потенциалоскопа целесообразно ввести понятие приведенного тока, определяемого по формуле

$$i'_{cc} = I'_{cc} \cos \alpha_c (\theta' + \delta'_2 + \beta_2),$$

где I'_{cc} — амплитуда приведенного тока, определяемая выражением

$$I'_{cc} = \gamma \gamma_c A_1 A_2 B_1 B_2. \quad (19)$$

Выражение (19) представляет собой частотную характеристику потенциалоскопа. Зависимость амплитуды приведенного тока от частоты сигнала записи при фиксированных значениях γ и α приведена на рис. 4. Из семейства кривых видно, что равномерность частотной характеристики потенциалоскопа зависит от соотношения $\frac{\beta}{\Omega}$.

Выражение (19), с учетом введенных обозначений, позволяет сделать анализ зависимости амплитуды приведенного тока от коэффициента компрессии. Эта зависимость представлена семейством кривых на рис. 5.

Полученные результаты теоретических исследований подтверждаются экспериментальными кривыми (рис. 6 и 7).

ВЫВОДЫ

1. Экспериментальные и теоретические исследования потенциалоскопов показывают, что при малых входных сигналах амплитудная характеристика потенциалоскопа линейная.

2. Частотная характеристика потенциалоскопа зависит от его параметров и отношения $\frac{\beta}{\Omega}$. При $\beta \gg \Omega$ частотная характеристика имеет небольшой спад с ростом частоты. При $\beta \ll \Omega$ ток сигнала считывания обратно пропорционален квадрату частоты, следовательно, частотная характеристика падающая (рис. 4, 6).

3. Наблюдается сильная зависимость тока сигнала считывания от коэффициента компрессии α (рис. 5). При малых значениях γ уменьшение тока сигнала с ростом α сопровождается колебательным процессом. При $\alpha = \frac{2\gamma + 1}{\gamma} \frac{\pi}{2}$ значение тока сигнала равно нулю. Таким образом, при $\gamma \ll \alpha$ существует предельное значение α . Это обстоятельство еще раз указывает на необходимость выбора $\gamma \gg \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Кноль, Б. Кэйзан. Электронно-лучевые трубки с накоплением зарядов, Госэнергоиздат, 1955.
2. В. И. Серебрянников. Принципы работы накапливающих трубок. Вестник НИИ, № 2 (53), 1955.
3. В. Л. Герус. Реакция вычитющего потенциалоскопа на синусоидальный входной сигнал. Вопросы радиоэлектроники, серия 1, «Электроника», выпуск 5, 1959.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ОЦЕНКИ РАЗБОРЧИВОСТИ ПРЕРЫВАЕМОЙ РЕЧИ

С. Н. Терентьев, В. М. Рудой

За последние годы в периодической печати опубликовано большое количество работ, которые свидетельствуют о значительном интересе исследователей к так называемой рваной, или прерываемой речи. Такой вид преобразования речи встречается, например, в системах с временным уплотнением каналов связи, при запирании тракта приемного устройства на время действия помех и т. п. При этом разборчивость прерываемой речи, несмотря на большую избыточность полезных сведений в естественной речи, в значительной мере становится зависимой от параметров прерывания речевого сигнала [1].

Чтобы определить разборчивость преобразованной таким образом речи, в настоящее время очень широко применяется метод артикуляционных измерений. Именно этот метод принят за основной в связи с тем, что для аналитических расчетов нет необходимых объективных характеристики речевого сигнала и соответствующих критериев, определяющих его разборчивость. Поэтому разработка методов аналитического расчета разборчивости речи при различных ее преобразованиях является весьма актуальной задачей.

Известно, что речевой сигнал с достаточной для инженерной практики точностью можно рассматривать как стационарный случайный процесс [2].

Однако при преобразованиях речи подобно тем, которые получаются при ее прерывании, преобразованный речевой сигнал представляет собой процесс вида

$$g(t) = W(t), A(t), \quad (1)$$

где

$W(t)$ — речевой сигнал;

$A(t)$ — функция прерывания.

Для процессов такого вида корреляционная функция равна произведению функций корреляции речи и программы прерывания

$$R_g(\tau) = R_W(\tau) R_A(\tau). \quad (2)$$

Корреляционную функцию речи можно найти, используя одну из возможных аппроксимаций спектра речи [2]

$$G_W(\omega) = \frac{v_0^2}{\pi} \left[\frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right], \quad (3)$$

где $v = 1,14 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$; $\omega_0 = 2,98 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$.

Подставляя (3) в формулу Хинчина—Винера, находим значение

$$R_W(\tau) = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (4)$$

Для простоты примем программу прерывания в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов такую, что

$$A(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } kT_c < t < kT_c + T_{np} \\ 0 & \text{при } kT_c + T_{np} < t < (k+1)T_c. \end{cases} \quad (5)$$

где
 T_c — время существования речевого сигнала;
 T_{np} — период прерывания.

Представим $A(t)$ в виде

$$A(t) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos \omega_m t, \quad (6)$$

где

$$\omega_m = m\omega_{np}; \quad m = 2l + 1; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Постоянная составляющая процесса (6) равна

$$C_0 = \frac{2}{T_{np}} \int_0^{\frac{T_c}{2}} A(t) dt = \frac{T_c}{T_{np}} - d, \quad (7)$$

т. е. коэффициенту заполнения передачи.

Амплитудное значение гармоник

$$C_m = \frac{4}{T_{np}} \int_0^{\frac{T_c}{2}} A(t) \cos \omega_m t dt = \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m d), \quad (8)$$

Корреляционная функция программы прерывания с учетом найденных значений (7) и (8), определяется из выражения (6)

$$R_A(\tau) = d^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\pi m d)}{\pi^2 m^2} \cos m\omega_{np} \tau. \quad (9)$$

Подставляя (4) и (9) в (2), можно найти корреляционную функцию прерываемой речи и по формуле Хинчина—Винера вычислить ее энергетический спектр

$$\begin{aligned} G_{\text{зпр}}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_A(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[d^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\pi m d)}{\pi^2 m^2} \cos m\omega_{np} \tau \right] \times \\ &\quad \times \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2\sigma^2 d^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4v_0^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nmd)}{\pi^2 m^2} \int_0^{\pi} e^{-v_0 t} \cos \omega_0 \tau \cos m\omega_{np} \tau \cos \omega \tau d\tau = \\
 & = \frac{v_0^2 d^2}{\pi} \left[\frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] + \\
 & + \frac{v_0^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nmd)}{\pi^2 m^2} \left[\frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 + \omega + m\omega_{np})^2} + \frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 + \omega - m\omega_{np})^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 - \omega + m\omega_{np})^2} + \frac{1}{v_0^2 + (\omega_0 - \omega - m\omega_{np})^2} \right]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

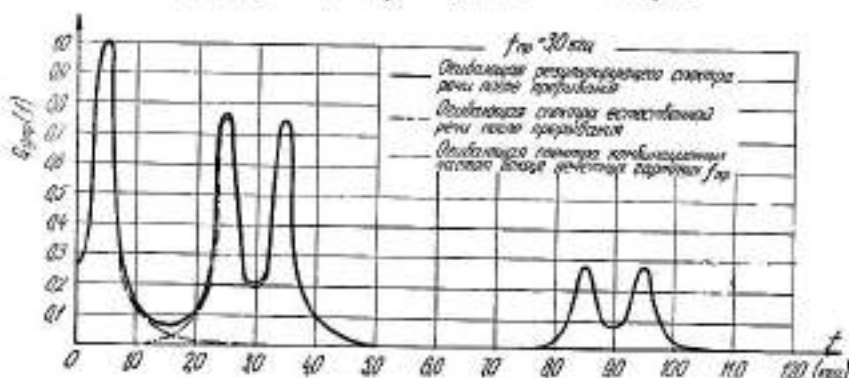


Рис. 1.

В формуле (10) первое слагаемое представляет собой исходный спектр речи до прерывания, описываемый выражением (3), умноженный на квадрат коэффициента заполнения передачи. Второе слагаемое — спектр комбинационных частот вокруг каждой нечетной гармоники частоты прерывания ω_{np} , умноженный на свой коэффициент гармоник.

Поэтому формулу (10) можно представить в более наглядном виде

$$\begin{aligned}
 G_{грп}(\omega) &= d^2 G_{\omega}(\omega) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nmd)}{m^2} \times \\
 & \times [G_{\omega}(\omega_0 + \omega + m\omega_{np}) + G_{\omega}(\omega_0 + \omega - m\omega_{np}) + \\
 & + G_{\omega}(\omega_0 - \omega + m\omega_{np}) + G_{\omega}(\omega_0 - \omega - m\omega_{np})]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Произведя в (10) замену ω на f , получим следующее выражение для спектра прерываемой речи:

$$\begin{aligned}
 G_{грп}(f) &= \frac{d^2 v_0^2}{\pi} \left[\frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 + f)^2} + \frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 - f)^2} \right] + \\
 & + \frac{v_0^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nmd)}{\pi^2 m^2} \times \\
 & \times \left[\frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 + f + m f_{np})^2} + \frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 + f - m f_{np})^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 - f + m f_{np})^2} + \frac{1}{v_0^2 + 4\pi^2 (f_0 - f - m f_{np})^2} \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Для изучения вопроса о влиянии частоты прерывания на вид спектра преобразованного речевого сигнала и на разборчивость прерываемой речи, были рассчитаны по формуле (12) и построены спектры речевого сигнала для различных $f_{пр}$.

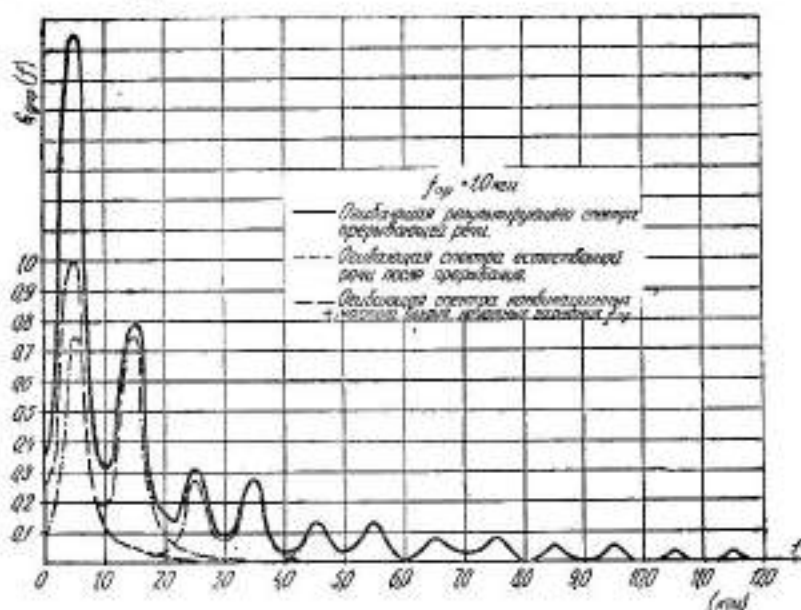


Рис. 2.

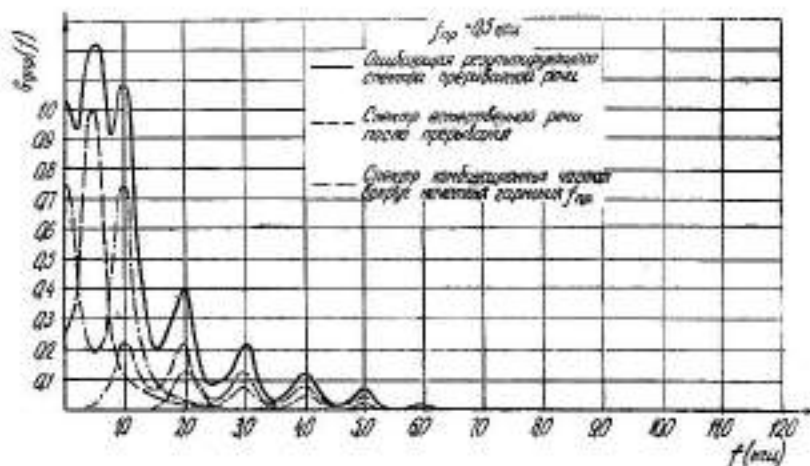


Рис. 3.

Огибающие расчетных спектров приведены на рис. 1, 2 и 3. На рисунках пунктиром изображена огибающая спектра, которая совпадает с исходным спектром речи; штрих-пунктиром — огибающая комбинационных частот вокруг нечетных гармоник частоты прерывания; сплошной линией — огибающая результирующего спектра прерываемой речи.

Рисунки дают наглядное представление о структуре спектра прерываемой речи и зависимости вида спектра от $f_{пр}$.

Очевидно, что спектр $G_{\omega}(f) d^2$ несет высокую разборчивость речи, так как он полностью совпадает с исходным спектром речевого сигнала до прерывания. Однако в спектре полезного (исходного) сигнала после преобразования появляются частоты, которые до этого отсутствовали. Это значит, что спектр комбинационных частот является мешающим, так как он в зависимости от частоты прерывания в той или иной мере накладывается на полезный спектр речи, вызывая, тем самым, ухудшение ее разборчивости.

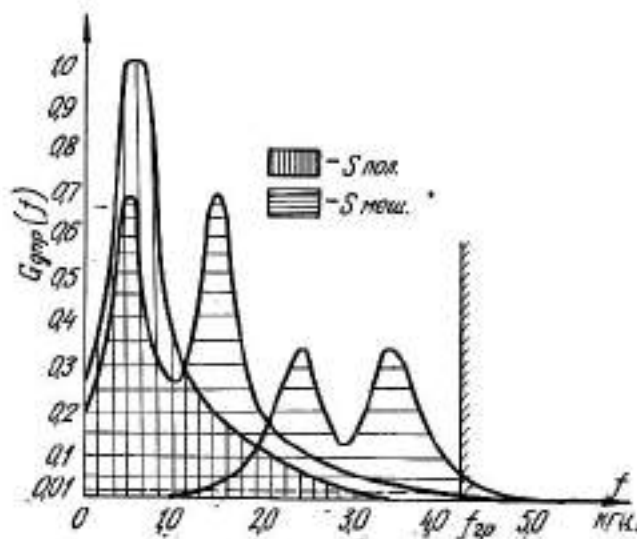


Рис. 4.

Следовательно, результирующая степень неразборчивости преобразованного сигнала сложным образом зависит от взаимодействия составляющих комбинационных частот и той его части, которая образует речевой сигнал.

Для достаточно приближенной оценки степени нарушения разборчивости речи после прерывания можно полагать, что влияние комбинационных участков спектра пропорционально отношению их энергии к энергии полезной части спектра, расположенной в полосе частот от нуля до частоты, на которой составляющие полезного спектра имеют квадрат амплитуды в 100 раз меньше максимума энергетического спектра.

Такая оценка весьма удобна, так как вычисление указанного отношения может быть осуществлено довольно просто путем графического или аналитического определения отношения площадей соответствующих участков спектра.

Рассмотренный метод оценки разборчивости прерываемой речи поясняется рис. 4.

На рис. 4. площадь под вертикальной штриховкой принадлежит полезному спектру речи и обозначена $S_{пол}$, а площади под горизонтальной штриховкой принадлежат комбинационным частотам и обозначены $S_{меш}$.

Результаты расчета, изложенным выше способом, представлены графиком зависимости $\frac{S_{пол}}{S_{пол} + S_{меш}} = F(f)$, приведенным на рис. 5 (сплошные линии).

С целью проверки изложенного метода были проведены артикуляционные измерения разборчивости слов от частоты прерывания речи. Для измерения артикуляции слов была использована методика и артикуляционные таблицы, рекомендованные в работе [3].

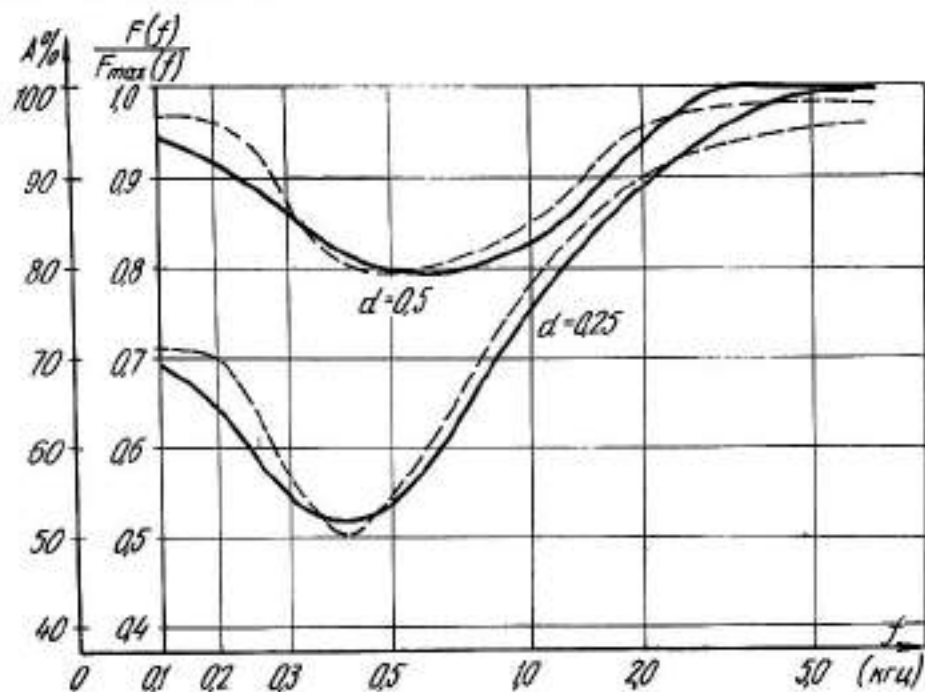


Рис. 5.

На основании полученных данных построен график зависимости разборчивости слов $A\%$ от частоты прерывания и коэффициента заполнения передачи (рис. 5 пунктир), из которого видно, что максимальное нарушение разборчивости речи совпадает с расчетным и имеет место в районе $f_{пр} \approx 500$ гц.

Из сравнения графиков, приведенных на рис. 5 (сплошные и пунктирные линии), можно заключить, что предлагаемый метод ориентировочной оценки нарушения разборчивости прерываемой речи обладает вполне достаточной точностью для инженерной практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Сапожников. Речевой сигнал в кибернетике и связи. Связьиздат, М., 1963.
2. А. И. Величкин. Амплитудное ограничение речи. «Акустический журнал», т. VIII, вып. 2, 1962.
3. Н. Б. Покровский. Расчет и измерение разборчивости речи. Связьиздат, М., 1962.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА ОТ ПРОТЯЖЕННОЙ ЦЕЛИ АНТЕННАМИ С ЛИНЕЙНОЙ АПЕРТУРОЙ

В. А. Грабина, А. И. Погорелов

В статье рассматривается задача синтеза системы, осуществляющей оптимальную пространственно-временную обработку сигнала в случае пеленгования протяженной цели. Получено выражение для оптимального оператора антенны. Показано, что использование синтезированной антенны может дать значительный выигрыш по сравнению со случаем, когда применяется антенна с равномерным амплитудно-фазовым распределением.

При пеленговании точечной цели оказывается, что оптимальная антенна, осуществляющая пространственно-временную обработку, должна иметь по раскрытию равномерное амплитудно-фазовое распределение, как это имеет место и в обычных линейных антеннах. Поэтому может возникнуть опасение, что результаты, получаемые при использовании методов оптимальной пространственно-временной обработки, будут и в других случаях столь же тривиальны.

В связи с этим интересно рассмотреть такую ситуацию, при которой результаты использования обычных антенн не являются наилучшими, и проиллюстрировать выигрыш, получаемый в случае применения метода оптимального синтеза систем обработки пространственно-временных сигналов.

Рассмотрим задачу пеленгования, которая состоит в следующем. Антенна с линейной апертурой в условиях надежного обнаружения сигнала пеленгует цель, представляющую собой протяженный неподвижный объект. На поле сигнала в пространстве антенны накладывается аддитивное поле помех с напряженностью $n(f; x)$, для наблюдения отводится время T .

Требуется указать оптимальный способ обработки принятых колебаний, при котором точность измерения угловой координаты протяженной цели будет наибольшей.

1. Заменим протяженную цель двумя точечными источниками, светящимися точками, монохроматического излучения частоты f_0 , расположенными на ее краях, и будем считать, что цель и линейная антенна лежат в одной плоскости, угол отсчитывается от линии OO' , а величины $\pm \Delta$ обозначают, как показано на рис. 1., угловые смещения точечных источников относительно азимута центра цели. Сделанные допущения позволяют выявить влияние протяженности излучающего объекта на оптимальную обработку.

Если амплитуда и фаза колебаний каждого из точечных источников представляют собой постоянные величины, равные соответственно E_0 и γ ,

то суммарная напряженность поля e_x , создаваемая двумя такими источниками в точках x апертуры, будет

$$e_x(t; x; \theta) = E_0 e^{j(2\pi f_0 t + \dots)} \left[e^{j \frac{2\pi x \sin(\theta + \Delta)}{\lambda_0}} + e^{j \frac{2\pi x \sin(\theta - \Delta)}{\lambda_0}} \right], \quad (1)$$

где λ_0 — длина волны, соответствующая частоте f_0 .

Положим, что угловые размеры цели (величина Δ) малы. В этом случае

$$e_x(t; x; \theta) \approx 2E_0 e^{j(2\pi f_0 t + \dots)} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta} \cos \left[2\pi \frac{x}{\lambda_0} \Delta \cos \theta \right]. \quad (2)$$

Из-за помех результаты наблюдения несут случайный характер и задача, таким образом, решается с помощью статистической теории. При этом, поскольку и сигнал и помеха — пространственно-временные (в данном случае — двумерные) функции, задачу необходимо решать на основании статистической теории не временных, а пространственно-временных процессов.

Будем считать, что помехи имеют тепловую природу, некоррелированы во времени и порождаются источниками, статистически независимыми и равномерно распределенными по телесным углам в пределах всего пространства.

Предположим также, что шумы эти действуют на протяжении того же времени T , которое отводится для наблюдения сигнала.

В этом случае помеха в области частот, занимаемой сигналом, может быть представлена [2] случайным процессом в виде белого шума с δ -корреляцией по времени и линейной координате x с плотностью вероятности

$$p(n) = k \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} n^2(t; x) dt dx \right\}, \quad (3)$$

где x — протяженность апертуры;

а N_0 — двумерная спектральная плотность процесса $n(t; x)$, приходящаяся на единицу объема двумерного спектрального (частотного) пространства ($f; \varphi_x$). Здесь f — циклическая, а φ_x — пространственная частоты.

Определение оптимального оператора антенны. Для пространственно-временных процессов, так же как и для временных, независимо от выбранного критерия оптимума в качестве оптимального эффекта можно принять коэффициент правдоподобия [1] (отношение правдоподобия) $\Lambda(\theta)$, или функцию $Y(\theta)$, взаимнооднозначную по отношению к $\Lambda(\theta)$.

Имея выражение для функционала плотности вероятности помехи (3), можно найти выражение для $\Lambda(\theta)$ и записать функционал $Y(\theta)$ аналогично тому, как это сделано в [2].

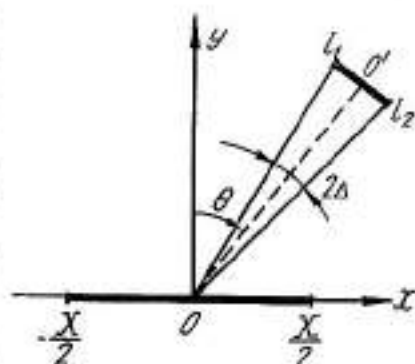


Рис. 1.

Для рассматриваемого двумерного случая выходной эффект оптимальной системы запишется в следующем виде:

$$Y(\theta) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \xi(t; x) e_2(t; x; \theta) dt dx. \quad (4)$$

Здесь $\xi(t; x)$ — напряженность поля на апертуре, созданная в результате совместного воздействия сигнала $e_2(t; x; \theta)$ и помехи $n(t; x)$

$$\xi(t; x) = e_2(t; x; \theta_0) + n(t; x), \quad (5)$$

а θ_0 — фиксированное значение полезного параметра сигнала.

Если воспользоваться записью (4) и (2), то получим необходимое нам выражение, указывающее способ оптимальной обработки принимаемых колебаний,

$$Y(\theta) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E_0 e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} dt \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \xi(t; x) e^{j2\pi \frac{x}{\lambda_0} \sin \theta} \cos \left[2\pi \frac{x}{\lambda_0} \cos \theta \Delta \right] dx. \quad (6)$$

Проанализируем это выражение.

Из (6) следует, что обработка пространственно-временного процесса осуществляется оптимальной системой раздельно: (по принципу обработки сигналов в радиолокационных системах классической схемы построения) сначала — по пространству — внутренний интеграл (6), а затем по времени.

При этом выходной эффект оптимальной антенны — обработка по пространству

$$Y(\theta; t) = \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \xi(t; x) \cos \left[2\pi \frac{x}{\lambda_0} \Delta \cos \theta \right] e^{j2\pi \frac{x}{\lambda_0} \sin \theta} dx. \quad (7)$$

Можно показать, что вращающаяся антенна с линейной апертурой, оптимальный выходной эффект которой представляется в виде (7), имеет диаграмму направленности

$$f_x(\theta) = \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \cos \left[2\pi \frac{x}{\lambda_0} \Delta \cos \theta \right] e^{j2\pi \frac{x}{\lambda_0} \sin \theta} dx, \quad (8)$$

где

$$I(x) = \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda_0} \Delta \cos \theta \right) - \quad (9)$$

— весовая функция антенны.

Во многих практически важных случаях, о которых будет сказано ниже, $\theta \approx 0$, а $\cos \theta \approx 1$, так что

$$I(x) = \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda_0} \Delta \right). \quad (10)$$

11. Для анализа полученных результатов полезно иметь выражение для коэффициента γ^2 , определяющего отношение

$$\gamma^2 = \frac{(c/\omega)_{\text{опт}}}{(c/\omega)_{\text{неопт}}} \quad (11)$$

Для рассматриваемой задачи достаточно сравнить в указанных случаях выходные эффекты только пространственной обработки сигнала. Временную обработку считаем оптимальной и, следовательно, одинаковой по точности.

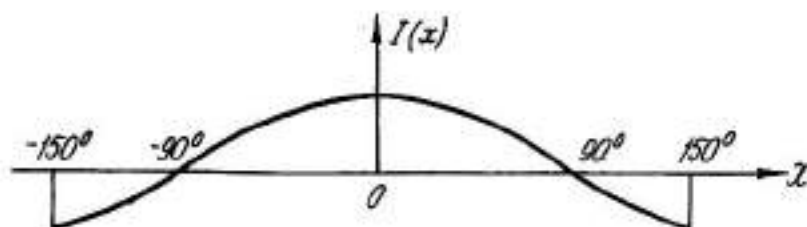


Рис. 2.

Можно показать, что в случае пеленгования протяженной цели, когда амплитудное распределение оптимальной антенны задано в виде (10), величину коэффициента γ^2 можно определить, пользуясь выражением

$$\gamma^2 = \frac{\int_{-x/2}^{x/2} |I(x)|^2 dx \int_{-x/2}^{x/2} \cos^2\left(2\pi\Delta \frac{x}{\lambda}\right) dx}{\left| \int_{-x/2}^{x/2} I(x) \cos\left(2\pi\Delta \frac{x}{\lambda}\right) dx \right|^2} \quad (12)$$

где $I(x)$ — амплитудное распределение неоптимальной антенны.

Сравним оптимальную обработку (7) с обработкой, когда в той же ситуации та же линейная антенна имеет, например, равномерное амплитудное распределение

$$I(x) = I_0 = \text{const.}$$

В этом случае, как следует из (12),

$$\gamma^2 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\pi\Delta \frac{x}{\lambda}}{2\pi\Delta \frac{x}{\lambda}} \right)}{\left(\frac{\sin \pi\Delta \frac{x}{\lambda}}{\pi\Delta \frac{x}{\lambda}} \right)^2} \quad (13)$$

Для конкретных значений угловых размеров цели и отношения x/λ получаются следующие значения γ^2 . При $\Delta = 5'$ и $x/\lambda = 5$; $\gamma^2 = 1,26$. При $\Delta = 5'$ и $x/\lambda = 25$ $\gamma^2 = 26$. Амплитудное распределение по апертуре для первого случая имеет вид, показанный на рис. 2.

Для второго случая аргумент косинуса для выражения (10) $2\pi\Delta \frac{x}{\lambda} \approx 750^\circ$, в связи с чем оптимальное распределение будет еще более отличаться от равномерного.

Из рассмотренных примеров видно, что дисперсия оценки параметра θ в случае оптимальной антенны заметно меньше, чем в случае, когда закон амплитудного распределения равномерный. В связи с этим имеет смысл обсуждение полученных результатов с точки зрения построения такой оптимальной антенны.

Трудности осуществления оптимальной антенны (7) определяются тем, что амплитудное распределение (9) зависит от двух обычно неизвестных параметров: Δ и θ . Более того, параметр θ является искомым параметром. Тем не менее возможны ситуации, при которых отмеченные трудности существенно ослабляются или снимаются вовсе и реализация рассматриваемой системы становится возможной. Здесь следует прежде всего заметить, что во многих реальных случаях для конструирования оптимальной антенны (7) априорное незнание θ окажется несущественным. Дело в том, что обычно цель находится в области, близкой к $\theta \approx 0$, так что $\cos \theta$ в аргументе выражения (10) можно положить равным единице.

Такое предположение ($\cos \theta \approx 1$) можно сделать и для антенн типа самоастроаивающихся фазуемых решеток, где диаграмма направленности антенны автоматически следит за целью.

Рассмотрим теперь вопрос о величине Δ . Выше было отмечено, что параметр Δ обычно является величиной неизвестной.

Если это имеет место, то, действительно, построение оптимальной системы вида (7) затруднительно. Однако имеются случаи, когда наблюдение ведется за целью, информация о которой содержит достаточно надежные сведения о Δ . Ограничимся двумя примерами.

Прежде всего укажем на типичную ситуацию в радиоастрономии, где угловые размеры объектов наблюдения известны. При этом следует подчеркнуть, что в радиоастрономии, где требуются высокие точности, а прием ведется на фоне радишумов, применение антенн, синтезированных с учетом действия помех, должно быть весьма эффективным. Второй случай, когда величина Δ или ее порядок можно считать также известными, имеет место при наблюдении космических объектов, параметры которых заданы.

Вывод, который следует из обсуждения вопроса о построении оптимальной системы (7), состоит в том, что совместное выполнение условий

$$\Delta - \text{задано}; \theta \approx 0; \Delta \frac{x}{\lambda} > 1 \quad (14)$$

для радиопеленгационных устройств вполне реально. В связи с этим построение антенны (8), осуществляющей оптимальную обработку сигнала от протяженной цели, возможно и целесообразно.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Фалькович. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. Изд-во «Сов. радио», 1961.
2. С. Е. Фалькович. О задаче определения оптимальной пространственно-временной системы обработки сигналов. «Радиотехника и электроника», 1966, № 5.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ

В. В. Мотлохов

1. Постановка задачи

На рис. 1 изображена рассматриваемая система связи, состоящая из источника сигнала (цели) некоторой протяженности $m(z)$ на фоне шума (помехи) $n(z)$, пространства и приемной сканирующей антенны A с диаграммой направленности по полю $h(z)$.

Пространственный сигнал представляет собой суммарное распределение напряженности эллиптически поляризованного электрического поля цели и помехи

$$f(z) = m(z) + n(z), \quad (1)$$

где $z = \sin \theta$ — угловая координата для дальней зоны антенны;

$f(z)$, $m(z)$, $n(z)$ — комплексные векторные функции пространственной координаты z .

Определяя состояние поляризации в виде двух линейно поляризованных несинфазных ортогональных компонент поля, предположим, что составляющие напряженности электрического поля помехи распределены по нормальному закону и выражаются случайными реализациями по пространству с известными корреляционными функциями, зависящими от разности координат.

Ортогональные составляющие поля сигнала являются известными функциями пространственной координаты z

$$\begin{aligned} m_x(z) &= m_{0x}(z - z_0), \\ m_y(z) &= m_{0y}(z - z_0), \end{aligned} \quad (2)$$

где z_0 — неизвестная (случайная) координата появления цели; $m_{0x}(z)$ — детерминированная функция.

Решение задачи оптимальной фильтрации заключается в синтезе такой эллиптически поляризованной приемной антенны, отношение сигнал/шум на выходе которой будет максимальным, а дисперсия ошибки пеленгации цели (2) в присутствии шумов — минимальной.

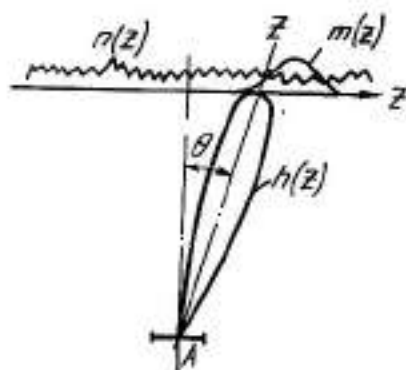


Рис. 1.

2. Пространственный сигнал на выходе эллиптически поляризованной антенны

Эллиптически поляризованный пространственный сигнал в плоскости цели можно представить в виде

$$\vec{f}(z) = \vec{p}_x^0 f_x(z) + \vec{p}_y^0 f_y(z), \quad (3)$$

где \vec{p}_x^0, \vec{p}_y^0 — ортовая система координат в точке дальней зоны, определяющая компоненты поля, которые при приеме совпадают с осями ox и oy системы координат в раскрыве антенны

$$\begin{aligned} f_x(z) &= m_x(z) + n_x(z), \\ f_y(z) &= m_y(z) + n_y(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Представляя эллиптически поляризованную антенну в виде двух смещенных эквивалентных линейных ортогонально поляризованных антенн, суммарный сигнал на выходе антенны можно записать следующим образом [1]:

$$B(z') = \gamma_x B_x(z') + \gamma_y B_y(z'), \quad (5)$$

где γ_x, γ_y — некоторые постоянные, зависящие от соотношения импедансов в антенне;

$B_x(z'), B_y(z')$ — отклики на выходе ортогонально поляризованных линейных антенн с направления z' , которые (с точностью до постоянного множителя) равны:

$$\begin{aligned} B_x(z') &= \int_{-1}^1 f_x(z) h_x(z' - z) dz, \\ B_y(z') &= \int_{-1}^1 f_y(z) h_y(z' - z) dz. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) $h_x(z)$ и $h_y(z)$ — диаграммы направленности эквивалентных ортогонально поляризованных линейных антенн, связанные фурье-преобразованиями с соответствующими им амплитудно-фазовыми распределениями $t_x(u)$ и $t_y(u)$, сосредоточенными на интервале $[-a, a]$, где

$$|a| = \frac{\pi a}{\lambda}, \quad (7)$$

a — линейный размер антенны;
 λ — длина волны.

С учетом приведенных формул выражение (5) можно преобразовать к виду

$$B(z') = \gamma_x [\mu_x(z') + \nu_x(z')] + \gamma_y [\mu_y(z') + \nu_y(z')], \quad (8)$$

где $\gamma_x \mu_x(z') + \gamma_y \mu_y(z')$ — сглаженный сигнал;
 $\gamma_x \nu_x(z') + \gamma_y \nu_y(z')$ — сглаженный шум.

3. Отношение сигнал/шум

Пренебрегая собственными шумами антенны и учитывая (4), (6) и (8), представим отношение сигнал/шум на выходе эллиптически поляризованной антенны в следующем виде:

$$\rho = \frac{|\mu_x(z') + \gamma \mu_y(z')|^2}{|\nu_x(z') + \gamma \nu_y(z')|^2} = \frac{E_{\mu}}{E_{\nu}}, \quad (9)$$

где $\gamma = \frac{\gamma_y}{\gamma_x}$.

Преобразуем числитель (9), применив теорему Планшереля [2] к (6) с учетом (4) и (8)

$$E_p = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_{mx}(u) t_x(u) e^{iuz} du + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} S_{my}(u) t_y(u) e^{iuz} du \right|^2, \quad (10)$$

где $S_{mx}(u)$ и $S_{my}(u)$ — фурье-преобразования (2 → 2а), т. е. поле сигнала в плоскости антенны.

Знаменатель (9) после проведения операции математического ожидания и применения теоремы Планшереля примет вид

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(u) |t_x(u)|^2 du + |\gamma|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(u) |t_y(u)|^2 du + \right. \\ \left. + 2\operatorname{Re} \left[\gamma \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}^*(u) t_x(u) t_y^*(u) du \right] \right\}, \quad (11)$$

где $S_{xx}(u)$, $S_{yy}(u)$, $S_{xy}(u)$ — фурье-преобразования соответствующих автокорреляционных и взаимной корреляционной функций

$$K_{xx}(z) = n_x(z) n_x^*(z_1)$$

$$K_{yy}(z) = n_y(z) n_y^*(z_1)$$

$$K_{xy}(z) = n_x(z) n_y^*(z_1).$$

Проведенные преобразования будут вполне корректны, если $h(z) \equiv 0$ вне $(-1, 1)$. Это условие практически всегда выполняется, поскольку все антенны стремятся сконструировать с минимальной реактивной энергией [3].

Оптимальная фильтрация будет иметь место, если (9) обращается в максимум.

Определить оптимальные амплитудно-фазовые распределения $t_{0x}(u)$ и $t_{0y}(u)$, обращающие (9) в максимум, можно, пользуясь методами вариационного исчисления. Поочередно придавая вариации $t_x(u)$ и $t_y(u)$, получаем два условно экстремальных уравнения, совместное решение которых позволяет найти с точностью до постоянного множителя C $t_x(u)$ и $t_{0y}(u)$, обращающих (9) в абсолютный экстремум (максимум)

$$t_{0x}(u) = G e^{-iuz} \frac{S_{mx}^*(u) S_{ny}(u) - S_{xy}^*(u) S_{my}^*(u)}{S_{xx}(u) S_{yy}(u) - |S_{xy}(u)|^2} \quad (12)$$

$$t_{0y}(u) = \frac{G}{\gamma} e^{-iuz} \frac{S_{my}^*(u) S_{nx}(u) - S_{xy}^*(u) S_{mx}^*(u)}{S_{xx}(u) S_{yy}(u) - |S_{xy}(u)|^2}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (9), получаем выражение для максимального отношения сигнал/шум на выходе антенны

$$\rho_0 = \frac{\operatorname{Re}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_{mx}(u)|^2 S_{ny}(u) + |S_{my}(u)|^2 S_{nx}(u) - 2S_{xy}^*(u) S_{mx}(u) S_{ny}(u)}{S_{xx}(u) S_{yy}(u) - |S_{xy}(u)|^2} du. \quad (14)$$

Если одна из компонент поля отсутствует (случай линейной поляризации), то получаем выражение [4]

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_m(u)|^2}{S_n(u)} du. \quad (15)$$

4. Дисперсия ошибки пеленгации

Обнаружение пространственного сигнала известной формы со случайной координатой появления сводится к пеленгации по максимуму отклика. Ошибка в определении угловой координаты вызывается тем, что наблюдаемая смесь сигнала и помехи достигает своего максимального значения при $z \neq z_0$, где случайная координата z определяется из следующего уравнения:

$$\mu'(z) + \nu'(z) = 0. \quad (16)$$

Разложим $\mu'(z)$ в ряд и ограничимся первым членом разложения, т. е. в окрестности истинного пеленга примем

$$\mu'(z) = z \mu''(0). \quad (17)$$

Тогда, принимая во внимание (16) и (17), получим

$$D = |z|^2 = -\frac{1}{|\mu''(0)|^2} |\nu'(z)|^2. \quad (18)$$

Учитывая, что сигнал на выходе оптимального (в смысле отношения сигнал/шум) фильтра равен автокорреляционной функции сглаженного шума $K_s(\chi)$ и, что

$$|\nu'(z)|^2 = -K_s''(0), \quad (19)$$

получаем

$$D_0 = \frac{1}{|\mu''(0)|^2}, \quad (20)$$

где D_0 является минимальным значением функционала (18), которое имеет место, если амплитудно-фазовые распределения описываются выражениями (12) и (13)

Это можно доказать, минимизируя (18) методами вариационного исчисления, подобно тому, как это было сделано для случая максимизации отношения сигнал/шум.

Подставим в (10) значения $t_{0x}(u)$ и $t_{0y}(u)$ из (12) и (13) и, опуская операцию возведения модуля в квадрат, дважды продифференцируем интеграл по параметру. После этого, полагая $z' = 0$ и учитывая (20), получим

$$D_0 = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i S_{mx}(u) S_{ny}(u) + |S_{my}(u)|^2 S_{xx}(u) - 2 S_{xy}(u) S_{mx}(u) S_{ny}(u)}{S_{nx}(u) S_{ny}(u) - |S_{xy}(u)|^2} u^2 du}. \quad (21)$$

Если одна из компонент поля отсутствует (случай линейной поляризации), то получаем выражение [4]

$$D_0 = \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_m(u)|^2}{S_n(u)} u^2 du}. \quad (22)$$

5. Пример синтеза оптимальной антенны

Синтез оптимальной антенны сводится к построению амплитудно-фазовых распределений (12) и (13) по известным параметрам суммарного пространственного сигнала.

Однако, как следует из (14) и (21), абсолютные экстремальные значения параметров ρ_0 и D_0 достигаются только в антенне бесконечной длины. Поэтому выбор длины оптимальной антенны на заданные величины ρ_0 и D_0 или оценка этих величин для антенны заданной длины могут быть произведены только в том случае, если известны зависимости $\rho_0(x)$ и $D_0(x)$.

Для примера вычислим зависимость дисперсии ошибки пеленгации цели от длины оптимальной антенны при следующих предположениях:

$$1. S_{xxp}(u) \equiv 0; \quad (23)$$

$$2. S_{xx}(u) = S_{yy}(u) = \sigma_0^2 e^{-\beta|u|}; \quad (23a)$$

$$3. |S_{mx}(u)|^2 = |S_{my}(u)|^2 + \sigma_0^2 e^{-\gamma|u|}. \quad (23b)$$

На рис. 2 изображена зависимость $D_{02}^*(x) = \frac{D_{02}(x)}{D_{02min}}$,

где $D_{02}(x)$ — дисперсия для случая широкополосного шума ($\gamma = 4\beta$), посчитанная по формуле (21) с учетом (23a–b); D_{02min} — получено из (21) для антенны бесконечной длины.

На том же рисунке приведена зависимость $D_{02}^1(x) = \frac{D_{02}^1(x)}{D_{02min}}$ для случая узкополосного шума,

когда $\gamma = \beta$.

Как следует из рис. 2, в случае широкополосного шума ($\beta < \gamma$) нельзя получить сколь угодно малую дисперсию ошибки, так как при увеличении апертуры резко падает коэффициент ее использования.

При полосе шума, равной полосе сигнала, можно получить дисперсию $D_{02}^*(x)$, стремящуюся с увеличением длины антенны к нулю. Очевидно, дисперсия более быстро

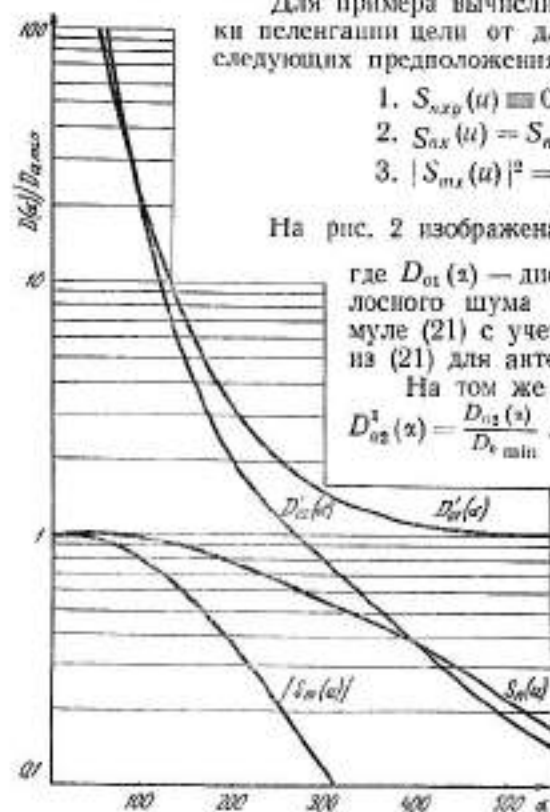


Рис. 2.

ро приближается к нулю с ростом x для случая $\gamma < \beta$, т. е. для более узкополосного шума.

Для сравнения на рис. 2 изображены $|S_m(u)|$ и $S_n(u)$ при $\gamma = 10^{-4}/4$; $\beta = 10^{-4}/16$.

В случае широкополосного шума можно заключить, что для получения малой дисперсии длина оптимальной антенны должна быть порядка ширины модуля спектра сигнала, при этом увеличение дисперсии (по сравнению с минимальной) составляет 20%.

ВЫВОДЫ

Предложенный аппарат позволяет в принципе синтезировать антенну радиолокатора для оптимальной (по критерию минимума дисперсии ошибки пеленгации и максимума отношения сигнал/шум) фильтрации эллиптически поларизованных пространственных сигналов известной формы

на фоне коррелированных частично поляризованных помех. Задача оптимизации антенны решалась при разложении эллиптически поляризованного поля в базисе двух ортогональных линейных составляющих. Однако можно показать, что полученные выражения для p_0 и D_0 инвариантны по отношению к базису разложения. Например, если воспользоваться понятием степени поляризации сигнала [5], то

$$D_0 = \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{I^2(u) [1 - v^2(u)]}{I_n^2(u) [1 - v_n^2(u)]} - 1 \right\} u^2 du}, \quad (24)$$

где $v(u)$ и $v_n(u)$ — распределение степени поляризации суммарного сигнала и помехи соответственно в плоскости антенны;

$I(u)$ и $I_n(u)$ — распределение интенсивности суммарного сигнала и помехи соответственно в плоскости антенны.

Полученные результаты можно распространить на случай двумерного обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зичек, Милазо. Антенны круговой поляризации. Сб. «Антенны эллиптической поляризации» под ред. А. И. Шпунтова, ИЛ, М., 1961.
2. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. Изд-во «Наука», М., 1964.
3. Я. И. Хургни, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. Физматгиз, М., 1962.
4. В. В. Мотлохов. Оптимальная фильтрация пространственных сигналов известной формы. Известия вузов МВ и ССО СССР по разделу «Радиотехника», 1966, № 8.
5. У. Шеркландф. Поляризованный свет. Изд-во «Мир», М., 1965.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ И УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ СИСТЕМАМИ С ЛИНЕЙНЫМИ АНТЕННАМИ

А. И. Погорелов

Задачи обнаружения сигналов и измерения их параметров основаны на наблюдении электромагнитных волн, излучаемых или отражаемых некоторыми объектами. Качество решения определяется наличием как внешних помех, поступающих на вход антенной системы вместе с сигналом, так и внутренних шумов аппаратуры.

Определение оптимальной системы, обеспечивающей максимальное извлечение информации из принимаемого сигнала, должно учитывать не временные сигналы и помехи на входе приемного устройства (напряжения и токи), а пространственно-временные сигналы и помехи (поля) на входе антенной системы. Оптимизации следует подвергать всю систему обработки, включая антенну, а не только приемное устройство.

Определение потенциальной точности измерения параметров

Будем считать заданным раскрыт антенной системы $[-L \div +L]$ и интервал наблюдения $[0 \div T]$ сигнала

$$s(t) = \operatorname{Re} \hat{S}(t) e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (1)$$

где ω — несущая частота, φ — начальная фаза, $\hat{S}(t) = S(t) \exp [j2\pi\theta(t)]$ комплексная огибающая, которая определяет форму сигнала или характер модуляции. Угловое перемещение цели представим в виде

$$\hat{\psi}(t) = \psi + \dot{\psi}t + \frac{1}{2}\ddot{\psi}t^2 + \dots, \quad (2)$$

где $\psi(t) = \sin \theta(t)$; $\theta(t)$ — угол места цели.

С достаточной для практических приложений точностью влиянием $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, ... на медленно меняющуюся амплитуду $S(t)$ и фазу $2\pi\theta(t)$ и влиянием $\ddot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, ... в показателе экспоненты можно пренебречь. Тогда напряженность поля сигнала на апертуре будет

$$s(t; x; \psi; \dot{\psi}) = S \left(t - \frac{x}{c} \psi \right) \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{c} \psi - \frac{x}{c} \dot{\psi} t \right) + j\varphi \right]. \quad (3)$$

Расстояние до цели $R(t)$ считаем известным. Отсутствуют также другие случайные параметры сигнала, роль которых достаточно освещена в литературе [1, 4].

Прием сигнала происходит на фоне тепловых пространственных помех $n(t; x)$. В соответствии с имеющимися реальными условиями приема, шумовой фон полагаем некоррелированным [2].

$$\overline{n(t_1, x_1) n(t_2, x_2)} = \frac{1}{2} N_0 \lambda^2 (t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2), \quad (4)$$

где N_0 — спектральная плотность мощности помех,

λ — длина волны сигнала, а черта сверху означает статистическое усреднение.

Для сформированных условий задачи функционал правдоподобия находится в следующем виде:

$$\Lambda(\psi; \dot{\psi}) = k \exp \left\{ -\frac{2}{N_0 \lambda} \int_{-L}^L \int_0^T s^2(t; x; \psi; \dot{\psi}) dt dx + \right. \\ \left. + \frac{4}{N_0 \lambda} \int_{-L}^L \int_0^T y(t; x) s(t; x; \psi; \dot{\psi}) dt dx \right\}, \quad (5)$$

где

$$y(t; x) = s(t; x; \dot{\psi}_0; \dot{\psi}_0) + n(t; x). \quad (6)$$

а $\dot{\psi}_0; \dot{\psi}_0$ — истинные значения параметров сигнала.

Разложим показатель экспоненциальной функции в ряд Тейлора относительно точки $\dot{\psi}_0; \dot{\psi}_0$.

Для больших отношений сигнал-помеха выражение для произвольного элемента матрицы, обратной корреляционной матрице ошибок измерения параметров сигнала, будет

$$A_{ij} = \frac{2}{N_0 \lambda} \operatorname{Re} \int_{-L}^L \int_0^T \frac{\partial}{\partial \psi_i} s(t; x; \vec{\psi}) \frac{\partial}{\partial \psi_j} s(t; x; \vec{\psi}) dt dx. \\ \vec{\psi} = (\psi; \dot{\psi}). \quad (7)$$

Вынесем операцию дифференцирования за знак интеграла. Тогда

$$A_{11} = A_{22} = \frac{2}{N_0 \lambda} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-L}^L \int_0^T S\left(t - \frac{x}{c} \psi_1\right) S\left(t - \frac{x}{c} \psi_1\right) \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\psi_1 - \right. \\ \left. - \psi_1) \right\} dt dx; \quad (8)$$

при $\psi_1 = \psi_2 = \psi$

$$A_{33} = A_{33} = \frac{2}{N_0 \lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_1} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_1} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-L}^L \int_0^T \left[S\left(t - \frac{x}{c} \psi\right) \right]^2 \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \right. \\ \left. - \dot{\psi}_1) t \right\} dt dx. \quad (9)$$

при $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}$

$$A_{12} = A_{21} = A_{13} = \frac{2}{N_0 \lambda} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_1} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-L}^L \int_0^T S\left(t - \frac{x}{c} \psi_1\right) S\left(t - \frac{x}{c} \psi_2\right) x \quad (10)$$

$$\text{при } \begin{cases} \psi_1 = \psi_2 = \psi \\ \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\text{х exp} \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2) - j\omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) t \right\} dt dx.$$

Запишем (10) в следующем виде:

$$A_{11} = \frac{2}{N\omega} \frac{\partial}{\partial \psi_1 \partial \dot{\psi}_1} \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-L}^L \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2) \right\} dx \int_0^T S \left(t - \frac{x}{c} \psi_1 \right) S \left(t - \frac{x}{c} \psi_2 \right) \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) t \right\} dt. \quad (11)$$

По аналогии с теорией временных процессов, рассматривающей временную функцию неопределенности [4], введем обобщенную функцию неопределенности для сигнала, который является пространственно-временным процессом

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1; \dot{\psi}_1; \psi_2; \dot{\psi}_2) &= \int_{-L}^L \int_0^T s(t; x; \psi_1; \dot{\psi}_1) s^*(t; x; \psi_2; \dot{\psi}_2) dt dx \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-L}^L \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2) \right\} dx \int_0^T S \left(t - \frac{x}{c} \psi_1 \right) S \left(t - \frac{x}{c} \psi_2 \right) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) t \right\} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Часть этой обобщенной функции неопределенности, представленная внутренним интегралом, совпадает с хорошо известной функцией неопределенности $\Psi(\tau; F)$ [3] по параметрам время, частота. В нашем случае $\tau = \frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2)$, $F = \omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)$. Чтобы получить обобщенную функцию неопределенности, необходимо функцию неопределенности $\Psi \left[\frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2); \omega \frac{x}{c} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \right]$ проинтегрировать по раскрытию антенны с весом $\exp \left\{ -j\omega \frac{x}{c} (\psi_1 - \psi_2) \right\}$.

Как следует из (11) A_{11} пропорционально второй производной от обобщенной функции неопределенности сигнала по параметрам ψ и $\dot{\psi}$ в точке $(\psi_1 = \psi_2; \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2)$. A_{11} и A_{22} соответственно пропорциональны вторым производным от сечений обобщенной функции в плоскости $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$ и $\psi_1 = \psi_2$.

Таким образом, точность системы измерения ψ и $\dot{\psi}$ будет определяться при заданном отношении сигнал-помеха видом обобщенной пространственно-временной функции неопределенности сигнала по измеряемым параметрам.

Расчет корреляционной матрицы ошибок измерения параметров сводится к обращению матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Элементы корреляционной матрицы определяются формулами

$$K_{11} = \frac{1}{\Delta} A_{22}; \quad K_{22} = \frac{1}{\Delta} A_{11}; \quad K_{12} = K_{21} = \frac{1}{\Delta} A_{12}. \quad (14)$$

где Δ — определитель матрицы

$$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}. \quad (15)$$

Представим каждое из выражений A_{ij} в следующем виде:

$$A_{11} = \frac{1}{N_0 \lambda} \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} \operatorname{Re} [\Phi(\psi_1; \psi_2; \dot{\psi})]_{\psi_1 = \psi_2 = \psi} = -\frac{i}{N_0 \lambda} \operatorname{Re} \Phi_{\psi}^* (\psi; \dot{\psi}); \quad (16)$$

$$A_{22} = \frac{1}{N_0 \lambda} \frac{\partial^2}{\partial \dot{\psi}_1 \partial \dot{\psi}_2} \operatorname{Re} [\Phi(\psi; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2)]_{\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}} = -\frac{i}{N_0 \lambda} \operatorname{Re} \Phi_{\dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi}); \quad (17)$$

$$A_{12} = \frac{1}{N_0 \lambda} \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \dot{\psi}_2} \operatorname{Re} [\Phi(\psi_1; \psi_2; \dot{\psi}_2)]_{\psi_1 = \psi_2 = \psi, \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}} = -\frac{i}{N_0 \lambda} \operatorname{Re} \Phi_{\psi \dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi}). \quad (18)$$

Подставляя (16—18) в (14), получаем сравнительно простые расчетные соотношения для определения потенциальной дисперсии оценок

$$\sigma_{\psi}^2 = K_{11} = \frac{N_0 \lambda}{|\operatorname{Re} \Phi_{\psi}^* (\psi; \dot{\psi})|} \cdot \frac{1}{1-r^2}; \quad (19)$$

$$\sigma_{\dot{\psi}}^2 = K_{22} = \frac{N_0 \lambda}{|\operatorname{Re} \Phi_{\dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi})|} \cdot \frac{1}{1-r^2}; \quad (20)$$

$$\sigma_{\psi \dot{\psi}}^2 = K_{12} = \frac{N_0 \lambda}{|\operatorname{Re} \Phi_{\psi \dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi})|} \cdot \frac{r^2}{1-r^2}, \quad (21)$$

где

$$r^2 = \frac{|\operatorname{Re} \Phi_{\psi \dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi})|^2}{\operatorname{Re} \Phi_{\psi}^* (\psi; \dot{\psi}) \operatorname{Re} \Phi_{\dot{\psi}}^* (\psi; \dot{\psi})}. \quad (22)$$

Выражения для потенциальных дисперсий оценок измеряемых параметров при пространственно-временной обработке получились аналогичными по форме выражениям для потенциальных дисперсий при чисто временной обработке [1].

Из совпадения функции неопределенности [3] и функции неопределенности в нашем случае следует, что требования, которым должна удовлетворять функция неопределенности [3] в отношении разрешающей способности системы, однозначности и точности отсчета параметров полностью переходят в требования к функции неопределенности (12).

Так, для обеспечения однозначности отсчета функция неопределенности должна иметь во всей области изменения параметров ψ и $\dot{\psi}$ один резко выраженный максимум. Точность и разрешающая способность системы будут определяться шириной этого максимума.

Вид функции неопределенности в общих чертах предопределяет схему оптимальной обработки. Из (12) следует, что сведения о ψ содержатся во времени запаздывания, а сведения $\dot{\psi}$ в изменении частоты, несущей по апертуре. При определенных конкретных значениях ψ и $\dot{\psi}$ каждой точке апертуры будет соответствовать свое определенное значение времени запаздывания и смещения частоты, определяемые как значениями параметров ψ и $\dot{\psi}$, так и координатами точки апертуры.

Оптимальная обработка принимаемых колебаний

Рассмотрим вопрос о построении функциональной схемы, реализующей оптимальную обработку сигнала. Прямым методом получения наилучшей оценки является формирование оптимального выходного эффекта и нахождение точки его максимального подъема.

Как следует из выражения (5), вся информация об угловых координатах содержится во втором слагаемом показателя экспоненты. И поэтому выражение

$$Y(\psi; \dot{\psi}) = K \int_{-L}^L \int_0^T y(t; x) s(t; x, \psi; \dot{\psi}) dt dx \quad (23)$$

может быть использовано для формирования оптимального выходного эффекта. Оптимальная обработка сводится к формированию функции $Y(\psi; \dot{\psi})$ для полезных параметров. Значения параметров ψ и $\dot{\psi}$, которые соответствуют максимуму функции $Y(\psi; \dot{\psi})$ и принимаются за оценку.

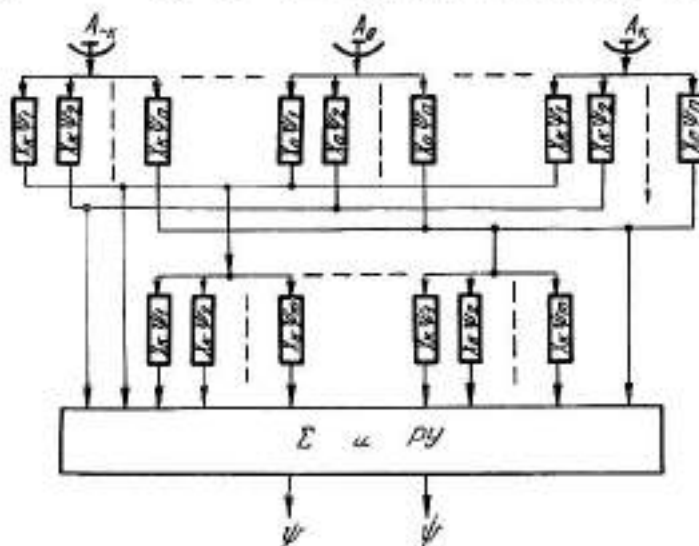


Рис. 1.

Подстановка (3) в выражение для оптимального выходного эффекта дает

$$Y(\psi; \dot{\psi}) = K \int_{-L}^L \int_0^T y(t; x) \dot{S} \left(t - \frac{x}{c} \psi \right) \exp \left\{ j\omega \left(t - \frac{x}{c} \psi - \frac{x}{c} \dot{\psi} t \right) + j\varphi \right\} dt dx \quad (24)$$

Как следует из этого выражения, система оптимальной обработки, обеспечивающая такой выходной эффект, должна быть пространственно-временной и не может разделяться на пространственную обработку и на временную.

Представим $Y(\psi; \dot{\psi})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y(\psi; \dot{\psi}) &\approx K \sum_x \int_0^T y(t; x) \dot{S} \left(t - \frac{x}{c} \psi \right) \exp \left\{ j\omega \left(t - \frac{x}{c} \psi - \frac{x}{c} \dot{\psi} t \right) + j\varphi \right\} dt = \\ &= h \sum_x \int_0^T y(t; x) \dot{S} \left(t - \frac{x}{c} \psi \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \psi \right) + j\varphi \right\} dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\omega_i = \omega - \frac{x_i}{c} \dot{\psi}. \quad (26)$$

Схема обработки, практически обеспечивающая такой выходной эффект, показана на рис. 1. Система обработки строится в виде совокупности параллельных каналов, настроенных на фиксированные значения параметров ψ и $\dot{\psi}$. В каждой точке апертуры x_i производится операция свертки принимаемого колебания $y(t; x_i)$ с сигналом $s(t; x_i; \psi; \dot{\psi})$. Прием каждой элементарной антенной производится по своей частоте, определяемой параметром сигнала $\dot{\psi}$.

Число дискретных значений параметров ψ и $\dot{\psi}$ или число независимых каналов и частотный сдвиг между ними должны определяться для каждого конкретного типа сигнала и конкретной апертуры антенны, как это будет показано в дальнейшем.

Точность измерения ψ и $\dot{\psi}$ при использовании импульсного сигнала

Определим предельную точность измерения параметров ψ и $\dot{\psi}$ при использовании импульсного сигнала с колокольной огибающей

$$\dot{S}(t) = S_0 \exp\left(-\frac{\beta^2 t^2}{\tau}\right) = S_0 \exp(-\beta^2 t^2) \quad (27)$$

с постоянной мгновенной частотой колебаний.

Пусть в интервал наблюдения попадает один радиоимпульс, создающий на апертуре антенны $[-L \div L]$ напряженность поля

$$s(t; x; \psi; \dot{\psi}) = \operatorname{Re} S_0 \exp(-\beta^2 t^2) \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\psi - \frac{x}{c}\dot{\psi}t\right)\right]. \quad (28)$$

Для сигнала (28) функция неопределенности будет

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1, \dot{\psi}_1; \psi_2, \dot{\psi}_2) &\approx \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-L}^L \exp\left\{-j\omega \frac{x}{c}(\psi_1 - \psi_2)\right\} dx \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2 \exp\left\{-\beta^2\left(t - \frac{x}{c}\psi_1\right)^2\right\} \exp\left\{-\beta^2\left(t - \frac{x}{c}\psi_2\right)^2\right\} \exp\left\{-j\omega \frac{x}{c}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)t\right\} dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Замена пределов интегрирования на бесконечные во внутреннем интеграле сделана в предположении, что $T > \tau$.

Пронзводя несложные преобразования в (29), получим

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1, \dot{\psi}_1; \psi_2, \dot{\psi}_2) &= S_0^2 \frac{V\pi}{2V2\beta} \int_{-L}^L \exp\left\{-\frac{x^2}{8\beta^2 c^2} \left[4\beta^4(\psi_1 - \psi_2)^2 + \omega^2(\psi_1 - \psi_2)^2 + \right.\right. \\ &\left. + j\beta^2\omega(\psi_1 + \psi_2)(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)\right] - j\omega \frac{x}{c}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)\right\} dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Полагая в выражении (30) $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}$, получим

$$\Phi(\psi_1, \psi_2) = S_0^2 \frac{V\pi}{2V2\beta} \int_{-L}^L \exp\left\{-x^2 \frac{\beta^2}{2c^2}(\psi_1 - \psi_2) - jx \frac{\omega}{c}(\psi_1 - \psi_2)\right\} dx. \quad (31)$$

А при $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ будем иметь

$$\Phi(\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \psi) = S_0^2 \frac{V_0^2}{2V^2 \beta} \int_{-L}^L \exp \left\{ -x^2 \frac{\omega^2 (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)^2 + \beta^2 \omega^2 \psi (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)}{8\beta^2 \omega^2} \right\} dx. \quad (32)$$

Подставляя (30—32) в (19—22), получим

$$\sigma_{\dot{\psi}}^2 = 0; \quad \sigma_{\psi}^2 = \frac{3V^2}{q \left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)^2}; \quad \sigma_{\dot{\psi}}^2 = \frac{3V^2}{q \frac{1}{4\pi} \left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)^2 \omega^2}, \quad (33)$$

где

$$q = \frac{S_0 \tau L}{N_s t}. \quad (34)$$

Полученные выражения определяют предельную точность измерения параметров сигнала ψ и $\dot{\psi}$. Как и следовало ожидать, $\sigma_{\dot{\psi}}^2$ определяется отношением сигнал-помеха и относительными размерами апертуры $\left(\frac{L}{\lambda}\right)$, а σ_{ψ}^2 , кроме того, и $\tau \omega^2$.

Обобщенная функция неопределенности импульсного сигнала

Потенциальные показатели системы определяются видом функции неопределенности используемого сигнала. Область, занимаемая главным выбросом функции, определяет разрешающую способность по $\dot{\psi}$ и ψ , неоднозначность и точность отсчета параметров.

Определим, какой вид будет иметь функция неопределенности для сигнала (28). Будем рассматривать нормированную функцию неопределенности

$$\Phi_n(\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \psi_1; \psi_2) = \frac{\int_{-L}^L \int_0^{\tau} s(t; x; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2) s^*(t; x; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2) dt dx}{\int_{-L}^L \int_0^{\tau} s^*(t; x; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2) dt dx}. \quad (35)$$

Заменим в (28) колокольную огибающую сигнала прямоугольной

$$S(t) = \begin{cases} S_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ или } t > \tau. \end{cases} \quad (36)$$

Это приведет лишь к незначительному отличию полученной функции неопределенности от реальной, но значительно сократит вычисление.

Замечая, что знаменатель в (35) равен $S_0^2 \tau L$, находим

$$\Phi_n(\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \psi_1; \psi_2) = \frac{1}{S_0^2 \tau L} \cdot \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_0^{\tau} S_0^2 \cos \omega \frac{x}{c} [(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) + (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) t] dt dx. \quad (37)$$

Производя несложные преобразования, получим

$$\Phi_n(\dot{\psi}^*; \dot{\psi}^*) = \frac{1}{\tau^2} [Si(\dot{\psi}^* + \dot{\psi}^*) - Si(\dot{\psi}^*)], \quad (38)$$

где

$$\psi^* = 2\pi \frac{L}{\lambda} (\psi_1 - \psi_2); \quad \dot{\psi}^* = 2\pi \frac{L}{\lambda} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \tau;$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

На рис. 2 показан общий вид функции неопределенности сигнала. Ее форма определяется как формой сигнала, так и линейными разме-

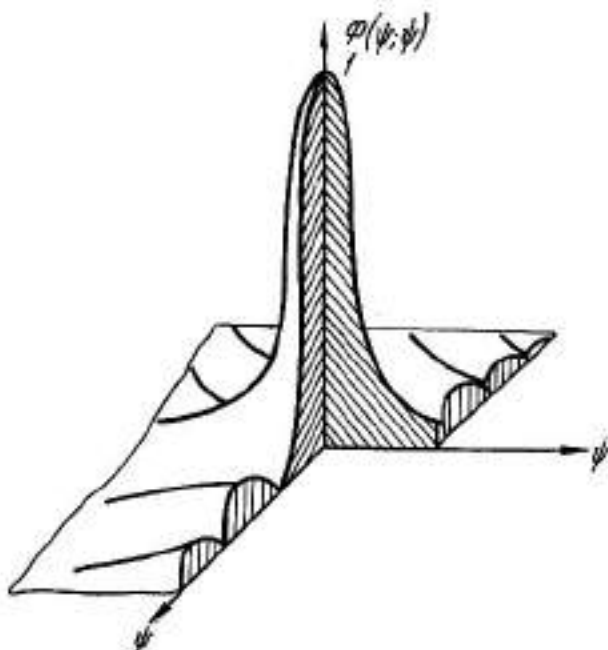


Рис. 2

рами апертуры. Конфигурация области выброса на рабочем участке плоскости $(\psi; \dot{\psi})$ предопределяет в общих чертах схему оптимальной обработки. Выбор необходимого числа каналов производится следующим образом. Для того, чтобы хотя бы в одном канале имел место резкий выброс функции неопределенности, необходимо сдвиг между каналами принять не больше, чем протяженность области выброса по соответствующей оси.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена оптимальная пространственно-временная система обработки, предназначенная для измерения углов и угловых скоростей движущегося излучающего объекта. Получены выражения для определения потенциальных погрешностей отсчета угловой координаты и ее производной для сигнала произвольной формы.

Показано, что оптимальная система обработки в общем случае не может быть разделена на пространственную и временную, а должна быть совместной пространственно-временной.

Для импульсного сигнала с колокольной огибающей с постоянной мгновенной частотой колебаний рассчитаны значения дисперсий оценок параметров и рассмотрен вид пространственно-временной функции неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Фалькович. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. Изд-во «Сов. радио», 1961.
 2. С. Е. Фалькович. О задаче определения оптимальной пространственно-временной системы обработки сигналов. «Радиотехника и электроника», 1966, № 5.
 3. Ф. М. Вудворд. Теория вероятностей и теория информации с приложениями в радиолокации. Изд-во «Сов. радио», 1955.
 4. П. А. Бакут и др. Вопросы статистической теории радиолокации, т. 1, 2. Изд-во «Сов. радио», 1963-64.
-

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин

В радиолокации и радиосвязи может иметь место рассеяние электромагнитных волн случайной совокупностью рассеивателей. При этом параметры рассеянной волны оказываются случайными величинами, статистические характеристики которых определяются свойствами рассеивателей.

Настоящая работа посвящена анализу таких параметров случайной совокупности рассеивателей, которые связаны линейной зависимостью с основными статистическими параметрами рассеянной волны. Рассмотрение проводится таким образом, что характеристики рассеянной волны могут быть определены для произвольной поляризации облучения.

По аналогии с понятием матрицы рассеяния в статическом случае [1] совокупность статистических параметров, характеризующих свойства рассеивателей для двух ортогональных поляризаций облучающей волны, назовем статистической матрицей рассеяния. Для определенности рассмотрим радиолокационный случай, когда случайная совокупность рассеивателей представляет собой флюктуирующую радиолокационную цель, а статистическая матрица рассеяния по принципу взаимности симметрична.

Пусть некоторой флюктуирующей цели соответствует в том или ином поляризационном базисе [2] статистическая матрица рассеяния

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{11} & \hat{L}_{12} \\ \hat{L}_{12} & \hat{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

элементы которой $\hat{L}_{pq} = L_{pq}e^{j\varphi_{pq}}$ ($p, q = 1, 2$) суть комплексные случайные величины. Матрица \hat{L} следующим образом определяет связь между облучающей и рассеянной волнами:

$$\hat{E}_s = \hat{L}\hat{E}_i, \quad (2)$$

где $\hat{E}_s = \begin{pmatrix} E_{1s} \\ E_{2s} \end{pmatrix}$ и $E_i = \begin{pmatrix} E_{1i} \\ E_{2i} \end{pmatrix}$ — двухкомпонентные комплексные векторы-столбцы рассеянной и облучающей волн соответственно.

В общем случае элементы L_{pq} имеют некоторые средние значения, соответствующие стабильной (регулярной) составляющей отраженного сигнала, тогда как отклонения от этого среднего значения обуславливают случайную (флюктуирующую) составляющую. Из формулы (1) следует, что в каждый фиксированный момент времени статистическая матрица рассеяния образуется совокупностью трех комплексных или шести вещественных случайных величин. Выберем в качестве последних

модули и аргументы элементов \dot{L}_{pq} и предположим, что существует дифференциальный закон распределения вероятностей

$$W(\dot{L}) = W_2(L_{11}, L_{12}, L_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}), \quad (3)$$

интегрируемый в области существования переменных L_{pq} и γ_{pq} . Не высказывая каких-либо предположений о характере закона $W(\dot{L})$, запишем выражения для нахождения его числовых характеристик.

Обозначим среднее значение матрицы \dot{L}

$$m\dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\dot{m}_{pq} = \text{Re} \{ \dot{m}_{pq} \} + j \text{Im} \{ \dot{m}_{pq} \} \quad (p, q = 1, 2).$$

Элементы матрицы (4) могут быть найдены при известном законе распределения (3) по формулам

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1q} = & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_2(L_{pq}, \gamma_{pq}) L_{pq} \cos \gamma_{pq} dL_{pq} d\gamma_{pq} + \\ & + j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_2(L_{pq}, \gamma_{pq}) L_{pq} \sin \gamma_{pq} dL_{pq} d\gamma_{pq} \end{aligned} \quad (5)$$

Двухмерные законы распределения $W_2(L_{pq}, \gamma_{pq})$ получены интегрированием закона (3) по четырем остальным элементам. Матрица $m\dot{L}$ характеризует некоторые средние параметры рассеивателей.

Рассмотрим теперь матрицу \dot{M} моментов второго порядка элементов статистической матрицы \dot{L} , которая описывает поляризационные свойства совокупности рассеивателей в целом, с учетом регулярной и флуктуирующей составляющих рассеянной волны.

Образуется матрица \dot{M} с помощью вспомогательной матрицы

$$\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} \dot{L}_{11} & 0 & 0 \\ \dot{L}_{12} & 0 & 0 \\ \dot{L}_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

следующим образом:

$$\dot{M} = M[\dot{\Lambda}\Lambda'], \quad (7)$$

где Λ' — матрица, эрмитовски сопряженная с матрицей $\dot{\Lambda}$.

Раскрывая выражение (7), получим

$$\dot{M} = M \begin{pmatrix} \dot{L}_{11}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{11}\dot{L}_{22}^* \\ \dot{L}_{12}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{12}\dot{L}_{22}^* \\ \dot{L}_{22}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{22}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{22}\dot{L}_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{11} & M_{11}^{12} & M_{11}^{22} \\ M_{12}^{11} & M_{12}^{12} & M_{12}^{22} \\ M_{22}^{11} & M_{22}^{12} & M_{22}^{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

(* — знак взятия комплексно-сопряженной величины).

Каждый из девяти моментов второго порядка M_{mn}^{pq} при известном законе распределения $W(\dot{L})$ определяется выражением вида

$$\begin{aligned} M_{mn}^{pq} = & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_2(L_{mn}, L_{pq}, \gamma_{mn}, \gamma_{pq}) \times \\ & \times L_{mn} L_{pq} e^{i\gamma_{mn}} e^{-i\gamma_{pq}} dL_{mn} dL_{pq} d\gamma_{mn} d\gamma_{pq} \end{aligned} \quad (9)$$

где $m, n, p, q = 1, 2$, а четырехмерные законы $W_4(\delta_{mn}, L_{pq}, \gamma_{mn}, \gamma_{pq})$ получены интегрированием закона (3) по двум остальным элементам.

При $pq \neq mn$ будем иметь комплексные смешанные моменты второго порядка

$$M_{mn}^{pq} = \text{Re} \{ \dot{M}_{mn}^{pq} \} + j \text{Im} \{ \dot{M}_{mn}^{pq} \}, \quad (10)$$

а при $pq = mn$ — вещественные начальные моменты второго порядка элементов статистической матрицы рассеяния \dot{L} . Заметим, что матрица \dot{M} является эрмитовской матрицей.

На основании соотношений (4) и (8) можно утверждать, что матрица \dot{L} может быть охарактеризована по ансамблю тремя вещественными начальными моментами второго порядка M_{mn}^{mn} , тремя комплексными смешанными моментами второго порядка \dot{M}_{mn}^{pq} и тремя комплексными средними \dot{m}_{pq} . Следовательно, описание статистической матрицы рассеяния с помощью ее моментов порядка не выше второго требует задания пятнадцати вещественных величин. В некоторых случаях такое описание может оказаться исчерпывающим. Например, для нормально распределенных элементов \dot{L}_{mn} статистической матрицы рассеяния задание матриц (4) и (8) вполне определяет закон распределения вероятностей (3).

Перейдем теперь к рассмотрению выражений, связывающих элементы матриц $m\dot{L}$ и \dot{M} со статистическими параметрами компонент рассеянной волны. Воспользовавшись развернутой записью выражения (2) с учетом сдвига фаз δ между компонентами облучающей волны

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1s} &= L_{11}E_{1s} + \dot{L}_{12}E_{2s}e^{j\delta}, \\ \dot{E}_{2s} &= L_{21}E_{1s} + L_{22}E_{2s}e^{j\delta}, \end{aligned} \quad (11)$$

найдем среднее значение матрицы-столбца E_s ,

$$m\dot{E}_s = \begin{pmatrix} m\dot{E}_{1s} \\ m\dot{E}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \text{Re} \{ \dot{E}_{1s} \} + j m \text{Im} \{ \dot{E}_{1s} \} \\ m \text{Re} \{ \dot{E}_{2s} \} + j m \text{Im} \{ \dot{E}_{2s} \} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Среднее значение каждой из ортогонально поляризованных компонент рассеянной волны определяется элементами матрицы $m\dot{L}$ и параметрами облучающей волны

$$m\dot{E}_{1s} = [E_{11} \text{Re} \{ \dot{m}_{11} \} + E_{21} (\cos \delta \text{Re} \{ \dot{m}_{12} \} - \sin \delta \text{Im} \{ \dot{m}_{12} \}) + j \{ E_{11} \text{Im} \{ \dot{m}_{11} \} + E_{21} (\sin \delta \text{Re} \{ \dot{m}_{12} \} + \cos \delta \text{Im} \{ \dot{m}_{12} \}) \}]; \quad (13a)$$

$$m\dot{E}_{2s} = [E_{12} \text{Re} \{ \dot{m}_{12} \} + E_{22} (\cos \delta \text{Re} \{ \dot{m}_{22} \} - \sin \delta \text{Im} \{ \dot{m}_{22} \}) + j \{ E_{12} \text{Im} \{ \dot{m}_{12} \} + E_{22} (\sin \delta \text{Re} \{ \dot{m}_{22} \} + \cos \delta \text{Im} \{ \dot{m}_{22} \}) \}]. \quad (13b)$$

В матричном виде формулы (13a) и (13b) запишем следующим образом:

$$m\dot{E}_s = m\dot{L}\dot{E}_s. \quad (14)$$

Вторые начальные моменты ортогональных компонент рассеянной волны могут быть представлены как функции матрицы \dot{M} и параметров облучающей волны. Для этого образуем вспомогательную матрицу

$$\dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{1s} & 0 \\ \dot{E}_{2s} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

и найдем матрицу вторых моментов рассеянной волны Ψ аналогично формуле (7)

$$\Psi = M\{\dot{\Sigma}\dot{\Sigma}^*\} = M\left(\begin{array}{cc} \dot{E}_{1s}\dot{E}_{1s}^* & \dot{E}_{1s}\dot{E}_{2s}^* \\ \dot{E}_{2s}\dot{E}_{1s}^* & \dot{E}_{2s}\dot{E}_{2s}^* \end{array}\right) = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 \\ M_2^1 & M_2^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица Ψ так же, как и матрица \dot{M} , определяемая формулой (8), является эрмитовской, поскольку ее диагональные элементы вещественны, а $M_1^2 = (M_2^1)^*$. Раскрывая формулу (16) с учетом (8) и (11), получаем в явном виде зависимость вторых моментов компонент рассеянной волны от элементов матрицы \dot{M} и поляризации облучения

$$\begin{aligned} M_1^1 &= M\{\dot{E}_{1s}\dot{E}_{1s}^*\} = M\{\dot{L}_{11}\dot{L}_{11}^*E_{1s}^2 + \dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \\ &\quad + \dot{L}_{11}^*\dot{L}_{12}E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^*E_{2s}^2\} = \\ &= M_{11}^{11}E_{1s}^2 + M_{11}^{12}E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + M_{11}^{21}E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + M_{12}^{12}E_{2s}^2 = \\ &= M_{11}^{11}E_{1s}^2 + 2(\cos\beta \operatorname{Re}\{M_{11}^{12}\} + \sin\beta \operatorname{Im}\{M_{11}^{12}\})E_{1s}E_{2s} + \\ &\quad + M_{12}^{12}E_{2s}^2; \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} M_1^2 &= M\{\dot{E}_{1s}\dot{E}_{2s}^*\} = M\{\dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \dot{L}_{11}\dot{L}_{22}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \\ &\quad + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^*E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + \dot{L}_{12}\dot{L}_{22}^*E_{2s}^2\} = \\ &= M_{11}^{12}E_{1s}^2 + M_{11}^{22}E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + M_{12}^{12}E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + M_{12}^{22}E_{2s}^2; \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} M_2^1 &= M\{\dot{E}_{2s}\dot{E}_{1s}^*\} = M\{\dot{L}_{12}\dot{L}_{11}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \\ &\quad + \dot{L}_{22}\dot{L}_{11}^*E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + \dot{L}_{22}\dot{L}_{22}^*E_{2s}^2\} = \\ &= M_{12}^{12}E_{1s}^2 + M_{12}^{22}E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + M_{22}^{11}E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + \\ &\quad + M_{22}^{22}E_{2s}^2 = (M_1^2)^*; \end{aligned} \quad (17c)$$

$$\begin{aligned} M_2^2 &= M\{\dot{E}_{2s}\dot{E}_{2s}^*\} = M\{\dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^*E_{1s}^2 + \dot{L}_{12}\dot{L}_{22}^*E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + \\ &\quad + \dot{L}_{22}\dot{L}_{12}^*E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + \dot{L}_{22}\dot{L}_{22}^*E_{2s}^2\} = \\ &= M_{12}^{12}E_{1s}^2 + M_{12}^{22}E_{1s}E_{2s}e^{-i\beta} + M_{22}^{12}E_{1s}E_{2s}e^{i\beta} + M_{22}^{22}E_{2s}^2 = \\ &= M_{12}^{12}E_{1s}^2 + 2(\cos\beta \operatorname{Re}\{M_{12}^{22}\} + \sin\beta \operatorname{Im}\{M_{12}^{22}\}) \times E_{1s}E_{2s} + M_{22}^{22}E_{2s}^2. \end{aligned} \quad (17d)$$

Соотношения (14) и (16) являются основополагающими при рассмотрении различных методов измерения статистической матрицы рассеяния \dot{L} . Под измерением матрицы \dot{L} будем понимать нахождение параметров $m_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}^{rs}$ по непосредственно измеряемым величинам $m\dot{E}_s$ и M_{α}^r .

Различные методы измерения отличаются друг от друга числом используемых поляризаций облучения и числом измеряемых параметров рассеянной волны. Формулы (14) и (16) позволяют для каждого метода найти минимальное число различных поляризаций облучающей волны, необходимое для полного определения матриц $m\dot{L}$ и \dot{M} .

Следует иметь в виду, что расчет комплексных средних значений $m_{\alpha\beta}$ непосредственно по формулам (13) или (14) требует знания величин $m\dot{E}_{1s}$ и $m\dot{E}_{2s}$ с точностью до фазы. Необходимые измерения могут быть выполнены либо с помощью когерентной аппаратуры, либо путем использования большого числа различных поляризаций облучающей волны в сочетании с измерением на приемной стороне только средних значений амплитуд компонент.

Минимальное число различных поляризаций облучения, равное двум, соответствует предположениям о том, что, во-первых, используются ког-

рентные методы приема, и, во-вторых, приемная антенна имеет два идеально развязанных приемных тракта для ортогонально поляризованных компонент. Наиболее удобно использовать для облучения те же ортогональные поляризации, что и на приемной стороне. В этом случае измеряемые параметры разделяются, и для каждой поляризации облучающей волны на приемной стороне может быть определена своя группа параметров матрицы L . Полное описание статистической матрицы рассеяния посредством моментов порядка не выше второго требует одновременного измерения восьми параметров рассеянной волны для каждой из двух поляризаций облучения.

Другие методы измерения статистической матрицы рассеяния могут рассматриваться на основе формул (14) и (16), как обобщение на случай флюктуирующей цели методов, изложенных в работе [3] применительно к статической матрице.

В целом предлагаемые методы описания и измерения статистических свойств случайной совокупности рассеивателей в фиксированный момент времени представляются достаточно полными для решения ряда практических задач, таких, например, как увеличение или уменьшение интенсивности отражений, распознавание различных совокупностей рассеивателей и т. п.

Авторы выражают глубокую признательность С. Г. Зубковичу за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Менцер. Диффракция и рассеяние радиоволн. Изд-во «Сов. радио», М., 1958.
2. C. D. Graves. Radar Polarization Power Scattering Matrix. Proc. IRE, 1966, v. 44, № 2, p. 248.
3. I. R. Nyuen. Measurement of the Target Scattering Matrix. Proc. IEEE, 1965, v. 53, № 8, p. 936.

**К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ
ФЛЮКТУИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ МЕШАЮЩИХ ОТРАЖЕНИЙ
ПРИ РАЗНЕСЕННОМ ПРИЕМЕ**

В. М. Проценко

В работе [1] решена задача об оптимальном обнаружении полезного сигнала на фоне тепловых шумов и мешающих отражений со случайными амплитудами, распределенными по закону Релея, и случайными начальными фазами с равномерным распределением. При этом предполагалось, что обнаружение осуществляется путем анализа составляющих поля как функций времени t и координаты x точек раскрыва апертуры.

Для непрерывной апертуры получено выражение, определяющее вид оптимальной обработки

$$Z = \left| \iint \dot{U}(t, x) \dot{R}(t, x) dt dx \right|, \quad (1)$$

где $\dot{U}(t, x)$ — комплексная амплитуда принятого сигнала,

$\dot{R}(t, x)$ — комплексная амплитуда опорного сигнала, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$\dot{R}(t, x) + \iint \varphi(s, y, t, x) \dot{R}(s, y) ds dy = \dot{U}_c(t, x) \quad (2)$$

$\dot{U}_c(t, x)$ — комплексная амплитуда полезного сигнала

$$\varphi(s, y, t, x) = \frac{2}{N_s \Lambda_s} \sum_{j=1}^m \dot{U}_j(t, x) \dot{U}_j^*(s, y), \quad (3)$$

m — число мешающих отражателей.

Приведенные соотношения могут быть использованы при решении задачи оптимального обнаружения для апертуры с разрывами. Рассмотрим случай, когда мешающие отражатели равномерно распределены по угловым координатам. Примем, что полезный и мешающие сигналы узкополосные и отличаются угловыми координатами α . При этом выражения для комплексных амплитуд полезного $\dot{U}_c(t, x)$ и мешающих $\dot{U}_j(t, x)$ сигналов запишутся в следующем виде:

$$\dot{U}_c(t, x) = \dot{A}_0(t) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha_0}, \quad (4)$$

$$\dot{U}_j(t, x) = \dot{A}_j(t) \sqrt{\frac{b}{4\pi} \sin \theta_j \Delta \theta_j \Delta \varphi_j}, \quad (5)$$

$$b = \frac{[\dot{A}_{0j}(t)]^2}{[\dot{A}_0(t)]^2} \frac{2\pi}{\Delta \omega_j}, \quad (6)$$

где $\dot{A}_{e_j}(t)$ — комплексная амплитуда j мешающего сигнала в точке $x = 0$,
 $\dot{A}_0(t)$ — комплексная амплитуда полезного сигнала в точке $x = 0$,
 $\Delta\Omega_j$ — телесный угол отражающего элемента с номером j ,
 b_j — полярное расстояние и φ_j — долгота j -го отражателя в сферической системе координат,
 α_j — угол, удовлетворяющий уравнению

$$\cos \alpha_j = \sin \theta_j \cos \varphi_j. \quad (7)$$

Подставив (5) в (3) и перейдя от суммы к интегралу, после интегрирования по θ и φ , получим

$$\varphi(s, y, t, x) = \frac{2b}{N_0 \lambda_0} \dot{A}_0^*(s) A_0(t) \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)}{\frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)}. \quad (8)$$

После подстановки (4) и (8) в (2) решение уравнения (2) будем искать в виде $\dot{R}(t, x) = \dot{A}_0(t) \dot{r}(x)$, где $\dot{r}(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\dot{r}(x) + \frac{2\varepsilon}{\lambda_0} \int_{x-\frac{\lambda_0}{2}}^{x+\frac{\lambda_0}{2}} \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)}{\frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)} \dot{r}(y) dy = e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0}. \quad (9)$$

Значение ε равно

$$\varepsilon = \frac{b}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{A}_0(s)|^2 ds.$$

Приближенное решение интегрального уравнения (9) будет найдено для случая, когда симметричное ядро $K(x, y) = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)}{\frac{2\pi}{\lambda_0} (x-y)}$ аппроксимировано симметричным ядром

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x - \frac{\lambda_0}{2} < y < x + \frac{\lambda_0}{2} \\ 0 & \text{при } x + \frac{\lambda_0}{2} < y < x - \frac{\lambda_0}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Решением уравнения (9) будет

$$\dot{r}(x) = B e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0}, \quad (11)$$

где

$$B = \frac{\pi \cos \alpha_0}{\pi \cos \alpha_0 + 2\varepsilon \sin(\pi \cos \alpha_0)}. \quad (12)$$

Таким образом, функция $\dot{R}(t, x)$ имеет вид

$$\dot{R}(t, x) = B \cdot \dot{A}_0(t) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0}. \quad (13)$$

Подставив значение комплексной амплитуды принятого сигнала $\dot{U}(t, x) = \dot{U}(t) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0}$, а также значение $\dot{R}(t, x)$, определяемое соотношением

(13) в (1) и учитывая, что пределы интегрирования по x будут от $-l_2$ до $-l_1$ и от l_1 до l_2 , получим

$$Z = \left| \frac{1}{\lambda_0} \left[\int_{-l_2}^{-l_1} \dot{U}(t) \dot{A}(t) B(dt) \int_{-l_2}^{-l_1} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0} dx + \int_{l_1}^{l_2} \dot{U}(t) \dot{A}^*(t) B dt \int_{l_1}^{l_2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha_0} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \cos \alpha} dx \right] \right|. \quad (14)$$

После интегрирования и необходимых преобразований найдем

$$Z = \left| \frac{2B(l_2 - l_1)}{\lambda_0} \cos \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 + l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right] \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0)} \int_{-l_2}^{-l_1} \dot{U}(t) \dot{A}^*(t) dt \right|. \quad (15)$$

Таким образом, оптимальная обработка при разнесенном приеме сводится к оптимальной временной обработке, не отличающейся от обработки при одноканальном приеме, и к оптимальной пространственной обработке, приводящей к образованию оптимальной характеристики направленности системы разнесенного приема

$$\gamma(x) = \cos \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 + l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right] \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0)}. \quad (16)$$

Оптимальная характеристика направленности может быть получена путем применения двух многоэлементных антенн или же двух антенн с диаграммами направленности

$$\phi(x) = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]}{(l_2 - l_1) \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]}$$

и последующим суммированием огибающих, полученных в каждом канале приема.

В заключение выражаю благодарность Я. Д. Ширману за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман. Статистический анализ оптимального разрешения. «Радиотехника и радиоволноводы», 1961, № 8.
2. С. Г. Михлин. Интегральные уравнения ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

К ТЕОРИИ РАЗДЕЛЕНИЯ (СЕЛЕКЦИИ) РАДИОСИГНАЛОВ

А. Ф. Апорович

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

Основы общей теории линейной селекции разработаны Д. В. Агеевым, Л. Заде, А. А. Харкевичем [1, 2] и другими учеными. Общая теория нашла ряд практических применений, особенно при построении многоканальных систем радиосвязи.

Главное ограничение теории линейной селекции — необходимость считать фильтры, являющиеся избирательными элементами, идеальными, с *П*-образной характеристикой избирательности. Такие фильтры физически неосуществимы; их использование в теории часто приводит к потере существенных особенностей разделения радиосигналов, с которыми приходится встретиться на практике.

Во многих практических случаях ставится задача выделения нужного сигнала из случайным образом создавшейся совокупности радиосигналов. При этом важно учесть возможность прохождения сигналов не только внутри полосы пропускания, а и за ее пределами, которое будет иметь место при большом динамическом диапазоне входных сигналов. Учет такой возможности и постановка обоснованных требований к характеристикам избирательных элементов радиоприемника является весьма актуальной задачей в современных условиях массового использования радиотехнических средств.

Дополнительно следует отметить весьма важное обстоятельство, которое не отражается общей теорией линейной селекции. Процесс выделения нужных сигналов из некоторой совокупности не является чисто линейным. Действие линейной системы (фильтра) сводится к обеспечению заранее предопределенных преимуществ в прохождении полезных радиосигналов в соответствии с формой характеристики избирательности, но не исключает прохождения нежелательных радиосигналов. Дальнейшее использование именно нелинейной (пороговой) системы исключает прохождение посторонних радиосигналов, если они были в достаточной степени ослаблены линейной системой.

Эти рассуждения приводят к выводу, что для некоторых применений теория линейной селекции недостаточна; требуется построение другой модели процесса селекции с учетом особенностей прохождения радиосигналов через радиоприемник с реальными избирательными элементами.

Недостаточность линейной теории селекции особенно заметна при изучении условий деления потоков радиосигналов, образованных излучением массовых радиосредств. Такое деление (селекция) имеет место в радиосвязи, радиовещании, радиоразведке при большой плотности потока радиосигналов на входе приемника, отличающегося большим динамическим диапазоном.

2. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАЗДЕЛЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ

Пусть на входе радиоприемника действует совокупность радиосигналов, создаваемых с помощью N источников, различающихся по некоторому параметру x .

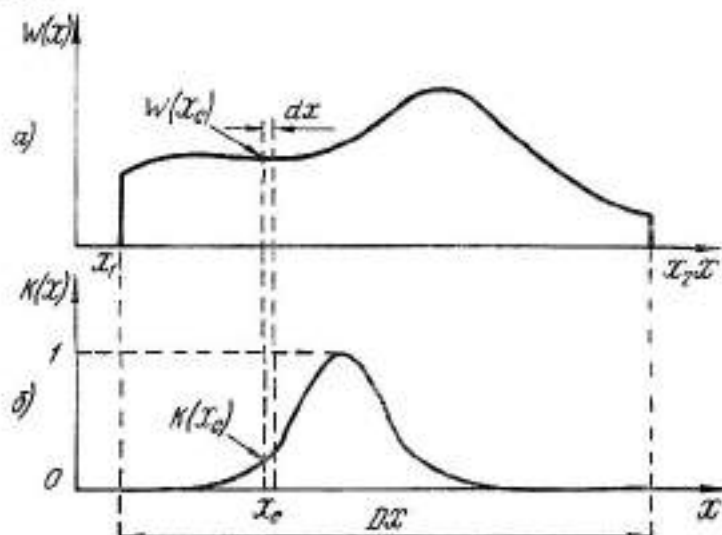


Рис. 1.

Известна функция $w(x)$ (рис. 1а), выражающая собой дифференциальный закон распределения параметра x в диапазоне Dx . Это значит, что нам заранее, априорно, известно, как по параметру x распределены действующие на входе приемника сигналы от N источников. Кривая $w(x)$ определяется статистически для некоторых условий, типичных с точки зрения применения нашего радиоприемника. При получении таких априорных сведений мы встретимся с такими же трудностями, которые известны из теории статистического радиоприема и которые не могут быть причиной отказа от применения этих априорных сведений.

К априорным сведениям следует отнести также распределение радиосигналов по мощности в точке радиоприема. Пусть такие сведения имеются в виде функции $w(P)$ (рис. 2), вид которой зависит от мощности отдельных источников, дальности до них из точки приема и от других причин. Функции $w(x)$ и $w(P)$ разные, однако для простоты записи они обозначены одной и той же буквой без индекса, что, по-видимому, не должно вести к недоразумениям. Из характеристик радиоприемника следует знать

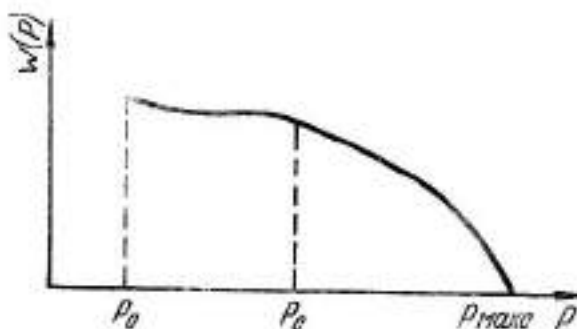


Рис. 2.

характеристику избирательности по x , заданную аналитически в виде функции $k(x)$ (см. рис. 1б), и характеристику чувствительности радиоприема, заданную в виде минимального (порогового) уровня мощности P_0 радиосигнала на входе приемника.

Определим, какое количество N_c источников будет приниматься приемником, если в точке его расположения действуют сигналы от N источников.

Выделим на рис. 1а и 1б при $x = x_c$ некоторый отрезок малой длины ($dx \ll Dx$). Найдем для этого отрезка число источников, сигналы которых пройдут на выход радиоприемника

$$dN_c = N \int_{P_c}^{P_{\max}} \omega(P) dP \omega(x_c) dx. \quad (1)$$

В формуле (1) приняты следующие обозначения и предположения:

1. $P_c = \frac{P_0}{k(x_c)}$. Это значит, что в соответствии с коэффициентом усиления по мощности $k(x_c)$ для данного значения параметра x_c установился новый порог приема P_c вместо P_0 , определенного для $k(x) = 1$.

2. Принимаем, что случайные величины P и x , представленные с помощью функций $\omega(P)$ и $\omega(x)$, статистически независимы.

3. Предполагается также, что кривая $\omega(x)$ является гладкой, так что для любого x_c в интервале dx за значение функции можно принять $\omega(x_c)$.

Заметим, что интеграл в выражении (1) — это функция от x , поскольку его нижний предел определяется значением $k(x)$. Упростим запись, введя обозначение

$$F[k(x)] = \int_{P_c}^{P_{\max}} \omega(P) dP. \quad (2)$$

Примерный вид $F[k(x)]$ показан на рис. 3. С учетом (2) можно записать

общее выражение для среднего числа N_c источников, радиосигналы которых пройдут через радиоприемник

$$N_c = N \int_{(D)} F[k(x)] \omega(x) dx. \quad (3)$$

Формулой (3) таким образом определено, какое количество источников радиосигналов после рассортировки их мощности в соответствии с кривой избирательности по параметру x обеспечит преодоление порога P_0 , если априори известны распределения сигналов на входе приемника в виде $\omega(x)$ и $\omega(P)$.

3. РАЗДЕЛЕНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ ПО n ПАРАМЕТРАМ

Подход к задаче при разделении радиосигналов по n параметрам остается таким же, как в одномерном случае.

Предполагаем, что имеются априорные сведения о мощности радиосигналов $\omega(P)$ и n -мерная функция $\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для простоты

будем считать, что $\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \omega(x_1)\omega(x_2)\dots\omega(x_n)$. При селекции по двум параметрам формула (3) может быть переписана в следующем виде:

$$N_{св} = N \int_{(D_{x_1})} \int_{(D_{x_2})} F_2[k_2(x_1, x_2)] \omega(x_1)\omega(x_2) dx_2 \quad (4)$$

В (4) имеется функция

$$F_2[k_2(x_1, x_2)] = \int_{P_{св, \kappa_2}} \omega(P) dP,$$

в которой

$$P_{св, \kappa_2} = \frac{P_0}{k_2(x_1, x_2)} = \frac{P_0}{k(x_1)k(x_2)},$$

если допустимо считать, что

$$k_2(x_1, x_2) = k(x_1)k(x_2).$$

Аналогично для n -мерного случая

$$N_{св} = N \int_{(D_{x_1})} \int_{(D_{x_2})} \dots \int_{(D_{x_n})} F_n[k_n(x_1, x_2, \dots, x_n)] \omega(x_1)\omega(x_2)\dots\omega(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (5)$$

Здесь $DX = DX_1, DX_2, \dots, DX_n$ — обобщенный диапазон изменения параметров x_1, x_2, \dots, x_n . Интеграл в (5) n -кратный.

Выражение (5) отвечает на поставленный вопрос о среднем числе источников радиосигналов которых будут проходить через радиоприемник, использующий селектирующие элементы по n параметрам.

Познакомимся с некоторыми примерами, иллюстрирующими применение формул (3) и (5).

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассчитать количество источников, радиосигналы которых пройдут на выход радиоприемника, настроенного на частоту f_0 с полосой пропускания частот ΔF и чувствительностью, характеризующейся пороговым уровнем мощности P_0 . Радиоприемник имеет частотную характеристику $k(f)$, снятую по мощности

$$k(f) = \begin{cases} 1 & [f_0 - \frac{\Delta F}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{\Delta F}{2}], \\ 0 & [f < f_0 - \frac{\Delta F}{2}, f > f_0 + \frac{\Delta F}{2}]. \end{cases}$$

Смесь радиосигналов на входе радиоприемника образована от N излучателей, причем

$$\omega(f) = \frac{1}{\Delta f}, \quad \omega(P) = \frac{1}{P_{\text{минс}}}.$$

Решение. Используем выражения (2) и (3)

$$F[k(f)] = \begin{cases} \frac{P_{\text{минс}} - P_0}{P_{\text{минс}}} & [f_0 - \frac{\Delta F}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{\Delta F}{2}], \\ 0 & [f < f_0 - \frac{\Delta F}{2}, f > f_0 + \frac{\Delta F}{2}]. \end{cases}$$

Сигнал на выходе существует только в полосе пропускания ΔF .

$$N_c = N \frac{P_{\text{макс}} - P_0}{P_{\text{макс}}} \frac{\Delta F}{Df}. \quad (6)$$

Решение весьма просто, особенно если положить, что $P_{\text{макс}} \gg P_0$. Тогда

$$N_c = N \frac{\Delta F}{Df}. \quad (7)$$

Такой результат можно было бы получить методами линейной селекции [1]. В этом простом результате (7) не учтены важные факторы: динамический диапазон принимаемых радиосигналов и чувствительность радиоприемника, чем выражение (6) не грешит.

Нетрудно видеть, что из соотношения (3) или в простейшем случае из соотношений типа (6), полученных для конкретных условий, можно находить отношение $\frac{\Delta F}{Df}$, определяющее полосу пропускания приемника, если задано, каким должно быть среднее значение числа принимаемых станций, при котором условия выделения полезного сигнала будут удовлетворительными. Это значит, что полученные здесь соотношения можно использовать при проектировании радиоприемных устройств.

Пример 2. Селекция ведется по частоте и азимуту. Необходимо рассчитать количество источников N_c , сигналы которых будут зарегистрированы на выходе приемника, если в точке приема действует N источников с равномерным распределением по мощности

$$w(P) = \frac{1}{P_{\text{макс}}}$$

и равномерным распределением по частоте

$$w(f) = \frac{1}{Df}.$$

Приемник принимает радиосигналы, превышающие на входе уровень мощности P_0 . Он имеет прямоугольную частотную характеристику $k(f)$ с полосой пропускания ΔF , как в примере 1, а антенна обладает в азимутальной плоскости характеристикой направленности

$$k(\alpha) = e^{-2,77 \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{\Delta A^2}},$$

где ΔA — раствор диаграммы направленности в азимутальной плоскости по половинной мощности,

α_0 — направление максимума приема.

Распределение источников излучения по азимуту прием равномерным, т. е.

$$w(\alpha) = \frac{1}{2\pi}.$$

Решение. Имеет место случай двумерной селекции. Расчет N_c будем вести по формуле (4)

$$F_2[k_2(f, \alpha)] = 1 - \frac{P_0}{P_{\text{макс}}} e^{2,77 \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{\Delta A^2}}.$$

Эта функция существует только в полосе пропускания частот ΔF . Границы ее существования по x легко находятся из условия неотрицательности функции $F_2[k_2(f, x)]$.

$$x_0 - 0,6\Delta A \sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} < x < x_0 + 0,6\Delta A \sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}}.$$

Сокращенно границы x обозначим соответственно x_n и x_0 . Запишем формулу (4) применительно к нашему примеру

$$N_{c_2} = N \int_{f_0 - \frac{\Delta F}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta F}{2}} \frac{df}{Df} \int_{x_n}^{x_0} \left\{ 1 - \frac{P_0}{P_{\max}} \exp \left[2,77 \frac{(x - x_0)^2}{\Delta A^2} \right] \right\} \frac{dx}{2\pi}.$$

После вычислений найдем

$$N_{c_2} = N \frac{\Delta F \Delta A}{Df} 1,2 \left[\sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} - \frac{P_0}{P_{\max}} F \left(\sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь $F \left(\sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} \right)$ — функция типа $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, представленная в таблицах, например, в работе [3]. Если прием ведется только внутри ΔA , т. е. $\frac{P_{\max}}{P_0} < 2$, то можно воспользоваться первым членом разложения

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \dots$$

и тогда

$$F \left(\sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} \right) \approx \sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}}.$$

Следовательно,

$$N_{c_2} \approx N \frac{\Delta F \Delta A}{Df} 1,2 \sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{\max}} \right). \quad (9)$$

Возможны также упрощения и для другого случая, когда $\frac{P_{\max}}{P_0} > 10$.

С ошибкой, не превышающей 30%, как и в предыдущем упрощении, получим формулу для N_{c_2}

$$N_{c_2} \approx N \frac{\Delta F \Delta A}{Df} 1,2 \sqrt{\ln \frac{P_{\max}}{P_0}}. \quad (9')$$

Соотношения (4) и (5), как и их конкретные разновидности (8), (9) и (9'), могут быть использованы при синтезе радиоприемных устройств, поскольку они содержат необходимые функциональные связи результата селекции с параметрами радиосигнала и радиоприемника.

ВЫВОДЫ

1. При разделении радиосигналов существенную роль играют априорные данные о распределении мощности и параметров сигналов, по которым ведется селекция, а также форма характеристик избирательности радиоприемника и его чувствительность.

2. Для данных условий работы радиоприемника можно поставить задачу о необходимых характеристиках радиоприемника, обеспечивающих определенные результаты селекции (разделения) радиосигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич. Очерк общей теории связи. ГИТТЛ, 1955.
2. Л. Заде, К. Миллер. Основы теории линейных многоканальных систем. Сборник переводов с английского под редакцией А. А. Харкевича, ГИФМЛ, 1959.
3. К. А. Карпов. Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{t^2} dt$ в комплексной области. Изд-во АН СССР, 1938.

ПЕЛЕНГАЦИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Е. В. Чаевский

При использовании антенны ультракоротких волн направление на излучающий объем обычно устанавливается в результате определения направления потока энергии в точке наблюдения. Однако это направление может не совпадать с направлением на излучатель, т. е. прямая, проведенная из точки наблюдения по направлению приходящего потока энергии, может не пересекаться с излучающим объемом. (Для краткости в дальнейшем соответствующие потоки энергии условно будем называть исходящими не из области источников). Такая неопределенность в ориентации приходящего к наблюдателю потока энергии, как иструдно показать, является следствием волнового характера процесса. В результате интерференции потоки энергии от различных элементов излучателя складываются не по правилам векторной алгебры и суммарный поток может оказаться вне телесного угла, в котором заключены его составляющие. В литературе этот эффект называют «угловым шумом» (angular scintillation) и теоретическое рассмотрение его велось, начиная с 1953 года [1—3].

В работе используется модель многоэлементного объемного источника [3]. Вопрос о пеленгации простейших излучателей такого типа (круга и полосы со случайно расположенными на них точечными источниками) рассматривался в литературе [1]. Однако не учитывались интенсивности приходящих сигналов и расположение источников предполагалось симметричным относительно наблюдателя. В работе проводится обобщение теории на случай источников с произвольной ориентацией и выясняется зависимость от минимального уровня принимаемых сигналов.

1. Общие соотношения

Считаем, что случайные источники в среднем (по реализациям) равномерно распределены в объеме V , удаленном от наблюдателя на расстоянии R_0 , большее по сравнению с линейными размерами области V . Приемная система реагирует только на потоки энергии, по модулю превосходящие некоторое пороговое значение A . Предполагается, что происходит правильная пеленгация источника, если поток энергии исходит из области занимаемой источниками и фиксируется приемной системой. В качестве количественной характеристики, описывающей точность пеленгации различных статистических объектов, используется вероятность правильной пеленгации при единичном измерении.

Принимаемые потоки энергии, согласно [3], удобно описывать в декартовой системе координат XYZ , центр которой совмещен с центром тяжести тела, полученного в результате однородного заполнения объема V ,

ось Z проходит через точку наблюдения и ориентация ось X выбрана из условия

$$\int_V xy dV = 0. \quad (1.1)$$

При таком выборе координатной системы средний поток энергии $\langle \vec{P} \rangle$ ориентируется вдоль оси Z (скобками $\langle \rangle$ обозначаем усреднение по ансамблю случайных источников) и, если описывать поток энергии \vec{P} с помощью единичного вектора \vec{t} и безразмерного параметра P_0 , определенных как

$$\vec{t} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}, \quad P_0 = \frac{|\vec{P}|}{\langle P_z \rangle},$$

для совместной плотности вероятности величины t_x, t_y, P_0 , согласно [3], имеем

$$W(t_x, t_y, P_0) = \frac{P_0}{\pi^2 \theta_x \theta_y t_x t_y} e^{-P_0 \left[1 + \frac{t_x^2}{\mu_x^2} + \frac{t_y^2}{\mu_y^2} \right]}, \quad (1.2)$$

где коэффициенты μ_x, μ_y определяются через безразмерные переменные

$$\lambda_x \equiv 2 \frac{x}{L_x}, \quad \lambda_y \equiv 2 \frac{y}{L_y}, \quad \lambda_z \equiv 2 \frac{z}{L_z} \quad (1.3)$$

равенствами

$$\frac{1}{\mu_x^2} = \frac{V_x}{\int_V \lambda_x^2 dV_x}, \quad \frac{1}{\mu_y^2} = \frac{V_y}{\int_V \lambda_y^2 dV_y}. \quad (1.4)$$

Здесь L_x, L_y, L_z — максимальные линейные размеры области V в направлении осей X, Y, Z соответственно, V_x — объем излучающей области в переменных $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ и малые параметры θ_x, θ_y определяются соотношениями

$$\theta_x \equiv \frac{L_x}{2R_0}, \quad \theta_y \equiv \frac{L_y}{2R_0}.$$

Чтобы определить вероятность правильной пеленгации Q , выделим в плоскости переменных t_x, t_y область $s(t_x, t_y)$, которой соответствуют потоки энергии, исходящие из V . Благодаря малости линейных размеров источника, по сравнению с расстоянием до него, область $s(t_x, t_y)$ определится, если в формулы

$$t_x = -\frac{x}{R_0}, \quad t_y = -\frac{y}{R_0}$$

подставить x, y из области $s(x, y)$, получающейся проектированием V на плоскость xy .

Введем параметр q как

$$q \equiv \frac{\Lambda}{\langle P_z \rangle}. \quad (1.5)$$

Тогда по определению Q — это вероятность совместного обнаружения $P_0 > q$ и t_x, t_y из области $s(t_x, t_y)$. Следовательно,

$$Q = \int_0^{\infty} dP_0 \int_{s(t_x, t_y)} dt_x dt_y W(t_x, t_y, P_0). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2) в (1.6) и дважды интегрируя, приходим к следующему результату:

$$Q = e^{-q} \left[1 - \frac{1}{2\pi\lambda_x\lambda_y} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-u\varphi}}{\rho(1+u\varphi)} d\varphi \right]. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= \lambda^2(\varphi), \\ \rho &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{1}{\mu_y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_x^2} - \frac{1}{\lambda_y^2} \right) \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

λ — расстояние от начала координат ($\lambda_x = \lambda_y = 0$) до границы области $s(\lambda_x, \lambda_y)$, получаемой проектированием V_k на плоскость переменных λ_x, λ_y .

Заметим, что интенсивности потоков для многоэлементных источников распределены по экспоненте и e^{-q} — вероятность обнаружения потока энергии с интенсивностью большей чем A . Следовательно, если определить \bar{Q} как

$$\bar{Q} = 1 - \frac{1}{2\pi\lambda_x\lambda_y} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-u\varphi}}{\rho(1+u\varphi)} d\varphi, \quad (1.9)$$

то, согласно (1.7), \bar{Q} — вероятность правильной пеленгации в подансамбле реализаций, удовлетворяющих условию $P > A$.

Формулы (1.7), (1.9) позволяют сделать несколько весьма общих замечаний относительно пеленгации многоэлементных источников.

1. Вероятность правильной пеленгации при фиксированной интенсивности источника инвариантна относительно линейных преобразований (без сдвига) его формы вдоль осей X, Y, Z .

Действительно, как видно из (1.4), (1.7), (1.8), величина Q зависит не от вида излучающей области в переменных x, y, z , а от вида ее в переменных $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$. Но, согласно (1.3), при изменении масштабов вдоль осей X, Y, Z координаты произвольной точки пространства в переменных $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ не меняются.

Как частный вывод из доказанного утверждения следует независимость Q от линейных размеров источника.

Отмеченные выше свойства функции Q существенно упрощают анализ конкретных задач. Например, если рассматривается вероятность правильной пеленгации эллипсоида наблюдателем, расположенным на одной из его осей симметрии, не делая никаких выкладок, можно заключить, что размеры осей эллипсоида на величину Q не влияют. Действительно, линейными преобразованиями двух координатных осей эллипсоид преобразуется в шар, а радиус шара на величину Q не влияет, так как Q не зависит от линейных размеров излучателя.

2. Чем больше случайная интенсивность принятого потока энергии, тем больше вероятность правильной пеленгации.

Действительно, если принят сигнал интенсивности q , то можно утверждать, что имеется реализация из подансамбля, удовлетворяющего

условно $q' \geq q$. Но, как видно, из (1.9), вероятность правильной пеленгации в таком подансамбле стремится к единице с ростом q . Приближение к предельному значению монотонное, так как

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial q} > 0$$

вследствие положительной определенности функций u , ρ .

3. Чем выше пороговый уровень интенсивности q , начиная с которого приемная система фиксирует сигналы, тем меньше вероятность правильной пеленгации. Максимальная вероятность правильной пеленгации достигается при $q = 0$, когда принимаются все потоки энергии.

Для доказательства продифференцируем (1.7) по q . Получим

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = e^{-q} \left[\frac{1}{2\pi^2 \lambda^2 \nu} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho \psi}}{\rho} d\psi - 1 \right]. \quad (1.10)$$

Непосредственно выполняя интегрирование, можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi^2 \lambda^2 \nu} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\rho} = 1,$$

и, поскольку функции u , ρ положительно определены, первый член в квадратных скобках формулы (1.10) меньше или равен единице. Таким образом,

$$\frac{\partial Q}{\partial q} < 0,$$

что и требовалось доказать.

При $q = 0$ выражение (1.10) обращается в нуль, т. е. при малых пороговых уровнях q отклонения Q от максимального значения — величины второго порядка малости.

Уменьшение Q с ростом q не противоречит отмечавшемуся ранее увеличению вероятности правильной пеленгации для потоков большой интенсивности. Действительно, хотя с увеличением уровня ограничения принимаемые антенной сигналы чаще исходят из источника, одновременно увеличивается и число случаев, когда антенна вообще «не видит» источника. Монотонное уменьшение Q обозначает, что второй эффект всегда сильнее первого. При достаточно больших q имеем

$$\bar{Q} \rightarrow 1, \quad Q \rightarrow e^{-q},$$

т. е. вероятность правильной пеленгации стремится к вероятности обнаружения сигнала.

2. Пеленгация многоэлементных источников вдоль осей симметрии

По общим формулам, полученным в предыдущем параграфе, рассчитаем вероятность правильной пеленгации многоэлементных источников простой геометрической формы (эллипсоид, цилиндр, параллелепипед). В этом разделе ограничимся случаем, когда наблюдатель находится на одной из осей симметрии источника.

Если многоэлементный источник — тело вращения, а наблюдатель находится на оси вращения, область $s(\lambda_x, \lambda_y)$ является кругом единичного радиуса

$$\mu = 1, \quad \mu_x = \mu_y = \mu, \quad \beta = \frac{1}{\mu^2}, \quad (2.1)$$

подынтегральная функция в (1.7) от φ не зависит и для $Q(q)$ имеем

$$Q(q) = e^{-q} \left[1 - \frac{e^{-\frac{q}{\mu^2}}}{1 + \mu^{-2}} \right]. \quad (2.2)$$

Предполагая, что тело вращения — эллипсоид с подобной полостью внутри, из (1.4) для μ^{-2} находим

$$\frac{1}{\mu^2} = 5 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^5}, \quad (2.3)$$

где β — отношение линейных размеров внутренней полости к внешним размерам излучателя. В частности, когда источники заполняют весь объем, $\beta \rightarrow 0$, $\mu^{-2} \rightarrow 5$, когда источники распределены в узком слое вблизи поверхности эллипсоида $\beta \rightarrow 1$, $\mu^{-2} \rightarrow 3$.

Предполагая, что тело вращения — сплошной цилиндр, получим $\mu^{-2} = 6$.

Если область $s(\lambda_x, \lambda_y)$ имеет вид квадрата со сторонами, параллельными координатным осям, интеграл в (1.7) выражается через элементарные функции лишь при $q = 0$. В этом случае

$$Q(0) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_x^2}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_x}{\mu_y \sqrt{1 + \mu_x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_y^2}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_y}{\mu_x \sqrt{1 + \mu_y^2}} \right]. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) позволяет рассчитать максимальные значения вероятности правильной пеленгации для цилиндра ориентированного боком

Таблица. Значения Q при $q = 0$ для симметрично ориентированных излучателей.

	Вид излучателя	$s(\lambda_x, \lambda_y)$	$Q(0)\%$
1	Полый параллелепипед	□	68,98
2	Полый цилиндр	□	74,75
3	Полый эллипсоид	○	75,00
4	Сплошной параллелепипед	□	78,70
5	Сплошной цилиндр	○	80,00
6	Сплошной цилиндр	□	80,83
7	Сплошной эллипсоид	○	83,33

и параллелепипеда. Предполагая для конкретности, что ось X ориентирована вдоль образующей цилиндра, согласно (1.4), имеем

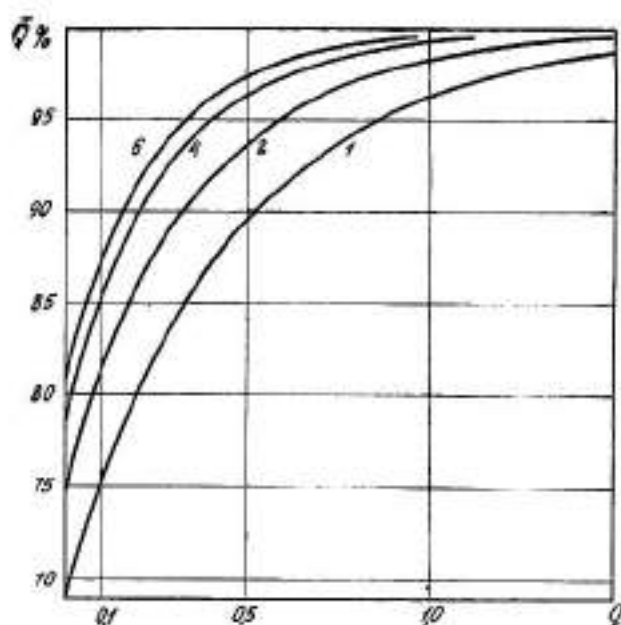


Рис. 1. Зависимость \bar{Q} от q для симметрично ориентированных излучателей.

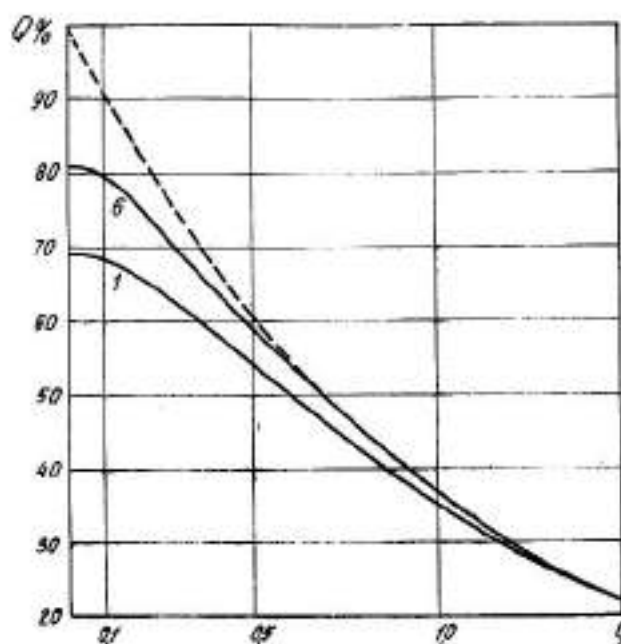


Рис. 2. Зависимость Q от q для симметрично ориентированных излучателей.

$$\frac{1}{r_1^2} = 3, \quad \frac{1}{r_2^2} = 4(1 + \beta^2), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2} = 3 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^3}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.5), (2.6), как и в (2.3), параметр β обозначает, во сколько раз внутренняя подобная полость меньше всего излучающего объема по линейным размерам.

Числа, которые получаются из формул (2.2) — (2.6) для максимальных значений Q , приведены в таблице в порядке возрастания.

Для четырех излучателей, у которых область имеет вид квадрата, функции $\bar{Q}(q)$ рассчитывались численным интегрированием по формулам (1.7), (2.5), (2.6). Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Номера около кривых обозначают номера излучателей по таблице. Как видно из рисунка, кривые не пересекаются, т. е. расположение излучателей в порядке возрастания $Q(0)$, приведенное в таблице, сохраняется и для $q \neq 0$.

В качестве иллюстрации общей теории по графикам функций $\bar{Q}(q)$, приведенным на рис. 1, были рассчитаны две кривые $Q(q)$. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Обозначения кривых те же, пункти-

ром выделена кривая $\exp(-q)$. Как видно из рис. 2, в полном соответствии с общей теорией, функции $Q(q)$ монотонно убывают, производная $\frac{\partial}{\partial q} Q(q)$ обращается в нуль при $q = 0$.

3. Пеленгация при произвольной ориентации источников

В этом параграфе на примере трех излучателей (эллипсоид, сплошной параллелепипед, сплошной цилиндр) рассмотрим влияние ориентации многоэлементного источника на вероятность правильной пеленгации.

Эллипсоид оказывается в некотором смысле особым излучателем. Можно показать, что вероятность правильной пеленгации эллипсоида с подобной полостью внутри не зависит от его ориентации относительно наблюдателя. Таким образом, при любых положениях излучающего эллипсоида в пространстве функция $Q(q)$ для него определяется формулами (2.2), (2.3).

При рассмотрении излучающего параллелепипеда будем предполагать, что наблюдатель находится в плоскости двух его осей симметрии. Тогда область $\varepsilon(\lambda_x, \lambda_y)$ — квадрат, и повороты излучателя в пространстве учитываются лишь посредством коэффициентов μ_x, μ_y .

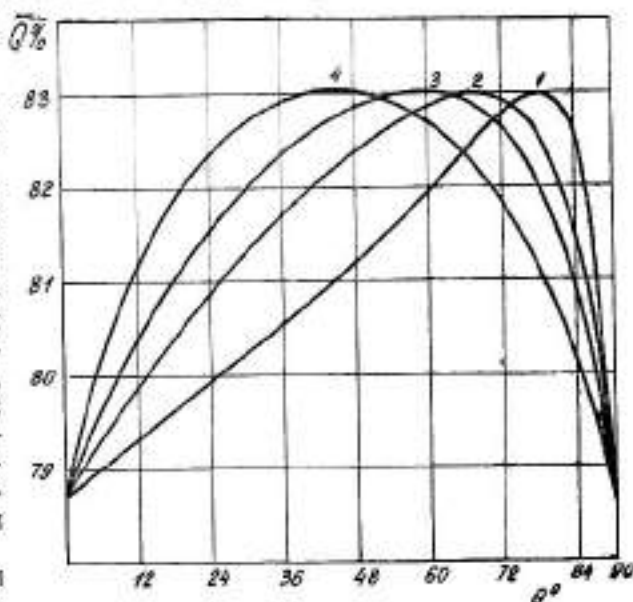


Рис. 3. Зависимость \bar{Q} от ориентации сплошного параллелепипеда при $q = 0$ и $\xi = 0,2$ (кривая 1), $\xi = 0,4$ (2), $\xi = 0,6$ (3), $\xi = 1$ (4).

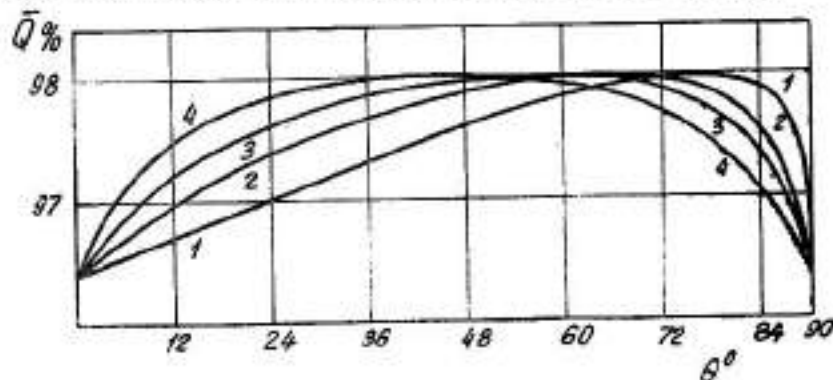


Рис. 4. Зависимость \bar{Q} от ориентации сплошного параллелепипеда при $q = 0,5$ и $\xi = 0,2$ (кривая 1), $\xi = 0,4$ (2), $\xi = 0,6$ (3), $\xi = 1$ (4).

Вычисление коэффициентов μ_x , μ_y удобно проводить, переходя к системе координат, ориентированной вдоль осей симметрии. В результате элементарных выкладок получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_x^2} &= 3 \\ \frac{1}{\mu_y^2} &= 3 \frac{1 + \xi^2 + 2\xi |\sin 2\theta| + (1 - \xi^2) \cos 2\theta}{1 + \xi^2 + (1 - \xi^2) \cos 2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Параметры ξ , θ , определяющие геометрию задачи, введены здесь следующим образом: когда $\theta = 0$, координатные оси совпадают с осями

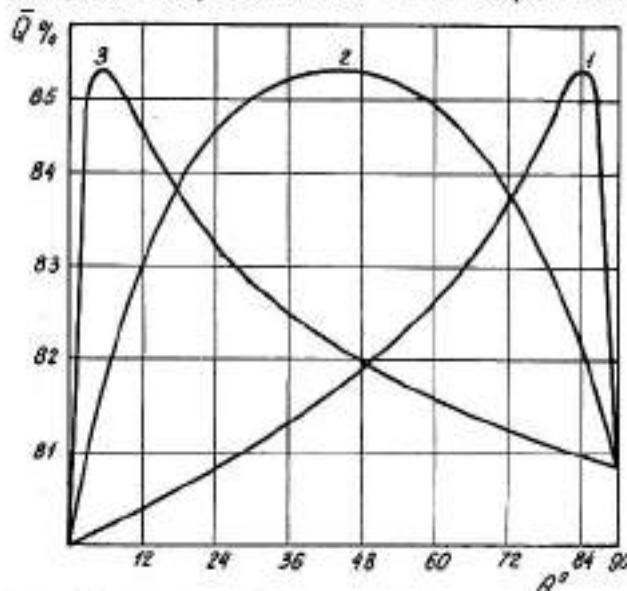


Рис. 5. Зависимость \bar{Q} от ориентации сферического цилиндра при $q = 0$ и $i = 0, 1$ (кривая 1), $\xi = 1$ (2), $\xi = 10$ (3).

симметрии параллелепипеда (наблюдатель находится на оси Z), ξ — отношение L_x к L_z ; угол θ описывает поворот параллелепипеда около оси Y . Очевидно, если θ меняется в интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$, для ξ можно ограничиться интервалом $[0, 1]$.

Подставляя μ_x , μ_y из (3.1) в (1.9), (2.4), получаем зависимость \bar{Q} от θ при фиксированных q , ξ . На рисунках 3, 4 приведено несколько кривых такого типа. Как видно из рисунков, характерной особенностью является наличие постоянного по величине максимума. Можно показать, что максимум функции \bar{Q} достигается, когда наблюдатель оказывается на продолжении диагонали прямоугольника, полученного проектированием излучающего объема на плоскость XZ . Этому максимуму функции \bar{Q} соответствует максимальное значение величины μ_x^{-2} , равное 6 (независимо от ξ).

С ростом q пределы изменения функции \bar{Q} , как видно из рисунков 3, 4, быстро уменьшаются. Это обстоятельство является следствием, отмеченного в параграфе 1, весьма общего свойства функции \bar{Q} : с ростом q величина \bar{Q} стремится к единице, независимо от формы и ориентации излучателя.

В двух предыдущих примерах форма области $s(\lambda_x, \lambda_y)$ не менялась при изменении ориентации излучающей области. Задача о переносе произвольно ориентированного цилиндрического источника является задачей более общего типа (форма области $s(\lambda_x, \lambda_y)$ здесь непрерывно меняется от квадрата до круга). Однако непосредственные расчеты функции \bar{Q} для этого случая показывают, что качественных различий по сравнению

с предыдущим примером нет. Поэтому, опуская вычисления, приводим лишь два иллюстративных графика (рис. 5, 6). Обозначения приняты следующие: θ — угол между осью Z и осью цилиндра, ξ — отношение высоты цилиндра к диаметру.

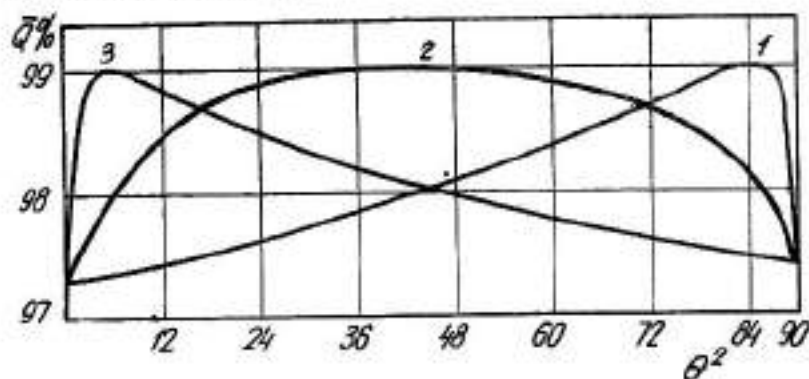


Рис. 6. Зависимость \bar{Q} от ориентации сплошного цилиндра при $\sigma = 0,5$ и $\xi = 0,1$ (кривая 1), $\xi = 1$ (2), $\xi = 10$ (3).

В заключение статьи автор выражает глубокую благодарность Ф. С. Санину за обсуждения задачи, во многом способствовавшие выполнению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. DeLano. A theory of target glint or angular scintillation in radar tracking, Proc. IRE, 1953, 41, 1778.
2. D. D. Howard. Radar target angular scintillation in tracking and guidance systems based on echo signal phase front distortion, Proc. Nat. Electr. Conf. 1959, 15, 840.
3. Е. В. Чаявский. Распределение потоков энергии, создаваемых системой случайных монохроматических источников. «Радиотехника и электроника», 1966, № 11, стр. 1927.

**О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПОЛЯ,
РАСSEЯННОГО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОЩАДКОЙ
С ВЫСОКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ**

Г. А. Алексеев

Исследование свойств полей, рассеянных полемными крупными неровностями, в настоящее время наиболее полно в приближении Кирхгофа проведено для модели, описанной в [1] (площадка в зоне Фраунгофера). Изучению свойств полей при более общих предположениях относительно формы падающей волны посвящено небольшое количество работ [2,3]. В предлагаемой статье рассматривается пространственно-временная корреляционная функция поля точечного источника, рассеянного шероховатой площадкой с высокими неровностями при произвольном соотношении между длиной площадки и размерами зоны Френеля. Вычисляется энергетический спектр рассеянного поля, принимаемого движущимся наблюдателем.

Для простоты рассматривается акустический случай. Рассеивающей поверхностью является полосо (рис. 1), ширина которой в направлении оси x равна $2L_x$. Шероховатость площадки предполагается одномерной, отклонения точек поверхности ζ от среднего положения — малыми ($k^2 R_{\text{rms}}^{-1} \ll 1$). Рассматривая рассеянное поле U_1 в точке приема P_1 как сумму вкладов светящихся точек [4], можно получить в приближении Кирхгофа

$$U_1 = \frac{ik}{4z} e^{-i\omega t} \int \frac{V_0^2}{R_1 R_2 \sigma_z} e^{ik(R_1 + R_2 + \sigma_z \zeta)} dx dy. \quad (1)$$

Здесь интегрирование проводится по освещенной части поверхности, $\vec{\alpha} = \text{grad}(R_1 + R_2)$, V — коэффициент отражения, $k = \frac{\omega}{c}$, значения всех величин берутся на средней поверхности $z = 0$. Будем исследовать корреляционные свойства флуктуационной компоненты рассеянного поля с помощью функции

$$G = \frac{1}{2} \text{Re} (\langle U_1 U_2 \rangle - \langle U_1 \rangle \langle U_2 \rangle), \quad (2)$$

где усреднение $\langle \rangle$ проводится по совокупности реализаций $\zeta(x)$, черточка обозначает комплексно-сопряженную величину, поле U_2 определено в точке P_2 в момент времени $t + \tau$. Точки приема P_1, P_2 лежат в плоскости \log (рис. 1). Подставляя U_1, U_2 в (2) и интегрируя по y , получим

$$G = \frac{k}{8z} \text{Re} \left\{ e^{i\omega \tau} \int \int A A' M_{12} e^{ik(R_1 + R_2 - R_1' - R_2')} dx dx', \quad (3)$$

где $A = \frac{V_0^2}{R_1 R_2 \sigma_z} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (R_1 + R_2) \right]^{-1/2}$,

$$M_{12}(x - x') = \langle e^{ik(\alpha_x - \alpha_x')} \rangle - \langle e^{ik\alpha_x} \rangle \langle e^{ik\alpha_x'} \rangle. \quad (4)$$

В (3), (4) величины без штрихов зависят от x и от координат точки P_1 ; величины со штрихами — от x' и от координат P_2 , причем в (3) R_1 и R_2 — расстояния до точек поверхности, лежащих на оси x . Интеграл типа (3) был достаточно подробно исследован в [5], причем в [2], [5] показано, что при рассеянии на бесконечной поверхности радиусы пространственной корреляции определяются интервалом убывания I функции $M_{12}(\xi)$, где $\xi = x - x'$. Производя соответствующие разложения и ограничиваясь случаем $kl^2 R_{\min}^{-1} \ll 1$, получим

$$G = \frac{k}{32\pi} A^{*2} \operatorname{Re} \{ \exp [ik(ct - z_X \Delta X - z_Z \Delta Z)] \times \\ \times \int dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp [-2ik(x - x^*)(\beta_{xx}\xi + \beta_{xX}\Delta X + \beta_{xZ}\Delta Z)] M_{12}^* \}. \quad (5)$$

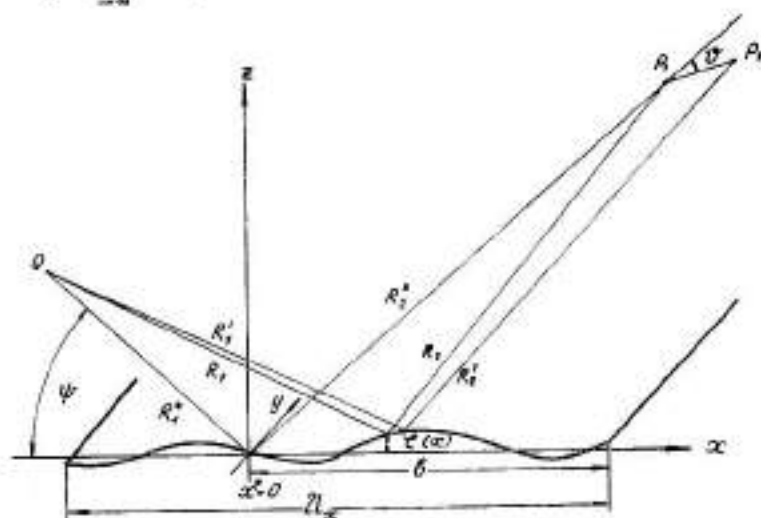


Рис. 1.

где $\alpha_x = \frac{\partial}{\partial(\Delta X)} (R_1 + R_2')|_{x=x^*} = \cos \psi$; $\alpha_z = \sin \psi$;

$$\beta_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R_1 + R_2')|_{x=x^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sin^2 \psi;$$

$$\beta_{xX} = \frac{1}{2R_2} \sin^2 \psi; \quad \beta_{xZ} = -\frac{1}{2R_2} \sin \psi \cos \psi;$$

ΔX , ΔZ — линейные смещения приемника P_2 по отношению к P_1 , ψ — угол зеркального отражения, звездочка обозначает, что величины берутся в точке $x = x^*$, которая является точкой зеркального отражения для приемника P_1 . Разложение по x в (5) проводилось вблизи этой точки в существенной для отражения области, размеры которой определяются условием $|x_{\text{сущ}} - x^*| \sim (k\beta_{xx})^{-1}$.

Отметим, что (5) неприменимо при разnose точек P_1 , P_2 вдоль направления зеркального отражения, так как в этом случае в (5) $\beta_{xx} \cdot \Delta X + \beta_{xZ} \Delta Z = 0$ и необходимо учитывать следующие члены разложения по ΔX , ΔZ . Если θ — угол отклонения точки P_2 от направления зеркального отражения (см. рис. 1), то условие, накладываемое в (5) на этот угол, имеет вид $\theta \gg (kl)^{-1}$. При вычислении M_{12} будем считать закон распределения $\zeta(x)$

нормальным (σ^2 — среднеквадратичная высота неровностей), а коэффициент корреляции $\sigma^{-2} \langle \zeta(x) \zeta(x') \rangle$ аппроксимировать функцией $\exp[-\xi^2 \Lambda^{-2}]$ (Λ — радиус корреляции неровностей). Легко показать, что при этом для случая высоких неровностей ($k \sin \phi \gg 1$)

$$M_{1x} = \exp(-4k^2 \sigma^2 \sin^2 \phi \xi^2 \Lambda^{-2}) \quad (6)$$

и, следовательно, $I = \Lambda (2k \sin \phi)^{-2}$. Подставляя (6) в (5) и интегрируя по x в конечных пределах, получим

$$G = \frac{1}{64 \beta_{xx}} A^{**} \exp(-x^2) \operatorname{Re} \exp[ik(c\tau - \alpha_x \Delta X - \alpha_z \Delta Z)] \quad (7)$$

$$\{\Phi(\gamma_1 + ix) + \Phi(\gamma_2 - ix)\},$$

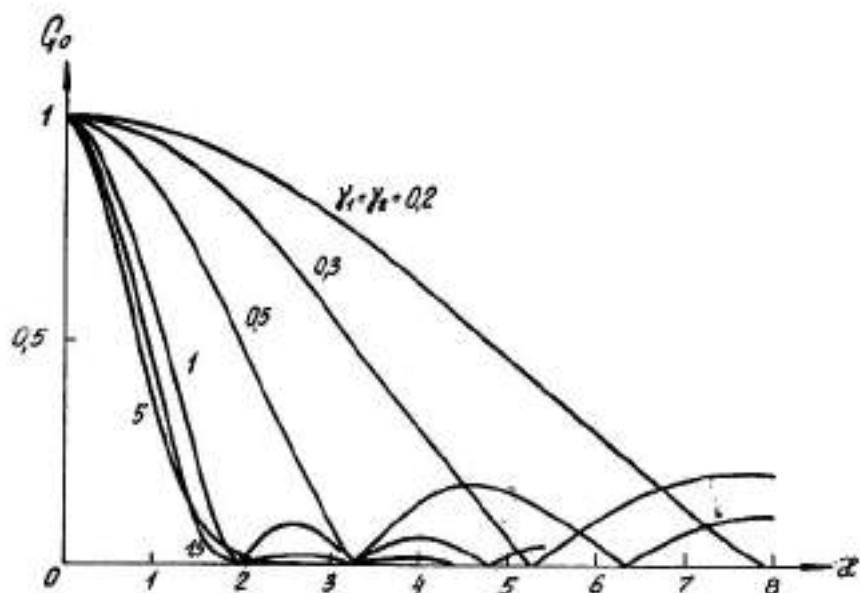


Рис. 2.

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^{-t} dt$ — интеграл вероятности, x , γ_1 , γ_2 — безразмерные

параметры: $x = (\beta_{xx} \Delta X + \beta_{xz} \Delta Z) \times (\beta_{xx} l)^{-1}$; $\gamma_1 = k \beta_{xx} l b$; $\gamma_2 = k \beta_{xx} l (2L_x - b)$, b — координата одного из концов площадки (см. рис. 1). Параметры γ_1 , γ_2 , таким образом, определяются отношением размеров b , $2L_x - b$ площадки к радиусу области, существенной для отражения или для рассматриваемого случая высоких неровностей — отношению соответствующих угловых размеров площадки к наклону неровностей. Формула (7) показывает, что функция корреляции зависит от статистических параметров поверхности, от длины площадки и от расположения на последней точки зеркального отражения x^* . На рис. 2 представлены графики огибающей коэффициента корреляции $G_0 = \frac{G(x)}{G(0)}$, построенные по (7) для случая, когда точка x^* находится в центре площадки ($b = L_x$, $\gamma_1 = \gamma_2$). Из рис. 2 видно, что уменьшение параметра $k \beta_{xx} l L_x$ в общем случае приводит к увеличению

радиусов пространственной корреляции и возрастанию уровня боковых лепестков. Рис. 3—5 отражают зависимость коэффициента корреляции от положения точки x^* для площадок различной длины ($\gamma_1 + \gamma_2 = 2k\beta_{xz}lL_x = -2$ для рис. 3, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ для рис. 4, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0,4$ для рис. 5). Сравнение кривых показывает, что для площадок, размеры которых сравнимы с размерами существенной для отражения области, смещение точки x^* из центра площадки приводит к уменьшению радиусов корреляции рассеянного поля. Для достаточно протяженных площадок, при выполнении условий $\gamma_1 \gg 1$, $\gamma_2 \gg 1$, можно воспользоваться асимптотикой функции $\Phi(x)$. Тогда

$$G = \frac{1}{32\beta_{xz}} A^{**} M_{12}(\xi_0) \cos [k(c\tau - x_1 \Delta X - x_2 \Delta Z)], \quad (8)$$

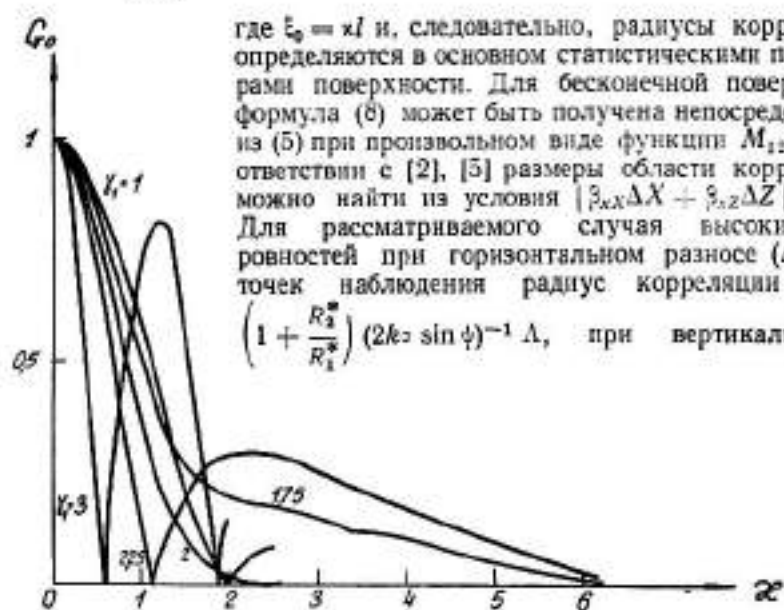


Рис. 3.

где $\xi_0 = x l$ и, следовательно, радиусы корреляции определяются в основном статистическими параметрами поверхности. Для бесконечной поверхности формула (8) может быть получена непосредственно из (5) при произвольном виде функции M_{12} . В соответствии с [2], [5] размеры области корреляции можно найти из условия $|\beta_{xz} \Delta X + \beta_{xz} \Delta Z| \sim l \beta_{xz}$. Для рассматриваемого случая высоких неровностей при горизонтальном разномсе ($\Delta Z = 0$) точек наблюдения радиус корреляции равен $(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}) (2kz \sin \phi)^{-1} \Lambda$, при вертикальном —

$(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}) (2kz)^{-1} \Lambda \cos \phi$. Из рис. 2 видно, что асимптотической формулой (8) можно с большой степенью точности пользоваться уже при $\gamma_1, \gamma_2 \sim 2$.

В заключение последуем энергетический спектр рассеянного поля при движении приемника P_1 . Пусть, например, v_x и v_z — составляющие вектора скорости приемника. Тогда, учитывая однородность и стационарность процесса $U_1 = \langle U_1 \rangle$, временную автокорреляционную функцию $G(\tau)$ легко получить из (7), (8) подстановкой $\Delta X = v_x \tau$; $\Delta Z = v_z \tau$. Ограничиваясь случаем протяженной площадки, найдем спектр поля

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G l^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{A^{**}}{32\sqrt{\pi}} l (\beta_{xz} v_x + \beta_{xz} v_z)^{-1} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{4} \beta_{xz}^2 l^2 (\beta_{xz} v_x + \beta_{xz} v_z)^{-2} (\omega - \omega_0 - kx_x v_x - kz_z v_z)^2 \right], \quad (9)$$

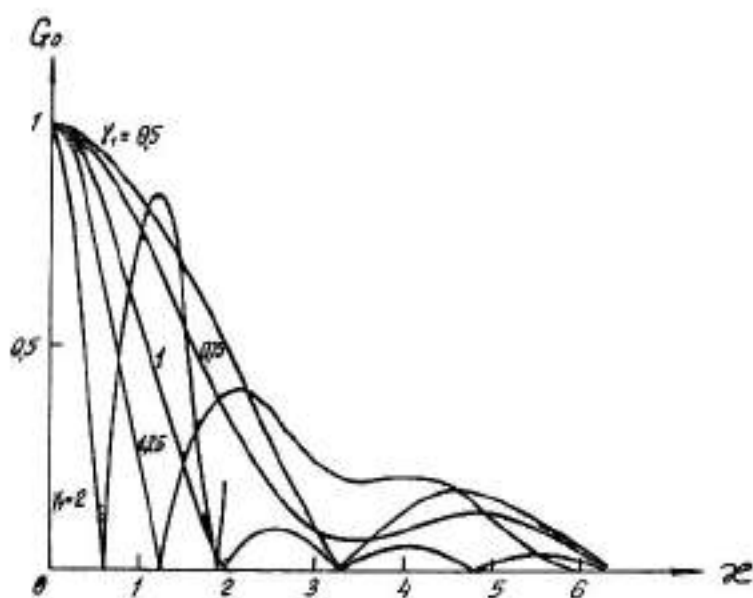


Рис. 4

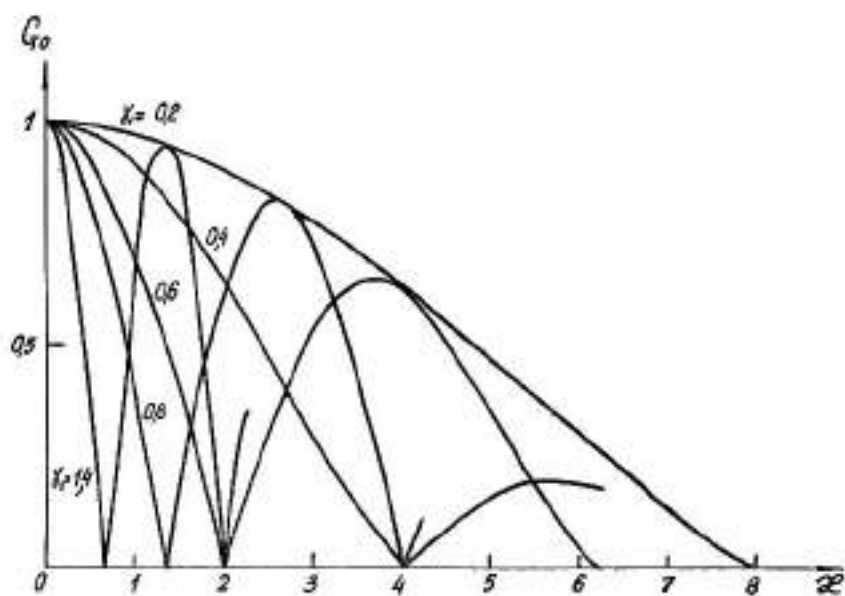


Рис. 5.

т. е. при движении приемника над шероховатой поверхностью происходит расширение спектра рассеянного поля. Ширина спектральной кривой равна $4T^{-1}$, где $T = \beta_{x_1} l (\beta_{x_1} v_1 + \beta_{x_2} v_2)^{-1}$ — время пролета области пространственной корреляции. Сдвиг центральной части спектра на величину $k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$ обусловлен доплер-эффектом при движении приемника относительно зеркального отображения источника. Так же, как и (5), формула (9) неприменима при движении приемника вдоль направления зеркального отражения. Не производя необходимых вычислений, этот случай можно исследовать, воспользовавшись результатами работы [5]. Если ρ_{\perp} — радиус корреляции поля при поперечном разnose точек наблюдения относительно направления зеркального отражения, то, как показано в [4], радиус корреляции при разnose точек вдоль направления зеркального отражения равен $k\rho_{\perp}^2$. Из (8) следует, что $\rho_{\perp} \sim (R_1^* + R_2^*) l \sin \psi / R_1^*$, и, следовательно, при движении приемника по нормали к направлению зеркального отражения ($v_x = v \sin \psi$, $v_z = v \cos \psi$) ширина спектральной кривой равна $4\omega R_1^* (R_1^* + R_2^*)^{-1} (l \sin \psi)^{-1}$. Соответственно, при движении приёмника вдоль направления зеркального отражения ($v_x = v \cos \psi$, $v_z = v \sin \psi$) ширина спектральной кривой равна $4 \frac{v}{k} R_1^* (R_1^* + R_2^*)^{-2} (l \sin \psi)^{-2}$, т. е. в $(R_1^* + R_2^*) \frac{\lambda}{2R_1^*}$ раз меньше.

Автор выражает признательность Е. В. Чаевскому за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исakovич, ЖЭТФ, 23, 304 (1952).
2. I. Feinberg, IRE Trans., AP-2, 23 (1954).
3. Е. В. Чаевский, «Проблемы дифракции и распространения волн», 5, 121 (1956).
4. Б. Н. Семенов, «Радиотехника и электроника», 10, 1952 (1965).
5. Н. М. Фукс, «Известия высш. учеб. зав. Радиофизика», 6, 104 (1965).

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. С. Н. Терентьев, С. Е. Фалькович. Вопросы синтеза оптимальных систем передачи количественной информации	3
2. И. Д. Задеренко. Оптимальная скорость передачи дискретной информации ортогональными сигналами по каналу с ограниченной полосой	10
3. И. Д. Задеренко. К вопросу об оптимальной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами с активной паузой	19
4. Н. П. Суворов. Повышение достоверности дискретного канала методом линейной экстраполяции потока ошибок	26
5. А. С. Масичук, Н. П. Суворов. К вопросу о статистике ошибок в каналах связи при передаче дискретных сигналов	32
6. Н. Н. Буга, И. М. Израйлит. Об одном способе декодирования двоичных групповых кодов	39
7. Х. М. Вилевский. Информация и информативность двоичных сигналов	44
8. С. Ю. Олейников. Информация двоичных сигналов со случайной начальной фазой при обнаружении	54
9. Н. Ф. Ключев. Обнаружение сигнала, появляющегося в случайный момент времени	61
10. С. Е. Фалькович. Оптимальное использование выходных эффектов системы смежных измерителей	68
11. Ю. А. Мельник. Приближенная теория разрешения когерентных радиолокационных станций	76
12. Э. Н. Хомяков. Линейная фильтрация винеровских процессов при конечном времени наблюдения	85
13. М. С. Куст. О влиянии параметров потенциалографа на его выходные характеристики при записи и считывании полутоновых сигналов	92
14. С. Н. Терентьев, В. М. Рудой. Аналитический метод приближенной оценки разборчивости прерываемой речи	100
15. В. А. Грабина, А. И. Погорелов. Пространственно-временная обработка сигнала от протяженной цели антеннами с линейной апертурой	106
16. В. В. Мотдохов. Оптимальная фильтрация эллиптически поляризованных пространственных сигналов	111
17. А. И. Погорелов. Предельная точность измерения углов и угловых скоростей системами с линейными антеннами	117
18. Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин. Статистическая матрица рассеяния и ее измерение	126
19. В. М. Проценко. К вопросу об оптимальном обнаружении флюктуирующих сигналов на фоне мешающих отражений при разнесенном приеме	131
20. А. Ф. Ашорович. К теории разделения (селекции) радиосигналов	134
21. Е. В. Чаевский. Пеленгация многоэлементных источников	141
22. Г. А. Алексеев. О пространственно-временной корреляции поля, рассеянного шероховатой площадкой с высокими неровностями	150

Редактор А. А. Семашко
Техредактор Л. Т. Момот.
Корректор Ж. Л. Блан

Сдано в набор 7/11 1967 г. Подписано к печати 2/Х 1967 г. ВЦ 30963.

Формат 70 × 105^{1/16}. Объем: 9,75, физ. печ. л., 13,7, усл. печ. л.,

10,6 уч.-изд. л. Заказ 7-103. Тираж 1000. Цена 71 коп.

Св. ТП 1967 г. поз. 192

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в тип. № 16 Областного
управления по печати. Харьков, Университетская, ул., 16. Зак. 3808.