

621.396.1
P15

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

РАДИОТЕХНИКА

ВЫПУСК 2

ВОЛНОВОДЫ
И ВОЛНОВОДНЫЕ УСТРОЙСТВА

800

83

391263



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1966



Настоящий выпуск сборника содержит результаты теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию волноводных систем. Рассмотрены дифракционные задачи и задачи распространения для прямоугольных волноводов с различными неоднородностями, исследованы распространения электромагнитных волн в цилиндрических и периодических волноводах с различными заполнениями.

Опубликованные в данном сборнике статьи представляют интерес для специалистов по волноводной и антенной технике, а также для аспирантов и студентов старших курсов радиотехнических и радиотехнических факультетов вузов.

Редакционная коллегия:

Проф. *Шестопалов В. П.* (отв. редактор), доц. *Кукун В. Д.* (зам. отв. редактора), ст. преподав. *Сидоров Г. И.* (отв. секретарь), проф. *Кацеев Б. Л.*, доц. *Якименко И. П.*, доц. *Толстов В. В.*, доц. *Прошкин Е. Г.*, доц. *Играков А. И.*, доц. *Хижняк Н. А.*, инж. *Винников Г. П.*, ст. преподав. *Процлов А. В.*, доц. *Круковский К. Б.*, доц. *Кириченко В. С.*

Адрес редакционной коллегии: г. Харьков, проспект Ленина, 14, Харьковский институт радиоэлектроники

3—4—2
18—БЗ—11—65

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА имени ФРУНЗЕ

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЛЕНТОЧНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ДИАФРАГМЕ С МНОГОСЛОЙНЫМ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОМ

В. В. Щербак

ВВЕДЕНИЕ

Если прямоугольный волновод заполнен однородной средой и в некотором его сечении расположена многощелевая диафрагма, то при падении на такое препятствие волноводной волны строгое решение дифракционной задачи можно получить (для одномерного спектра), применяя метод задачи Римана-Гильберта [1].

Представляет интерес исследование такой задачи при заполнении волновода неоднородной магнитодиэлектрической средой. Здесь рассмотрен случай, когда перед диафрагмой ($z > 0$) заполнение однородно, а в пространстве за диафрагмой параметры среды $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$ являются кусочно-постоянными функциями z . Количество однородных слоев среды за диафрагмой и толщину всех слоев, кроме последнего, считаем конечными (рис. 1а).

Метод исследования пригоден и для случая, когда на конечном расстоянии от диафрагмы (рис. 1б) волновод заканчивается сплошной идеально проводящей перегородкой (толщина последнего слоя при этом конечна).

Как и в [1], предполагаем параметры распределения диафрагмы и порядок набегающей на неоднородность волны произвольными.

Следует заметить, что в случае неоднородного заполнения поляризационное разделение полей отсутствует (падающая волна одной поляризации может возбуждать волны другой поляризации). Поэтому (в отличие от [1]) здесь рассматриваются волны смешанной поляризации. И только в некоторых частных случаях полученное решение распадается на два независимых решения для волн разных поляризаций.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямоугольный волновод, нагруженный тонкой многощелевой диафрагмой (рис. 1 а, б) и расположенными за ней M однородных слоев магнитодиэлектрика (параметры $\tilde{\epsilon}_r$, $\tilde{\mu}_r$ каждого из слоев — произвольные комплексные величины).

Набегающая (со стороны $z = \infty$) волноводная волна порядка p , l возбуждает на неоднородности одномерный спектр волн $(EH)_{nl}$. При этом перед диафрагмой ($z > 0$) имеем падающую волну и сумму отраженных, а в каждом слое среды за диафрагмой существуют и прямые и обратные волны. В таком случае компоненты полей, параллельные

щелям диафрагмы, запишутся для $M+1$ отрезков волновода соответственно в виде ($1 \leq \eta \leq M+1$):

$$E_y^\eta = (e^{ih_1 y} + e^{-ih_1 y}) \{ B \delta_{\eta-1} (e^{ig_p x} - e^{-ig_p x}) e^{-i\gamma_{nl}^1 z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n^{(\eta)} e^{-i\gamma_{nl}^1 (z+r_{\eta-1})} + D_n^\eta e^{i\gamma_{nl}^1 (z+r_\eta)}] e^{ig_n x} \}; \quad (1)$$

$$H_y^\eta = (e^{ih_1 y} - e^{-ih_1 y}) \{ A \delta_{\eta-1} (e^{ig_p x} + e^{-ig_p x}) e^{-i\gamma_{nl}^1 z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n^{(\eta)} e^{-i\gamma_{nl}^1 (z+r_{\eta-1})} + d_n^\eta e^{i\gamma_{nl}^1 (z+r_\eta)}] e^{ig_n x} \}; \quad (2)$$

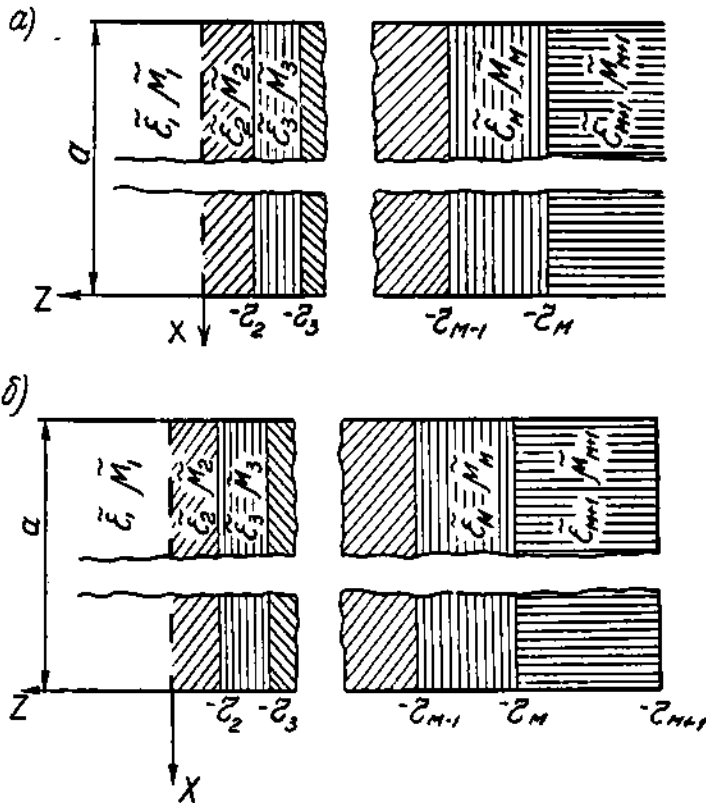


Рис. 1. Многошелевая диафрагма и слоистая среда в прямоугольном волноводе (щели диафрагмы параллельны оси Oy . В этом направлении ширина волновода равна b).

$$D_{-n}^{(\eta)} = -D_n^{(\eta)}; \quad C_{-n}^{(\eta)} = -C_n^{(\eta)}; \quad d_{-n}^{(\eta)} = d_n^{(\eta)}; \\ c_{-n}^{(\eta)} = c_n^{(\eta)}; \quad c_n^{(1)} = 0; \quad C_n^{(1)} = 0, \quad (3)$$

где

$$h_1 = \frac{\pi}{b} l; \quad g_n = \frac{\pi}{a} n; \quad \gamma_{nl}^{(\eta)} = \sqrt{k_{z_1, \mu_\eta}^2 - g_n^2 - h_1^2}; \\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}; \quad (4)$$

a и b — поперечные размеры волновода; B и A — амплитуды E_y и H_y составляющей падающей волны; $z = 0$ и $z = -r_2; -r_3; \dots -r_{M+1}$ — координаты границ раздела (r_{M+1} может быть бесконечным). Остальные компоненты полей выражаются через E_y и H_y из уравнений Максвелла.

При $z = -r_2; -r_3; \dots -r_M$ тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей должны быть непрерывными. Кроме того, в системе рис. 1 б E_y и E_x обращаются в нуль при $z = -r_{M+1}$; а в системе рис. 1 а отсутствуют обратные волны в области $z < -r_M$ (т. е. $D_n^{(M+1)} = 0$; $d_n^{(M+1)} = 0$). Воспользовавшись этим, можно выразить через амплитуды полей в области $0 > z > -r_2$ амплитуды полей во всех остальных слоях среды за диафрагмой.

Для простоты ограничимся случаем отсутствия поляризационного преобразования на всех границах, кроме $z = 0$. Это выполняется, если $l = 0$ или если на произведения параметров сред, находящихся за диафрагмой, наложено ограничение $\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{\mu}_\eta = \text{const} \neq \epsilon_1 \mu_1$. При этом имеем (для $2 \leq \eta \leq M$):

$$D_n^{(\eta)} = C_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} R_{nl}^{(\eta)} + D_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} (1 - R_{nl}^{(\eta)});$$

$$C_n^{(\eta+1)} = C_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} (1 + R_{nl}^{(\eta)}) - D_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} R_{nl}^{(\eta)}; \quad (5)$$

$$d_n^{(\eta)} = c_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} K_{nl}^{(\eta)} + d_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} K_{nl}^{(\eta)};$$

$$c_n^{(\eta+1)} = c_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} (1 + K_{nl}^{(\eta)}) - d_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} K_{nl}^{(\eta)} \quad (6)$$

$$\text{и} \quad D_n^{(M+1)} = C_n^{(M+1)} e_{nl}^{(M+1)} R_{nl}^{(M+1)}; \quad (7)$$

$$d_n^{(M+1)} = c_n^{(M+1)} e_{nl}^{(M+1)} K_{nl}^{(M+1)}; \quad (8)$$

$$e_{nl}^{(\eta)} = e^{i\gamma_{nl}^{(\eta)} (r_\eta - r_{\eta-1})},$$

где обозначено

$$R_{nl}^{(\eta)} = \begin{cases} f_{nl}^{E} = \frac{\tilde{\epsilon}_\eta - \tilde{\epsilon}_{\eta+1}}{\tilde{\epsilon}_\eta + \tilde{\epsilon}_{\eta+1}}; & \eta \neq M+1 \\ -1 & \eta = M+1; \quad r_{M+1} < \infty \\ 0 & \eta = M+1; \quad r_{M+1} = \infty \end{cases} \quad (9)$$

$$K_{nl}^{(\eta)} = \begin{cases} f_{nl}^H = \frac{\tilde{\mu}_\eta - \tilde{\mu}_{\eta+1}}{\tilde{\mu}_\eta + \tilde{\mu}_{\eta+1}}; & \eta \neq M+1 \\ 1 & \eta = M+1; \quad r_{M+1} < \infty \\ 0 & \eta = M+1; \quad r_{M+1} = \infty \end{cases}$$

Решая системы уравнений (5), (7) и (6), (8) относительно $D_n^{(2)}$ и $d_n^{(2)}$, получим:

$$D_n^{(2)} = C_n^{(2)} e_{nl}^{(2)} L_{nl}^E; \quad d_n^{(2)} = c_n^{(2)} e_{nl}^{(2)} L_{nl}^H \quad (10)$$

где коэффициенты L_{nl}^E и L_{nl}^H выражаются через $R_{nl}^{(\eta)}$, $K_{nl}^{(\eta)}$ и $e_{nl}^{(\eta)}$ ($M+1 \geq \eta \geq 2$) и удовлетворяют условиям $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_{nl}^E - R_{nl}^{(2)}) = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_{nl}^H - K_{nl}^{(2)}) = 0$. (Аналогично определяются через $C_n^{(2)}$ и $c_n^{(2)}$ амплитуды $D_n^{(1)}$, $C_n^{(\eta)}$, $d_n^{(1)}$ и $c_n^{(\eta)}$ для $M+1 \geq \eta \geq 3$).

В общем случае в равенствах (5)–(8), а следовательно, и в (10) появляются дополнительные члены, отображающие преобразование поляризации, а коэффициенты отражения f_{nl}^{E} , f_{nl}^H и поляризационного преобразования f_{nl}^{EH} , f_{nl}^{HE} будут определяться с помощью формул Френеля.

При этом ход дальнейших рассуждений не изменится, а только несколько усложнится вид коэффициентов задачи.

С помощью (10) поля во второй области ($0 > z > -r_2$), автоматически удовлетворяющие (совместно с полями третьей области) граничным условиям при $z = -r_2$, запишем так:

$$\begin{aligned} E_y^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [e^{-i\gamma_{nl}^{(2)}z} + L_{nl}^E e^{i\gamma_{nl}^{(2)}(z+2r_2)}] e^{i\beta_n x} (e^{ih_n y} + e^{-ih_n y}); \\ H_x^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [e^{-i\gamma_{nl}^{(2)}z} + L_{nl}^H e^{i\gamma_{nl}^{(2)}(z+2r_2)}] e^{i\beta_n x} (e^{ih_n y} - e^{-ih_n y}). \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем также поля в первой области

$$\begin{aligned} E_y^1 &= \{B e^{-i\gamma_{nl}^{(1)}z} (e^{i\beta_n x} - e^{-i\beta_n x}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\gamma_{nl}^{(1)}z + i\beta_n x}\} (e^{ih_n y} + e^{-ih_n y}) \\ H_x^1 &= \{A e^{-i\gamma_{nl}^{(1)}z} (e^{i\beta_n x} + e^{-i\beta_n x}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\gamma_{nl}^{(1)}z + i\beta_n x}\} (e^{ih_n y} - e^{-ih_n y}) \end{aligned} \quad (12)$$

(здесь $A_n = D_n^{(1)}$; $a_n = d_n^{(1)}$; $C_n = C_n^{(2)}$, $c_n = c_n^{(2)}$).

Выражения для остальных компонент полей получаются с помощью равенств

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i}{k_x^2 - h_x^2} \left\{ \tilde{k}_{\varepsilon_x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + h_x \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\}; \\ E_x &= \frac{i}{k_x^2 - h_x^2} \left\{ h_x \frac{\partial E_y}{\partial x} - k_{\mu_x} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right\}; \\ H_z &= \frac{i}{k_x^2 - h_x^2} \left\{ -\tilde{k}_{\varepsilon_x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + h_x \frac{\partial H_y}{\partial z} \right\}; \\ E_z &= \frac{i}{k_x^2 - h_x^2} \left\{ h_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + k_{\mu_x} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\}; \quad k_x = k \sqrt{\tilde{\varepsilon}_x \tilde{\mu}_x}, \end{aligned} \quad (13)$$

в неизвестные амплитуды в (11), (12) мы определим, удовлетворяя поля (11)–(13) граничным условиям, выполняющимся при $z = 0$ [2], [3]. Остальные амплитуды определяются с помощью (5), (6) по найденным значениям $C_n^{(2)}$, $c_n^{(2)}$.

Таким образом, рассматриваемая дифракционная задача (при любом количестве границ раздела за диафрагмой и любом условии на конце волновода) свелась к случаю, когда за диафрагмой находится отрезок волновода, заполненный средой с параметрами $\tilde{\varepsilon}_2$, $\tilde{\mu}_2$ и оканчивающийся (при $z = -r_2$) некоторой эквивалентной импедансной стенкой. Эта стенка каждую из набегающих на нее со стороны диафрагмы $(EH)_{nl}$ -волн отражает (без изменения поляризации и без преобразования в другие типы волн) с определенным коэффициентом отражения.

Все сказанное относится и к простейшему случаю $M = 1$, когда за диафрагмой расположен только один слой среды. В этом случае (в зависимости от условия на конце волновода) имеем:

$$L_{nl}^E = 0; \quad L_{nl}^H = 0 \quad (14a)$$

или

$$L_{nl}^E = -1; \quad L_{nl}^H = 1. \quad (14b)$$

В случае $M = 2$ соответственно выполняются равенства

$$L_{nl}^E = f_{nl}^{2,E}; \quad L_{nl}^H = f_{nl}^{2,H} \quad (15a)$$

или

$$\begin{aligned} L_{nl}^E &= f_{nl}^{2,E} \left\{ 1 - (e_{nl}^{(3)})^2 \frac{1 - (f_{nl}^{2,E})^2}{1 - (e_{nl}^{(3)})^2 f_{nl}^{2,E}} \right\}; \\ L_{nl}^H &= f_{nl}^{2,H} \left\{ 1 + (e_{nl}^{(3)})^2 \frac{1 - (f_{nl}^{2,H})^2}{1 + (e_{nl}^{(3)})^2 f_{nl}^{2,H}} \right\}. \end{aligned} \quad (15b)$$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД ДИФРАКЦИОННЫХ СПЕКТРОВ

Не нарушая общности, положим $\tilde{\varepsilon}_1 = 1$, $\tilde{\mu}_1 = 1$ и произведем свивание полей (11)–(13) при $z = 0$ (на щелях диафрагмы E_y , H_y , H_x , E_x должны быть непрерывны, а на лентах E_y и E_x равны нулю). При этом получаем соотношения:

$$\begin{aligned} B(\delta_{n-p} - \delta_{n+p}) + A_n &= C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2]; \\ A(\delta_{n-p} + \delta_{n+p}) - a_n &= c_n \frac{\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k^2 - h_l^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h_l^2} [1 - L_{nl}^H (e_{nl})^2] - \\ &\quad - \frac{g_n h_l k_2^2 - k^2}{k \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h_l^2} C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2] \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ a_n \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} - \frac{g_n}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)}} \xi_{n2}^l C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2] \right\} e^{i g_n x} + \\ + A(1 - \xi_{p1}^l) (e^{i g_p x} + e^{-i g_p x}) = 0; \quad x \in \mathbb{C} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} e^{i g_n x} = \tilde{\gamma}_{pl}^{(1)} A (e^{i g_p x} + e^{-i g_p x}); \quad x \in \mathbb{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2] e^{i g_n x} = 0; \quad x \in \mathbb{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} \xi_{n3}^l C_n [1 - L_{nl}^E (e_{nl})^2] + g_n \Omega d_n \right\} e^{i g_n x} = \\ = (\tilde{\gamma}_{pl}^{(1)}) B + g_p \Omega A (e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}), \quad x \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (17)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \xi_{n1}^l &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k^2 - h^2} \frac{1 + L_{nl}^H (e_{nl})^2}{1 - L_{nl}^H (e_{nl})^2} \right\}; \\ \xi_{n2}^l &= \frac{h}{2 \tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k} \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - k^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k^2 - h^2} \frac{1 + L_{nl}^H (e_{nl})^2}{1 - L_{nl}^H (e_{nl})^2}; \\ \xi_{n3}^l &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k^2 - h^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} \frac{1 - L_{nl}^E (e_{nl})^2}{1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2} \right\}; \\ \Omega &= \frac{h k_2^2 - k^2}{2k k_2^2 - h^2} \end{aligned} \quad (18)$$

(индекс 2 у величин $\xi_{nl}^{(2)}$ и индекс l у h , опущены). Кроме того, обозначим

$$\begin{aligned}\xi_{ns}^i &= \xi_{ns} + \left(\frac{g_n}{\gamma_{nl}^{(1)}}\right)^2 \xi_{ns}^i \frac{\Omega}{\xi_{n1}^i}; \\ \xi_{ns}^i &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_{nl}^{(1)} i + L_{nl}^H (e_{nl})^2}{\gamma_{nl}^{(2)} 1 - L_{nl}^H (e_{nl})^2}\right); \\ \Omega_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu_2} \frac{k_2^2 - h^2}{k^2 - h^2}\right); \quad \Omega_2 = \frac{h}{2\mu_2 k} \frac{k_2^2 - h^2}{k^2 - h^2}; \\ \Omega_3 &= \frac{1}{2} \left(1 + \tilde{\epsilon}_2 \frac{k^2 - h^2}{k_2^2 - h^2}\right); \quad \Omega_4 = \Omega_2 - \frac{\Omega \Omega_2}{\Omega_1}; \\ \xi &= \Omega_1 \Omega_4 = \frac{1}{4} (1 + \tilde{\epsilon}_2) \left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right),\end{aligned}\tag{19}$$

а также

$$\begin{aligned}x_n &= C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2]; \\ y_n &= a_n \xi_{n1}^i - \frac{g_n}{\gamma_{nl}^{(1)}} \xi_{n2}^i C_n [1 + L_{nl}^E (e_{nl})^2] + A (1 - \xi_{p1}^i) (\delta_{n-p} + \delta_{n+p}); \\ \zeta_{nl}^H &= |n| + i \frac{\pi}{k} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{\Omega_1}{\xi_{n1}^i}; \quad \zeta_{nl}^E = |n| + i \frac{\pi}{k} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{\xi_{n4}^i}{\Omega_4}; \\ x &= \frac{2a}{\lambda}; \quad \zeta_{nl} = -i \frac{\Omega}{\xi_{n1}^i} \left(\frac{1}{\xi_{n1}^i} - \frac{1}{\Omega}\right) n; \\ -\frac{1}{\xi} \zeta_{nl} &= -i \Omega_1 \left(\frac{\xi_{n2}^i}{\xi_{n1}^i} - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) n = -i \frac{n}{\xi} \Omega \Omega_1 \frac{1 - \xi_{ns}^i}{\xi_{n1}^i}.\end{aligned}\tag{20}$$

В этих обозначениях уравнения (17) переписутся так:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{i \xi_n x} &= 0; \quad x \in \mathbb{I} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ y_n \frac{\pi}{k} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{1}{\xi_{n1}^i} + x_n n \frac{\xi_{n2}^i}{\xi_{n1}^i} \right\} e^{i \xi_n x} &= \frac{\pi}{k} \gamma_{p1}^{(1)} A \frac{1}{\xi_{p1}^i} (e^{i \xi_p x} + e^{-i \xi_p x}); \quad x \in \mathbb{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i \xi_n x} &= 0; \quad x \in \mathbb{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ y_n n \frac{\Omega}{\xi_{n1}^i} + \frac{\pi}{k} \gamma_{nl}^{(1)} \xi_{n4}^i x_n \right\} e^{i \xi_n x} &= \left(\frac{\pi}{k} \gamma_{p1}^{(1)} B + \rho \frac{\Omega}{\xi_{p1}^i} A\right) (e^{i \xi_p x} - e^{-i \xi_p x}) \quad x \in \mathbb{I}\end{aligned}\tag{21}$$

или после дополнительных преобразований

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{i \xi_n x} = 0 & x \in \mathbb{I} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n |n| e^{i \xi_n x} = J^H (e^{i \xi_p x}), & x \in \mathbb{L} \end{cases}\tag{22}$$

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i \xi_n x} = 0 & x \in \mathbb{I} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n |n| e^{i \xi_n x} = J^E (e^{i \xi_p x}), & x \in \mathbb{L} \end{cases}\tag{23}$$

где

$$J^H(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = -i \frac{x}{k} \gamma_{\alpha}^{(1)} \frac{\Omega}{\zeta_{p1}'} A (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ y_n \zeta_{nl}^H - \frac{1}{\xi} x_n \zeta_{nl}' \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}; \tag{25}$$

$$J^E(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = -i \frac{\Omega_1}{\xi} \left(\frac{x}{k} \gamma_{\alpha}^{(1)} B + \rho \frac{\Omega}{\zeta_{p1}'} A \right) (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ y_n \zeta_{nl} + x_n \zeta_{nl}^E \} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{26}$$

Заметим, что при отсутствии ограничения $\tilde{\epsilon}_x \tilde{\mu}_y = \text{const}$ получаются уравнения, отличающиеся от (23)–(26) лишь коэффициентами при A и B и заменой формул (20) и (21), определяющих $x_n, y_n, \zeta_{nl}^E, \zeta_{nl}^H, \zeta_{nl}, \zeta_{nl}'$, на более сложные соотношения.

Уравнения (23) эквивалентны задаче Римана — Гильберта для функции

$$y(z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n n z^n & |z| < 0 \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n n z^n, & |z| > 0 \end{cases}$$

аналитической в плоскости z с разрезом по контуру L , определенному в [1].

Решая краевую задачу, получим для коэффициентов Фурье y_n функции $y(z)$ систему (пока незамкнутую) линейных алгебраических уравнений:

$$m y_m = (\rho - \zeta_{p1}^H) A (\bar{V}_m^{\rho} - V_m^{-\rho}) + \sum_{n=0}^{\infty} (y_n \zeta_{nl}^H + x_n \zeta_{nl}) (\bar{V}_m^n + \delta_n \bar{V}_m^{-n}) + \sum_{k=1}^t \lambda_k \bar{R}_{m-k+1}; \quad m \geq 0 \tag{27}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{i n \bar{\tau}_k} = 0; \quad k = 1, \dots, t \tag{27'}$$

Аналогично из (24) найдем систему алгебраических уравнений:

$$m x_m = -i \frac{\Omega_1}{\xi} \left(\frac{x}{k} \gamma_{\alpha}^{(1)} B + \rho \frac{\Omega}{\zeta_{p1}'} A \right) (V_m^{\rho} - V_m^{-\rho}) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n \zeta_{nl} + x_n \zeta_{nl}^E) (V_m^n - V_m^{-n}) + \sum_{k=1}^t \lambda_k R_{m-k+1}; \quad m > 0 \tag{28}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i n \tau_k} = 0, \quad k = 1, \dots, t \tag{28'}$$

Коэффициенты $V_m^n, R_m, \varphi_k, \bar{V}_m^n, \bar{R}_m, \bar{\varphi}_k$, зависящие от геометрических параметров диафрагмы, определены в [1].

Уравнения (27) и (28) вместе образуют замкнутую квазирегулярную систему. Эта бесконечная система может быть разрешена методом редукции.

Заметим, что коэффициенты матрицы этой системы не зависят от ρ , что облегчает расчеты на ЭВМ для разных значений ρ одновременно.

Мы рассмотрим еще случаи, когда решения для волн разных поляризацій независимы.

Если комплексные показатели преломления среды перед диафрагмой и в первом слое за диафрагмой равны ($\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 = 1$) (на остальные параметры ограничений не накладывается), то из (18)—(21) имеем:

$$\begin{aligned} \xi_{n1}^l &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{\mu}_2} \frac{1 + L_{nl}^H(e_{nl})^2}{1 - L_{nl}^H(e_{nl})^2} \right\}; \\ \xi_{n3}^l = \zeta_{n4}^l &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{1 - L_{nl}^E(e_{nl})^2}{1 + L_{nl}^E(e_{nl})^2} \right\}; \\ \Omega &= \Omega_2 = \xi_{n1}^l = 0; \quad \zeta_{nl} = 0; \\ \Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_4 &= \frac{1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\tilde{\mu}_2}}{2}; \\ y_n &= a_n \xi_{n1}^l + A(1 - \xi_{n1}^l)(\delta_{n-p} + \delta_{n+p}), \end{aligned} \quad (29)$$

что приводит к замене (27) и (28) на две независимые системы

$$\begin{aligned} my_m &= -i \frac{x}{k} \gamma_{\rho l}^{(1)} \frac{1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} A(\bar{V}_m^p + \bar{V}_m^{-p}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_{n1}^l \gamma_{nl}^H (\bar{V}_m^n + \delta_n \bar{V}_m^{-n}) + \\ &+ \sum_{k=1}^l \tilde{\lambda}_k \bar{R}_{m-k+1} \quad m > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

и

$$\begin{aligned} mx_m &= -i \frac{x}{k} \gamma_{\rho l}^{(1)} \frac{2}{1 + \frac{1}{\tilde{\mu}_2}} (V_m^p - V_m^{-p}) B + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \zeta_{nl}^E (V_m^n - V_m^{-n}) + \sum_{k=1}^l \lambda_k R_{m-k+1} \quad m > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Все коэффициенты в (30) и (31), зависящие от l , выражаются через параметр $x' = \frac{x}{k} \gamma_{\rho l}^{(1)} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{b} l\right)^2}$. Поэтому зависимость решения систем (30), (27) и (31), (28) от x' тождественна для случая разных l , т. е. в этом случае численные расчеты достаточно произвести только для $E_{\rho, \sigma}^E$ и $H_{\rho, \sigma}^E$ -волн.

В общем случае для каждого значения l требуются свои расчеты.

Если слой, расположенный за диафрагмой, единственный и простирается до $z = \infty$, то L_{nl}^E и L_{nl}^H обращаются в нуль, а уравнения (30), (31) еще более упрощаются. Если при этом еще $\tilde{\varepsilon}_2 = 1$, $\tilde{\mu}_2 = 1$, то получим уравнения, совпадающие с системами (9), (11) и (22) работы [1].

Рассмотрим также случай, когда l равно нулю ($\tilde{\varepsilon}_2$ и $\tilde{\mu}_2$ — произвольны). Тогда из (18)—(21) имеем:

$$\begin{aligned} \xi_{n1}^0 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\gamma_{n0}^{(1)} \frac{1 + L_{n0}^H(e_{n0})^2}{1 - L_{n0}^H(e_{n0})^2}}{\gamma_{n0}^{(2)}} \right\}; \\ \xi_{n3}^0 = \zeta_{n4}^0 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{\mu}_2} \frac{\gamma_{n0}^{(2)} \frac{1 - L_{n0}^E(e_{n0})^2}{1 + L_{n0}^E(e_{n0})^2}}{\gamma_{n0}^{(1)}} \right\}; \end{aligned}$$

$$\Omega = \Omega_2 = \xi_{n2}^0 = 0; \quad \zeta_{n0} = 0; \quad \Omega_1 = \frac{1 + \tilde{\xi}_2}{2}; \quad (32)$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = \frac{1 + \frac{1}{\tilde{\xi}_2}}{2} \neq \Omega_1;$$

$$y_n = a_n \xi_{n1}^0 + A(1 - \xi_{n1}^0)(\delta_{n-p} + \delta_{n+p})$$

и из (28) получим систему, отличающуюся от (31) лишь заменой обозначений (29) на (32) и определяющую решение для E_{n0}^y -волн. Коэффициенты полученной системы не зависят от b (поперечный размер волновода в направлении, параллельном щелям диафрагмы).

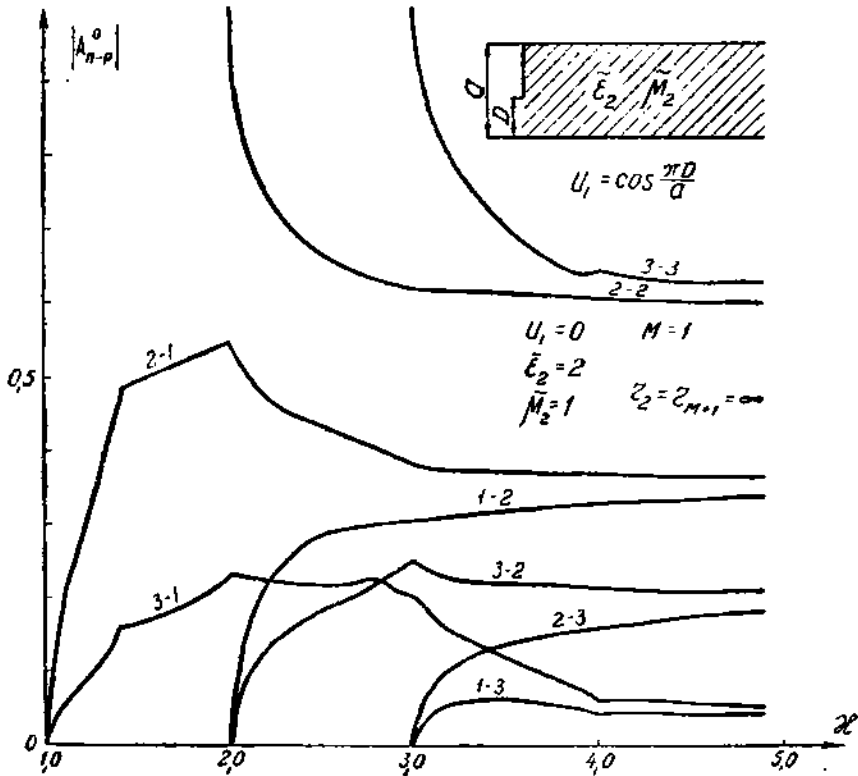


Рис. 2. Зависимость от x модулей взаимных коэффициентов преобразования (волны E_{p0}^y в волну E_{n0}^y) для трех первых гармоник отраженного поля.

Аналогичная система, совпадающая по форме с (30), получается при $l = 0$ из (27). Однако H_{n0}^y -волны не могут существовать в прямоугольном волноводе (составляющая H^y дифракционных полей (1)–(3) автоматически обращается в нуль при $l = 0$, благодаря множителю $(e^{ih_l y} - e^{-ih_l y})$). Таким образом, решение системы (27), (30), (32) имеет иной смысл.

Результаты численного расчета

Решение окончательных систем алгебраических уравнений для различного количества слоев и различных видов диафрагм проведено на ЭВМ (для $p = 1, 2, 3$). Точность расчетов контролировалась программой

вычислений с помощью проверки выполнения закона сохранения энергии. В данном случае

$$S^{\text{пад}} = S^{\text{изл}} + P^n, \quad (33)$$

где $S^{\text{пад}}$ — поток мощности первичной волны, набегающей на неоднородность;

$S^{\text{изл}}$ — сумма потоков мощности, уходящих от неоднородности на бесконечность,

P^n — сумма магнитодиэлектрических потерь во внутренних областях.

Аналитические выражения энергетических величин через найденные из (27), (28) амплитуды спектров получаются с помощью (1)—(3), (13).

Здесь представлены некоторые из численных результатов.

Простейшей системой является вариант $M=1$ неоднородности (рис. 1 а). В случае $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_1 = 1$, $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_1 = 1$ он совпадает с системой, исследованной в [1]. Кривые зависимости амплитуд от x для такой нагрузки (рисунки 2, 3) изрезаны сильнее соответствующих кривых [1]. Это объясняется тем, что при $\epsilon_2 \mu_2 \neq \epsilon_1 \mu_1$ критические частоты каждой из дифракционных волн разные в областях $z > 0$ и $z < 0$. В соответствии с этим появляется большее количество точек, в которых указанные выше кривые имеют (в случае вещественного $\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\mu}_2$) излом (разрыв непрерывности производной). На рис. 2, 3 это точки $x = 1, 2, 3, \dots$ и $x \sqrt{2} = 1, 2, 3, \dots$. При наличии потерь во второй области ($\text{Im} \{\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\mu}_2\} \neq 0$), изломы, соответствующие волнам этой области, сглаживаются.

В случае более сложных неоднородностей кривые зависимости от x приобретают дополнительную осцилляцию, вызванную резонансами волн, возбужденных во внутренних областях (рисунки 4, 5, 6). При наличии потерь в средах эти осцилляции сглаживаются.

Обращаем также внимание на следующие явления. Пусть в системе (рис. 1 б) дифрагирует $E_{p,0}^y$ -волна. Если в средах отсутствуют потери, то для всех n

$$|L_{r,0}^E(e_{r,0}^{(2)})^2| = 1. \quad (34)$$

Заметим, что в этом случае при $x < 2$ модуль коэффициента отражения $E_{1,0}^y$ -волны равен единице (рисунки 4, 5). Тогда при некоторых значениях x имеем

$$L_{p,0}^E(e_{r,0}^{(2)})^2 = -1.$$

При этом коэффициенты преобразования $E_{p,0}^y$ -волны во все остальные $E_{n,0}^y$ -волны равны нулю ($A_n, C_n^{(1)}, D_n^{(1)} = 0, n \neq p$); собственный коэффициент отражения равен минус единице (рис. 4: $x = \sqrt{5}, \sqrt{17}$; рис. 5: $x = \sqrt{\frac{17}{2}}, \sqrt{\frac{37}{2}}$) и в плоскости диафрагмы образуется узел составляющей поля E_y .

Если же при данном x

$$L_{k,0}^E(e_{k,0}^{(2)})^2 = -1; k \neq p$$

то в нуль обращается только A_k . При этом, если $p = 1, k = 2$ (или $p = 2, k = 2$) и $x < 3$ (другие волны не распространяются), то, в силу закона сохранения энергии, модуль коэффициента отражения $|A_p|$ равен единице (рис. 4: $x = \sqrt{8}$; рис. 5: $x = \sqrt{\frac{20}{2}}$).

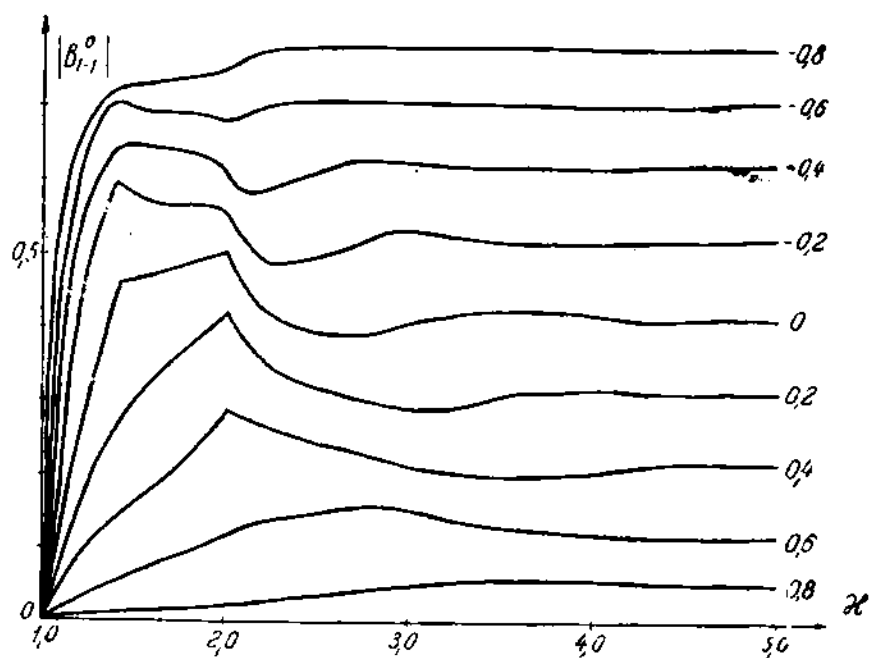
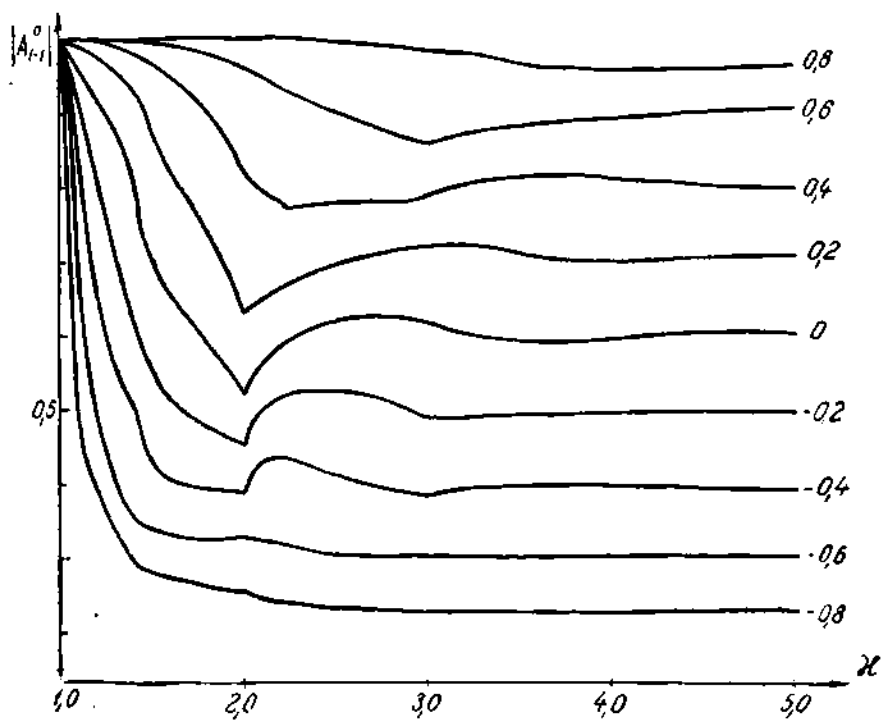


Рис. 3. Зависимость от x и u_1 модулей коэффициентов отражения и прохождения $L_{1,0}^o$ волны (неоднородность та же, что и на рис. 2).

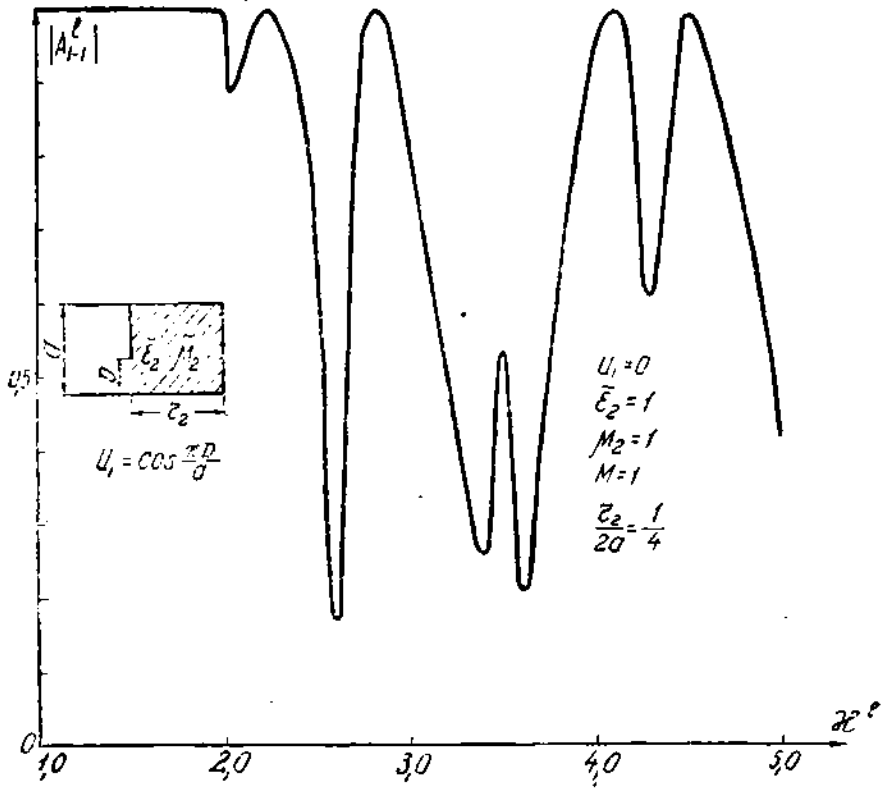


Рис. 4. Система одноленточная асимметричная диафрагма — экран. Модуль коэффициента отражения волны $E_{1,1}^e$ в зависимости от α^e .

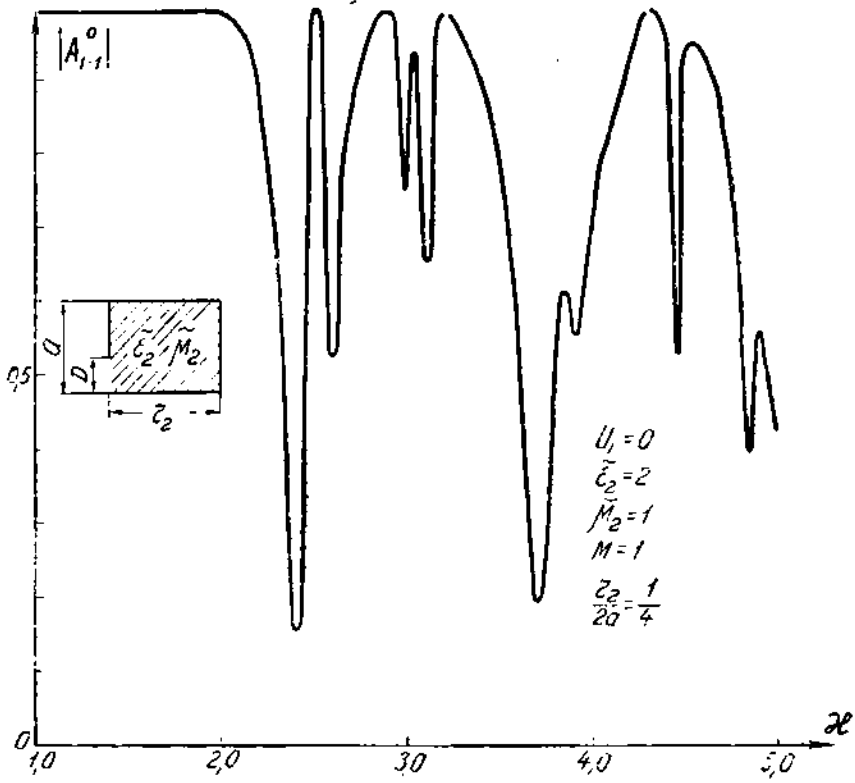


Рис. 5. Модуль коэффициента отражения волны $E_{1,0}^H$ в зависимости от z/l .

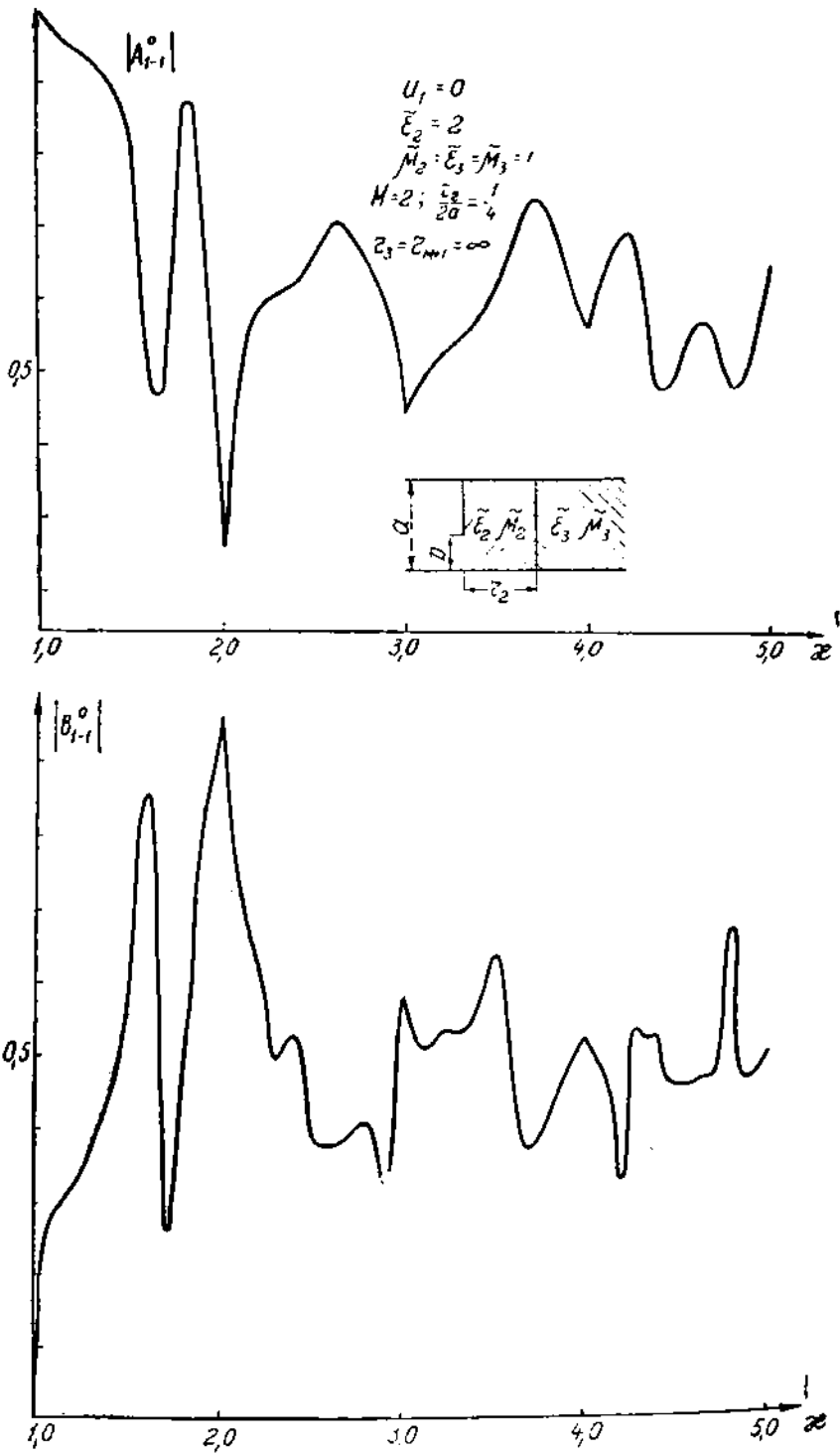


Рис. 6. Зависимость от x модулей коэффициентов отражения и прохождения $E_{1,0}^v$ -волны.

При $l \neq 0$ (из-за преобразования в волны другой поляризации) описанные выше закономерности не наблюдаются.

В заключение отметим, что с помощью леммы о пропорциональности изменения $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$ во всем пространстве [4] результаты данной работы обобщаются на случай $\tilde{\epsilon}_1 \neq 1$; $\tilde{\mu}_1 \neq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

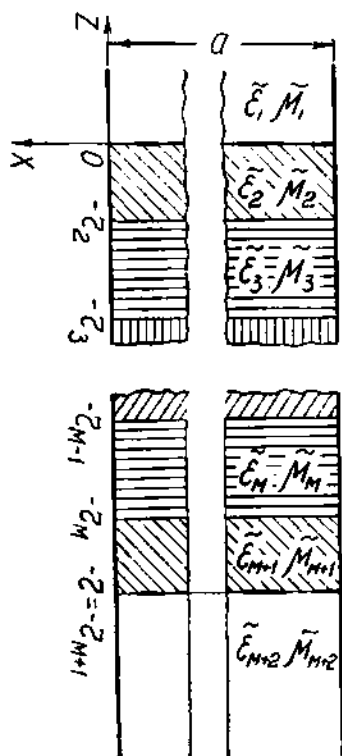
1. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. «Радиотехника и электроника», т. XI, 4, 1966.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXII, в. 4, 1962.
3. А. И. Адоньян, В. В. Щербак. ЖТФ, XXXIV, в. 1, 1964.
4. Л. А. Вайштейн. Электромагнитные волны, М., изд-во «Сов. радио», 1957.

391263

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВОЙНОЙ РАВНОЩЕЛЕВОЙ ДИАФРАГМЕ С МНОГОСЛОЙНЫМ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОМ

В. В. Щербак

1. Рассмотрим прямоугольный волновод, нагруженный двумя тонкими многощелевыми диафрагмами (рис. 1), пространство между которыми заполнено слоистой магнитодиэлектрической средой ($\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$ — кусочнопостоянные функции z). Пусть на эту неоднородность со стороны $z > 0$ набегают волны порядка p, l . Необходимо найти полное поле дифракции.



Ищем это поле в виде суперпозиции волн $(EH)_{nl}$ ($n = 0, 1, \dots$). Эти волны внутри каждого слоя среды, расположенной между диафрагмами, распространяются (или затухают) в обоих направлениях, а во внешних областях $z > 0$ и $z < -r_{M+1} = -r$ уходят от препятствия.

В таком случае компоненты полей, параллельные щелям диафрагм, запишутся для $M+2$ отрезков волновода так (1):

$$E_y = (e^{ih_1 y} + e^{-ih_1 y}) \{ B \delta_{l,-1} (e^{ig_p x} - e^{-ig_p x}) e^{-i\gamma_{pl}^{(1)} z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n^{(\gamma)} e^{-i\gamma_{nl}^{(\gamma)}(z+r_{\gamma-1})} + D_n^{(\gamma)} e^{i\gamma_{nl}^{(\gamma)}(z+r_{\gamma})}] e^{ig_n x} \}; \quad (1)$$

$$H_y = (e^{ih_1 y} - e^{-ih_1 y}) \{ A \delta_{l,-1} (e^{ig_p x} + e^{-ig_p x}) \times e^{-i\gamma_{pl}^{(1)} z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n^{(\gamma)} e^{-i\gamma_{nl}^{(\gamma)}(z+r_{\gamma-1})} + d_n^{(\gamma)} e^{i\gamma_{nl}^{(\gamma)}(z+r_{\gamma})}] e^{ig_n x} \};$$

Рис. 1. Система из двух идентичных многощелевых диафрагм и слоистой среды в прямоугольном волноводе (щели диафрагм параллельны оси Oy , а ширина волновода в этом направлении равна b).

$$D_{-n}^{(\gamma)} = -D_n^{(\gamma)}; \quad C_{-n}^{(\gamma)} = -C_n^{(\gamma)}; \quad d_{-n}^{(\gamma)} = d_n^{(\gamma)}; \quad c_{-n}^{(\gamma)} = c_n^{(\gamma)};$$

$$c_n^{(1)} = 0; \quad C_n^{(1)} = 0; \quad d_n^{(M+2)} = 0; \quad D_n^{(M+2)} = 0; \quad (2)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & k \neq 0, \end{cases}$$

где

$$h_l = \frac{\pi}{b} l; \quad g_n = \frac{\pi}{a} n; \quad \gamma_{nl}^2 = \sqrt{k^2 \tilde{\epsilon}_\eta \tilde{\mu}_\eta - g_n^2 - h_l^2};$$

B и A соответственно E_y и H_y — составляющие падающей волны;

$z = 0$ и $z = -r_{M+1}$ — координаты диафрагм;

$z = -r_2; -r_3; \dots -r_M$ — координаты границ раздела в области между диафрагмами (M — количество слоев);

$\tilde{\epsilon}_\eta, \tilde{\mu}_\eta$ — параметры среды в соответствующем отрезке волновода.

Остальные компоненты полей выражаются через E_μ и H_μ из уравнений Максвелла.

Как и в [1], ограничимся для простоты случаем $\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{\mu}_\eta = \text{const} \neq \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\mu}_1$. (При $l = 0$ такого ограничения накладывать не будем). Тогда, сшивая поля на границах раздела, получим (для $2 \leq \eta \leq M$) соотношения:

$$\begin{aligned} D_n^{(\eta)} &= C_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} f_{nl}^{(\eta E)} + D_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} (1 - f_{nl}^{(\eta E)}); \\ C_n^{(\eta+1)} &= C_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} (1 + f_{nl}^{(\eta E)}) - D_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} f_{nl}^{(\eta E)}; \\ d_n^{(\eta)} &= c_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} f_{nl}^{(\eta H)} + d_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} (1 - f_{nl}^{(\eta H)}); \\ c_n^{(\eta+1)} &= c_n^{(\eta)} e_{nl}^{(\eta)} (1 + f_{nl}^{(\eta H)}) - d_n^{(\eta+1)} e_{nl}^{(\eta+1)} f_{nl}^{(\eta H)}; \\ e_{nl}^{(\eta)} &= e^{i\gamma_{nl}^\eta (r_{\eta-1} - r_{\eta-1})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты $f_{nl}^{(\eta E)}, f_{nl}^{(\eta H)}$ определены формулами (9) работы [1].

Решая уравнения (3), выразим амплитуды $D_n^{(2)}, C_n^{(M+1)}$ и $d_n^{(2)}, c_n^{(M+1)}$ (а также $D_n^{(1)}, C_n^{(1)}$ и $d_n^{(1)}, c_n^{(1)}$ для $M > \eta > 3$) соответственно через $C_n^{(2)}, D_n^{(M+1)}$ и $c_n^{(2)}, d_n^{(M+1)}$:

$$\begin{aligned} e_{nl}^{(2)} D_n^{(2)} - C_n^{(2)} L_{nl}^E + D_n^{(M+1)} \bar{T}_{nl}^E; \\ e_{nl}^{(M+1)} C_n^{(M+1)} = C_n^{(2)} T_{nl}^E + D_n^{(M+1)} L_{nl}^E; \\ e_{nl}^{(2)} d_n^{(2)} = c_n^{(2)} L_{nl}^H + d_n^{(M+1)} \bar{T}_{nl}^H; \\ e_{nl}^{(M+1)} c_n^{(M+1)} = c_n^{(2)} T_{nl}^H + d_n^{(M+1)} \bar{L}_{nl}^H. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты $L_{nl}^E, T_{nl}^E, \bar{L}_{nl}^E, \bar{T}_{nl}^E$ и $L_{nl}^H, T_{nl}^H, \bar{L}_{nl}^H, \bar{T}_{nl}^H$ выражаются соответственно через $f_{nl}^{(\eta E)}$ или $f_{nl}^{(\eta H)}$, а также через e_{nl}^η . (При $l \rightarrow 0$ эти коэффициенты быстро стремятся к нулю). Заметим, что выражения для $\bar{L}_{nl}^E, \bar{T}_{nl}^E$ получаются соответственно из L_{nl}^E, T_{nl}^E при замене e_{nl}^η на $e_{nl}^{\eta+3-\eta}$ и $f_{nl}^{(\eta E)}$ на $f_{nl}^{(\eta+2-\eta) E}$. Остальные коэффициенты получаются из коэффициентов с индексом E заменой $f_{nl}^{(\eta E)}$ на $f_{nl}^{(\eta H)}$. С помощью (4) поля во второй и $(M+1)$ -й области переписуются так:

$$\begin{aligned} E_y^2 &= \sum_n [C_n e^{-i\gamma_{nl}^{(2)} z} + (C_n L_{nl}^E + D_n \bar{T}_{nl}^E) e^{i\gamma_{nl}^{(2)} z}] e^{i g_n x}; \\ H_y^2 &= \sum_n [c_n e^{-i\gamma_{nl}^{(2)} z} + (c_n L_{nl}^H + d_n \bar{T}_{nl}^H) e^{i\gamma_{nl}^{(2)} z}] e^{i g_n x}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_y^{M+1} &= \sum_n [D_n e^{i\gamma_{nl}^{(M+1)} z} + (D_n \bar{L}_{nl}^E + C_n T_{nl}^E) e^{-i\gamma_{nl}^{(M+1)} z}] e^{i g_n x}; \\ H_y^{M+1} &= \sum_n [d_n e^{i\gamma_{nl}^{(M+1)} z} + (d_n \bar{L}_{nl}^H + c_n T_{nl}^H) e^{-i\gamma_{nl}^{(M+1)} z}] e^{i g_n x}. \end{aligned} \quad (6)$$

(Множитель зависимости от y опускаем). Перепишем также поля в первой и $(M+2)$ -й области:

$$E_y^I = B(e^{ig_{\rho}x} - e^{-ig_{\rho}x})e^{-i\gamma_{nl}^{(1)}z} + \sum_n A_n e^{i\gamma_{nl}^{(1)}z + ig_n x};$$

$$H_y^I = A(e^{ig_{\rho}x} - e^{-ig_{\rho}x})e^{-i\gamma_{nl}^{(1)}z} + \sum_n a_n e^{i\gamma_{nl}^{(1)}z + ig_n x}; \quad (7)$$

$$E_y^{M+2} = \sum_n B_n e^{-i\gamma_{nl}^{(M+2)}z + ig_n x};$$

$$H_y^{M+2} = \sum_n b_n e^{-i\gamma_{nl}^{(M+2)}z + ig_n x}, \quad (8)$$

где обозначено

$$C_n = C_n^{(2)}; \quad c_n = c_n^{(2)}; \quad D_n = D_n^{M+1}; \quad d_n = d_n^{(M+1)}; \quad A_n = D_n^{(1)};$$

$$a_n = d_n^{(1)}; \quad B_n = C_n^{(M+2)}; \quad b_n = c_n^{(M+2)}. \quad (9)$$

Выражения для остальных компонент полей получаются с помощью (13) [1].

Неизвестные амплитуды (9) мы определим, сшивая поля (5)–(18) при $z=0$ и при $z=-r_{M+1}$. Остальные амплитуды находятся после этого с помощью равенств (4). В случае $M=1$, когда между диафрагмами расположен только один слой среды толщины $r_2=r$,

$$L_{nl}^E = L_{nl}^H = 0; \quad T_{nl}^E = T_{nl}^H = e^{i\gamma_{nl}^{(2)}r}. \quad (10a)$$

В случае $M=3$ имеем:

$$L_{nl}^E = (e_{nl}^{(2)})^2 \frac{f_{nl}^{2,E} [1 + (e_{nl}^{(3)})^2 f_{nl}^{2,E} f_{nl}^{3,E} E] + f_{nl}^{3,E} [1 - (f_{nl}^{2,E})^2] (e_{nl}^{(3)})^2}{1 + (e_{nl}^{(3)})^2 f_{nl}^{2,E} f_{nl}^{3,E} E};$$

$$T_{nl}^E = \frac{(1 + f_{nl}^{2,E})(1 + f_{nl}^{3,E})}{1 + (e_{nl}^{(3)})^2 f_{nl}^{2,E} f_{nl}^{3,E}} e_{nl}^{(2)} e_{nl}^{(3)} e_{nl}^{(4)}. \quad (10b)$$

2. Используя граничные условия, выполняющиеся на щелях и лентах первой диафрагмы ($z=0$), получим равенства (индекс l у величин h_i опускаем);

$$B(\delta_{n-p} - \delta_{n+p}) + a_n - C_n(1 + L_{nl}^E) + D_n \bar{T}_{nl}^E;$$

$$A\delta_{n-p} + \delta_{n+p} - a_n = [C_n(1 - L_{nl}^H) - d_n \bar{T}_{nl}^H] \times$$

$$\times \frac{\mu_2 \gamma_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2}{\mu_1 \gamma_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} - \frac{g_n h k_2^2 - k_1^2}{k_1 \gamma_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} \times$$

$$\times [C_n(1 + L_{nl}^E) + D_n \bar{T}_{nl}^E] \quad (11)$$

и

$$\sum_n \{a_n - (c_n(1 + L_{nl}^H) + d_n \bar{T}_{nl}^H)\} e^{ig_n x} +$$

$$+ A(e^{ig_{\rho}x} + e^{-ig_{\rho}x}) = 0; \quad x \in \Pi_1$$

$$\sum_n a_n \gamma_{nl}^{(1)} e^{ig_n x} = A \gamma_{nl}^{(1)} (e^{ig_{\rho}x} + e^{-ig_{\rho}x}); \quad x \in \Pi_1 \quad (12)$$

$$\sum_n [C_n(1 + L_{nl}^E) + D_n \bar{T}_{nl}^E] e^{ig_n x} = 0; \quad x \in \Pi_1$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left\{ A_n + a_n \frac{g_n h}{k_1 \gamma_{nl}^{(1)}} + \frac{\tilde{\epsilon}_2 \gamma_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2}{\tilde{\epsilon}_1 \gamma_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} [C_n (1 - L_{nl}^E) - D_n \bar{T}_{nl}^E] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{g_n h}{k_1 \gamma_{nl}^{(1)}} \frac{k_1^2 - h^2}{k_2^2 - h^2} [c_n (1 + L_{nl}^H) + d_n T_{nl}^H] \right\} \gamma_{nl}^{(1)} e^{i g_n x} = \\ & \quad = \left(B \gamma_{nl}^{(1)} + \frac{g_p h}{k} A \right) (e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}), \quad x \in \Pi_1 \end{aligned}$$

Аналогично с помощью граничных условий, выполняющихся при $z = 0$ и при $z = -r_{M+1}$, находим:

$$\begin{aligned} B_n &= D_n (1 + \bar{L}_{nl}^E) + C_n T_{nl}^E; \\ -b_n &= [d_n (1 - \bar{L}_{nl}^H) - c_n T_{nl}^H] \frac{\tilde{\mu}_{M+1} \gamma_{nl}^{M+1} k_{M+2}^2 - h^2}{\tilde{\mu}_{M+2} \gamma_{nl}^{M+2} k_{M+1}^2 - h^2} - \\ & \quad - \frac{g_n h}{k_{M+2} \gamma_{nl}^{(M+2)}} \frac{k_{M+1}^2 - k_{M+2}^2}{k_{M+1}^2 - h^2} [D_n (1 + \bar{L}_{nl}^E) + C_n T_{nl}^E]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_n \{ b_n - [d_n (1 + \bar{L}_{nl}^H) + c_n T_{nl}^H] \} e^{i g_n x} = 0; \quad x \in \Pi_2$$

$$\sum_n b_n \tilde{\gamma}_{nl}^{(M+2)} e^{i g_n x} = 0; \quad x \in \Pi_2$$

$$\sum_n [D_n (1 + \bar{L}_{nl}^E) + C_n T_{nl}^E] e^{i g_n x} = 0; \quad x \in \Pi_2$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left\{ B_n - b_n \frac{g_n h}{k_{M+2} \gamma_{nl}^{M+2}} + \frac{\tilde{\epsilon}_{M+1} \gamma_{nl}^{M+1} k_{M+2}^2 - h^2}{\tilde{\epsilon}_{M+2} \gamma_{nl}^{M+2} k_{M+1}^2 - h^2} \times \right. \\ & \quad \times [D_n (1 - L_{nl}^E) - C_n T_{nl}^E] + \frac{g_n h}{k_{M+2} \gamma_{nl}^{(M+2)}} \frac{k_{M+2}^2 - h^2}{k_{M+1}^2 - h^2} \times \\ & \quad \left. \times [d_n (1 + \bar{L}_{nl}^H) + c_n T_{nl}^H] \right\} \gamma_{nl}^{(M+2)} e^{i g_n x} = 0. \quad x \in \Pi_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $k_\eta = k \sqrt{\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{\mu}_\eta}$;

Π_1 — область изменения x , соответствующая щелям первой диафрагмы; Π_1 — область, соответствующая лентам первой диафрагмы; области Π_2 и Π_2 соответствуют второй диафрагме.

Введем следующие ограничения:

1. Среды перед первой диафрагмой $z > 0$ и за второй диафрагмой $z < -r_{M+1}$ одинаковы:

$$\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_{M+2}; \quad \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_{M+2}. \quad (15)$$

2. Между диафрагмами распределение среды симметрично относительно середины промежутка $z = -\frac{1}{2} r_{M+1}$ (что возможно при четном количестве слоев M), т. е.

$$e_{nl}^\eta = e_{nl}^{M+3-\eta}; \quad \tilde{\epsilon}_\eta = \tilde{\epsilon}_{M+3-\eta}; \quad \tilde{\mu}_\eta = \tilde{\mu}_{M+3-\eta}. \quad (16)$$

Это приводит к равенствам

$$L_{nl}^E = \bar{L}_{nl}^E; \quad L_{nl}^H = \bar{L}_{nl}^H; \quad T_{nl}^E = \bar{T}_{nl}^E; \quad T_{nl}^H = \bar{T}_{nl}^H. \quad (17)$$

С учетом (15), (16), (17) из соотношений (11) и (13) получим:

$$\begin{aligned}
 B(\delta_{n-p} - \delta_{n+p}) + (A_n \pm B_n) &= (C_n \pm D_n) \times \\
 &\times (1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E); \\
 A(\delta_{n-p} + \delta_{n+p}) - (a_n \mp b_n) &= (c_n \mp d_n) (1 - L_{nl}^H \pm T_{nl}^H) \times \\
 &\times \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} - \frac{g_n h}{k_1 \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)}} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - h^2} (C_n \pm D_n) (1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E). \quad (18)
 \end{aligned}$$

(Здесь $\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1}$, а также $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\mu}_1}$).

Кроме того, ограничимся случаем, когда первая и вторая диафрагмы идентичны. При этом области Π_1 и Π_2 и соответственно Λ_1 и Λ_2 совпадают. Тогда складывая (или вычитая) каждое из уравнений (12) с соответствующим уравнением (14) и учитывая (15), (16), (17), получим вместо (12), (14) две более простые независимые системы. Запись этих систем объединяется с помощью знака \pm :

$$\begin{aligned}
 \sum_n \{ (a_n \mp b_n) - (d_n \mp c_n) (1 + L_{nl}^H \mp T_{nl}^H) \} e^{ig_n x} + A(e^{ig_p x} + e^{-ig_p x}) &= 0; \quad \text{Ш} \\
 \sum_n (a_n \mp b_n) \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} e^{ig_n x} = A \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} (e^{ig_p x} + e^{-ig_p x}); \quad \text{Л} \\
 \sum_n (C_n \pm D_n) (1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E) e^{ig_n x} &= 0; \quad \text{Л} \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_n \left\{ (A_n \pm B_n) + (a_n \mp b_n) \frac{g_n h}{k_1 \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)}} + \tilde{\varepsilon} \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} (C_n \pm D_n) (1 - L_{nl}^E \mp T_{nl}^E) - \right. \\
 \left. - \frac{g_n h}{k_1 \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)}} \frac{k_1^2 - h^2}{k_2^2 - h^2} (c_n \mp d_n) (1 + L_{nl}^H \mp T_{nl}^H) \right\} \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} e^{ig_n x} = \\
 = \left(B \tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} + \frac{g_n h}{k_1} A \right) (e^{ig_p x} - e^{-ig_p x}), \quad \text{Ш}
 \end{aligned}$$

При верхнем знаке уравнения (19) вместе с (18) определяют сумму A_n и B_n , D_n и C_n , a_n и $-b_n$, d_n и $-c_n$, при нижнем знаке (19) — разности этих же коэффициентов.

Подробно на решении (19) мы останавливаться не будем, поскольку оба варианта системы (18), (19) сходны с ранее исследованными системами функциональных уравнений [1], [2].

Заметим только, что если ввести обозначения:

$$\begin{aligned}
 \xi_{n1}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2}{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2} \frac{1 + L_{nl}^H \pm T_{nl}^H}{1 - L_{nl}^H \pm T_{nl}^H} \right\}; \\
 \xi_{n2}^{\pm} &= \frac{1}{2 \tilde{\mu} k_1} \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - k_1^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} \frac{1 + L_{nl}^H \pm T_{nl}^H}{1 - L_{nl}^H \pm T_{nl}^H}; \\
 \xi_{n3}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tilde{\varepsilon} \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^{(2)} k_1^2 - h^2}{\tilde{\gamma}_{nl}^{(1)} k_2^2 - h^2} \frac{1 - L_{nl}^E \mp T_{nl}^E}{1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E} \right\}; \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{n4}^{\pm} &= \zeta_{n3}^{\pm} + \left(\frac{g_n}{g_{nl}^{(1)}} \right)^2 \zeta_{n2}^{\pm} \frac{\Omega}{\varepsilon_{n1}^{\pm}}; \\ \zeta_{n5}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{nl}^{(1)}}{\gamma_{nl}^{(2)}} \frac{1 + L_{nl}^H \pm T_{nl}^H}{1 - L_{nl}^H \pm T_{nl}^H} \right\}; \\ \Omega &= \frac{h}{2k_1} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 - h^2}; \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu} \frac{k_2^2 - h^2}{k_1^2 - h^2} \right); \\ \Omega_2 &= \frac{h}{2\mu k_1} \frac{k_2^2 - h^2}{k_1^2 - h^2}; \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon \frac{k_2^2 - h^2}{k_1^2 - h^2} \right); \\ \Omega_4 \Omega_1 &= \Omega_3 \Omega_1 - \Omega \Omega_2 = \xi = \frac{1}{4} (1 + \tilde{\varepsilon}) (1 + 1/\tilde{\mu}); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{nH}^{\pm} &= |n| + i \frac{x}{k_1} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{\Omega_1}{\zeta_{n5}^{\pm}}; \quad \zeta_{nE} = |n| + i \frac{x}{k_1} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{\zeta_{n5}^{\pm}}{\Omega_4}; \\ x &= \frac{2a}{\lambda} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1 \mu_1}; \quad \zeta_n^{\pm} = -i \frac{\Omega}{\Omega_4} \left(\frac{1}{\zeta_{n1}^{\pm}} - \frac{1}{\Omega_1} \right) n; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi} \zeta_n^{\pm} &= -i \Omega_1 \left(\frac{\zeta_{n5}^{\pm}}{\zeta_{n1}^{\pm}} - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) n = -i \frac{n}{\xi} \Omega \Omega_1 \frac{1 - \zeta_{n5}^{\pm}}{\zeta_{n1}^{\pm}}; \\ x_n^{\pm} &= (C_n \pm D_n) (1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} y_n^{\pm} &= (a_n \mp b_n) \zeta_{n1}^{\pm} - \frac{g_n}{\gamma_{nl}^{(1)}} \zeta_{n2}^{\pm} (C_n \pm D_n) (1 + L_{nl}^E \pm T_{nl}^E) + \\ &+ A (1 - \zeta_{\rho 1}^{\pm}) (\delta_{n-p} + \delta_{n+p}); \end{aligned}$$

то из (19) после преобразований получим уравнения:

$$\begin{cases} \sum_n y_n^{\pm} e^{i g_n x} = 0; & x \in \text{Ш} \\ \sum_n y_n^{\pm} |n| e^{i g_n x} = J_H^{\pm}; & x \in \text{Л} \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \sum_n x_n^{\pm} e^{i g_n x} = 0; & x \in \text{Л} \\ \sum_n x_n^{\pm} |n| e^{i g_n x} = J_E^{\pm}; & x \in \text{Ш} \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} J_H^{\pm} &= -i \frac{x}{k_1} \gamma_{nl}^{(1)} \frac{\Omega_1}{\zeta_{n5}^{\pm}} A (e^{i g_p x} + e^{-i g_p x}) + \\ &+ \sum_n (y_n^{\pm} \zeta_{nH}^{\pm} - \frac{1}{\xi} x_n^{\pm} \zeta_n^{\pm}) e^{i g_n x}; \\ J_E^{\pm} &= -i \frac{\Omega_1}{\xi} \left(\frac{x}{k_1} \gamma_{nl}^{(1)} B + p \frac{\Omega}{\zeta_{n5}^{\pm}} A \right) (e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}) + \\ &+ \sum_n (y_n^{\pm} \zeta_n^{\pm} + x_n^{\pm} \zeta_{nE}^{\pm}) e^{i g_n x}, \end{aligned} \quad (26)$$

которые решаются точно так же, как и уравнения (23), (24) [1].

В результате для сумм и разностей искоемых коэффициентов находим две замкнутые системы линейных алгебраических уравнений (запись этих систем объединяется знаком \pm):

$$my_m^\pm = (\rho - \zeta_{pH}^{\pm}) A (\bar{V}_m^\rho + \bar{V}_m^{-\rho}) + \sum_{n=0}^{\infty} (y_n^\pm \zeta_{nH}^{\pm} + x_n^\pm \zeta_{n\pm}^{\pm}) \times \\ \times (V_m^n + \delta_n \bar{V}_m^{-n}) + \sum_{k=1}^l \lambda_k^\pm \bar{R}_{m-k+1}; \quad m \geq 0 \quad (27)$$

$$mx_m^\pm = -i \frac{\Omega}{\zeta} \left(\gamma_{\mu}^{(1)} B + \rho \frac{\Omega}{\zeta_{\pm}} A \right) (V_m^\rho - V_m^{-\rho}) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y_n^\pm \zeta_n^{\pm} + x_n^\pm \zeta_{n\pm}^{\pm}) (V_m^n - V_m^{-n}) + \sum_{k=1}^l \lambda_k^\pm R_{m-k+1}; \quad m > 0. \quad (28)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^\pm e^{i n \tau k} = 0; \quad k = 1, \dots, t \quad (27')$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^\pm e^{i n \tau k} = 0; \quad k = 1, \dots, t \quad (28')$$

аналогичных системе (27), (28) [1].

Полученные системы квазирегулярны и могут быть разрешены методом редукции. Как и в [1], от индекса p в них зависят только свободные члены.

3. Рассмотрим случаи, когда данное решение распадается на два независимых решения для волн различных поляризацій.

а) Первый случай, когда комплексные показатели преломления первой и второй области ($(M+2)$ -й и $(M+1)$ -й) равны ($\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\mu}_2 = \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\mu}_1$).

Тогда вместо (20)–(23) имеем:

$$\xi_{n1}^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\mu} \frac{1 + L_{n1}^H \mp T_{n1}^H}{1 - L_{n1}^H \pm T_{n1}^H} \right\}; \\ \xi_{n3}^{\pm} = \xi_{n4}^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1 - L_{n1}^E \mp T_{n1}^E}{1 + L_{n1}^E \pm T_{n1}^E} \right\}; \\ \Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_4 = \frac{1 + \varepsilon}{2} = \frac{1 + 1/\mu}{2}; \quad (29) \\ \Omega = \Omega_2 = \xi_{n3}^{\pm} = 0; \quad \zeta_n^{\pm} = 0; \\ y_n^\pm = (a_n \mp b_n) + A(1 - \xi_{n1}^{\pm}) (\delta_{n-p} + \delta_{n+p}),$$

а каждый из вариантов (27), (28) распадается на две независимые системы.

При этом, как и в [1], зависимость решения от $x^i = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{b} l\right)^2}$ тождественна при различных l .

б) В случае $l=0$ также наблюдается поляризационное разделение:

$$\xi_{n1}^{0\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\gamma}_{n0}^{(1)}}{\tilde{\gamma}_{n0}^{(2)}} \frac{1 + L_{n0}^H \mp T_{n0}^H}{1 - L_{n0}^H \pm T_{n0}^H} \right\}; \\ \xi_{n4}^{0\pm} = \xi_{n3}^{0\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\mu} \frac{\tilde{\gamma}_{n0}^{(2)}}{\tilde{\gamma}_{n0}^{(1)}} \frac{1 - L_{n0}^E \mp T_{n0}^E}{1 + L_{n0}^E \pm T_{n0}^E} \right\}; \\ \Omega_1 = \frac{1 + \tilde{\varepsilon}}{2}; \quad \Omega_3 = \Omega_4 = \frac{1 + 1/\tilde{\mu}}{2} \neq \Omega_1; \quad (30)$$

$$\Omega = \Omega_2 = \zeta_{n2}^{0\pm} = 0; \quad \zeta_n^{0\pm} = 0;$$

$$y_n^\pm = (a_n \mp b_n) \zeta_{n1}^{0\pm} + A(1 - \zeta_{n1}^{0\pm})(\delta_{n-p} + \delta_{n+p}),$$

и вместо (27), (28) имеем:

$$my_m^\pm = -i \frac{x}{k_1} \gamma_{p0}^{(1)} \frac{1+\bar{\epsilon}}{2} A (\bar{V}_m^p + \bar{V}_m^{-p}) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n) \zeta_{n1}^{0\pm} \zeta_{nH}^{0\pm} (\bar{V}_m^n + \delta_n \bar{V}_m^{-n}) + \sum_{k=1}^l \lambda_k^\pm R_{m-k+1} \quad m \geq 0 \quad (31)$$

и

$$mx_m^\pm = -i \frac{x}{k_1} \gamma_{p0}^{(1)} \frac{2}{1+1/\mu} (V_m^p - V_m^{-p}) B +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\pm \zeta_{nE}^{0\pm} (V_m^n - V_m^{-n}) + \sum_{k=1}^l \lambda_k^\pm R_{m-k+1} \quad m > 0. \quad (32)$$

Решения, полученные из этих систем, не зависят от величины b (размер стенки волновода, параллельной щелям диафрагм).

Система (32), (28') определяет решение для волны E_{n0}^y .

Что касается волн H_{n0}^y , то они не удовлетворяют граничным условиям на идеально проводящих стенках волновода. При $l=0$ H^y , согласно (1), автоматически обращается в нуль при ненулевом решении (31), (27'). Смысл решения уравнений (31), (27') будет выяснен ниже.

4. Результаты данной работы справедливы при любых параметрах препятствия и при любых поперечных размерах волновода, в том числе и для случая $b = \infty$, когда волновод бесконечно широк в направлении y .

В этом случае при конечном (даже не равном нулю) l постоянная распространения $h_l = \frac{\pi}{b} l$ обращается в нуль, а уравнения (27), (28) переходят в (31), (32). (Можно осуществить и предельный переход к случаю $b, l \rightarrow \infty$, h_l — конечно; когда зависимость полей от y сохраняется. Мы ограничимся случаем $\frac{\partial}{\partial y} = 0$).

При $b = \infty$ удовлетворять граничным условиям на стенках волновода, находящимся на бесконечности, не обязательно. Последние можно вообще удалить, не нарушая при этом распределения полей. Тогда в системе может распространяться H^y -поляризованная волна, не имеющая зависимости от y . Выражения для полей этой волны получим при $B=0$ из (1), если заменим там $(e^{ih_l y} - e^{-ih_l y})$ на $(e^{ih_l y} + e^{-ih_l y})$ и после этого устремим l к нулю (или b к бесконечности). Амплитуды спектров в этом случае находим из решения уравнений (31), (27'). (Аналогичный смысл имеет и решение уравнений (27'), (30), (32) работы [1]).

Обращаем также внимание на то, что при $p=0$ уравнения (31), (27) дают решение и для случая нормального падения плоской H -поляризованной волны на двойную равнощелевую [3] многоэлементную [4] ленточную решетку с многослойным магнитодieleктриком.

5. Численные расчеты рассмотренных дифракционных задач произведены (для $p=1, 2, 3$) на ЭВМ. Точность вычислений контролировалась проверкой выполнения закона сохранения энергии.

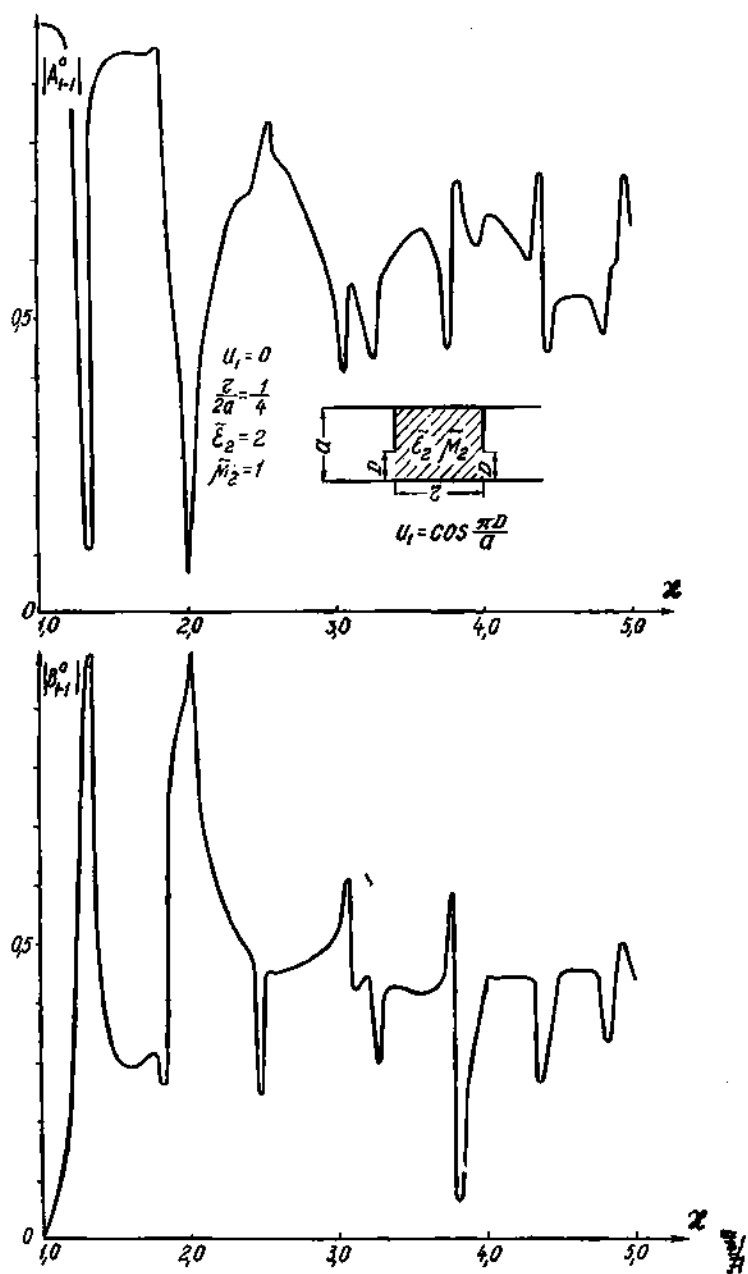


Рис. 2. Двойная однощелевая асимметричная система с одним слоем среды. Зависимость модулей коэффициентов отражения и прохождения волны $E_{1,0}^0$ от x .

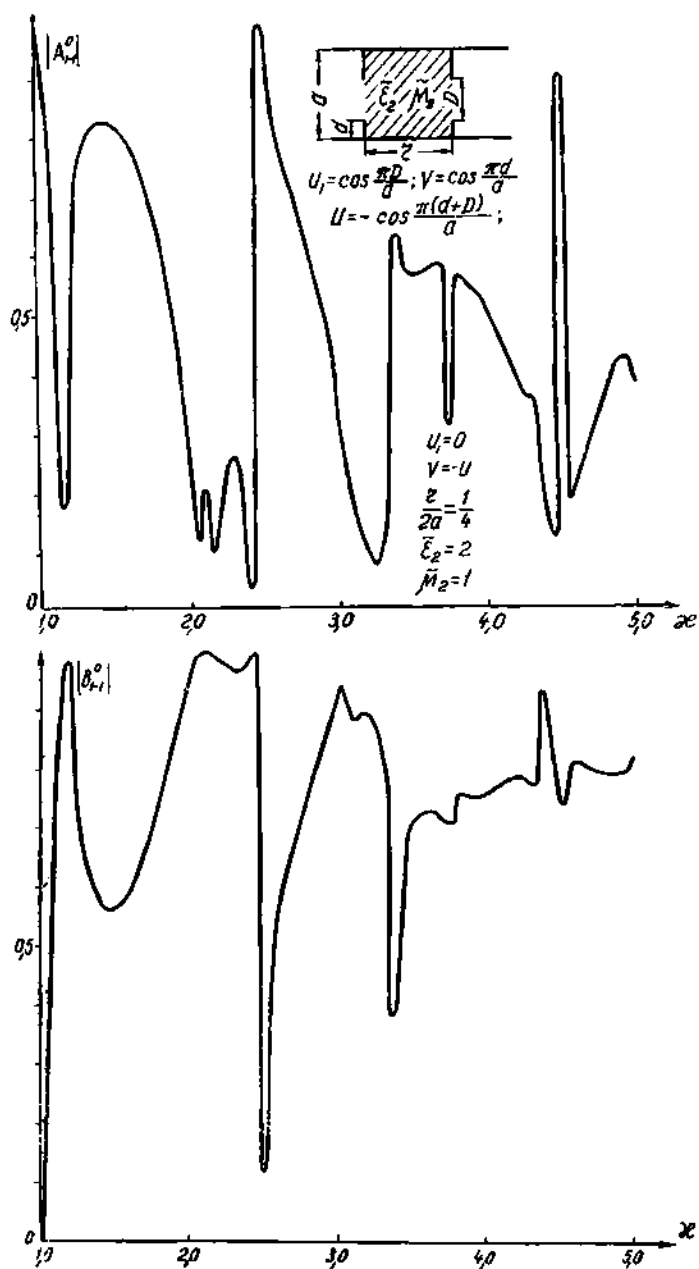


Рис. 3. Зависимость $|A_{1-1}^0|$ и $|B_{1-1}^0|$ от x для двойной однощелевой симметричной системы с одним слоем среды

Как и в случае обычной двойной диафрагмы [5], здесь также наблюдаются резонансные явления.

Сравнение с численными результатами [5] показывает, что наличие в системе слоев оптически плотной непоглощающей среды увеличивает осцилляцию кривых зависимости амплитуд от x (рисунки 2, 3). Это происходит по двум причинам. Во-первых, в более плотной среде увели-

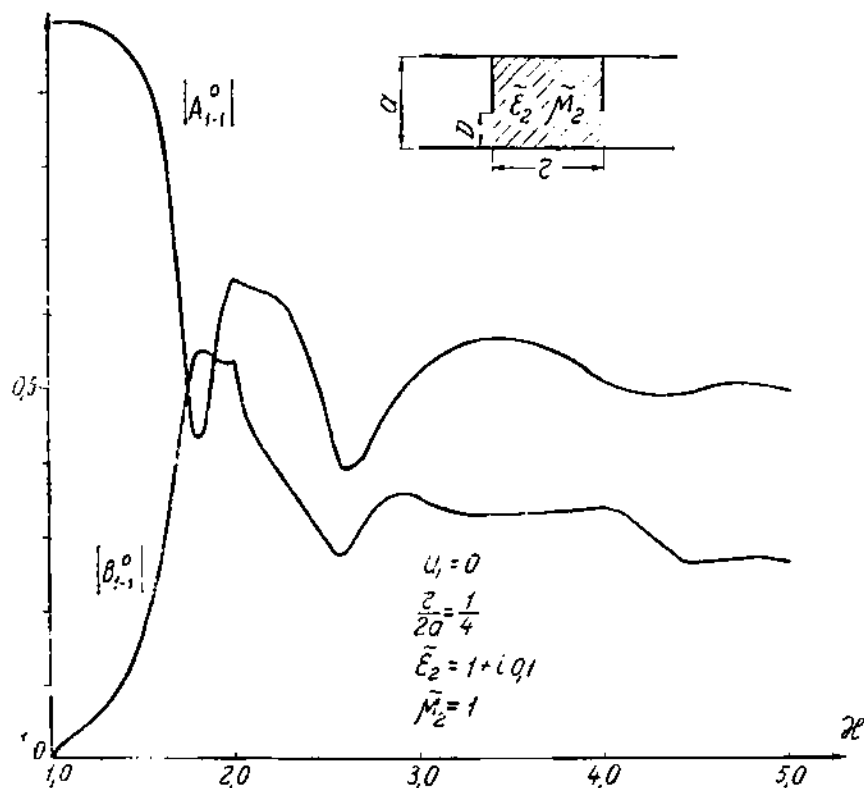


Рис. 4. Зависимость $|A_{l-1}^o|$ и $|B_{l-1}^o|$ от x в случае потерь в среде.

чивается разность хода волн. Во-вторых, в заполненном плотной средой отрезке волновода незатухающие высшие волны возникают при меньших значениях x . Обе причины ведут к увеличению количества резонансов на интервал x .

Так, на рис. 2 при $x = 1,3$ видим выбросы, обусловленные резонансом на $E_{1,0}^y$ -волне. При отсутствии среды этот резонанс возник бы только при $x = 1,8$.

На рис. 3 при $x = 2,5$ наблюдается провал, обусловленный преобразованием падающей $E_{1,0}^y$ -волны в резонансную $E_{3,0}^y$ -волну. А при отсутствии среды $E_{3,0}^y$ -волна могла бы распространяться (а следовательно, и резонировать) только при $x > 3$.

Если имеются потери в средах, осцилляция кривых сглаживается (рис. 4).

Влияние суммарной ширины щелей диафрагм на форму кривых и, в частности, на положение и ширину резонансных выбросов такое же, как и при отсутствии заполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Щербак. Изв. вузов СССР, «Радиотехника», вып. 2 (статья в данном номере), 1966.
 2. А. И. Адонина, В. В. Щербак. ЖТФ, XXXIV, в. 1, 1964.
 3. О. А. Третьяков. Автореф. канд. дисс., МВССО УССР, ХГУ им. Горького, Харьков, 1963.
 4. Г. Н. Гестрли, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковск. матем. об-ва», 30, 4, 1964.
 5. В. В. Щербак. Сб. «Радиотехника», в. 1, Изд-во ХГУ, 1965.
-

ПАРАМЕТРЫ НЕРЕЗОНАНСНЫХ ЩЕЛЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Ю. В. Шубарин, Л. П. Яцук

ВВЕДЕНИЕ

При создании линейных многощелевых антенн заданное амплитудно-фазовое распределение вдоль линейки передко формируют путем вариации длины щелей. Для расчета такой антенны прежде всего необходимо знать параметры одиночных щелей: коэффициенты излучения, отражения и передачи. Эти параметры подробно изучены для резонансных щелей. Расчет же их для случая произвольно расположенной нерезонансной щели в известной нам открытой литературе отсутствует.

Настоящее сообщение посвящено нахождению параметров узкой прямоугольной нерезонансной щели, произвольно расположенной на широкой стенке прямоугольного волновода, возбуждаемого волной H_{10} .

Возбуждение волновода нерезонансной щелью

Рассмотрим полубесконечный прямоугольный волновод, в широкой стенке которого под углом θ к продольной оси прорезана узкая щель длиной $2l$ и шириной d . Пусть размеры поперечного сечения волновода таковы, что в нем может распространяться только волна типа H_{10} . Падающая на щель волна возбуждает ее, в результате чего между краями щели возникает напряжение U . Введем в рассмотрение плотность магнитного тока вдоль щели и будем считать его источником возбуждаемых щелью вторичных волн, которые распространяются в сторону положительных и отрицательных значений оси z (рис. 1).

Комплексные амплитуды этих волн можно записать в выбранной системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{1y} &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{A} \\ \dot{B} \end{array} \right\} \cos \frac{\pi x}{a} e^{\pm i\gamma z}; \\ H_{1x} &= \frac{\pm E_{1y}}{W_{10}}; \\ H_{1z} &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{A} \\ \dot{B} \end{array} \right\} \frac{1}{iW_{10}} \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda_{кр}} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{\pm i\gamma z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \dot{A} и \dot{B} — комплексные амплитуды электрического поля волны, возбуждаемых слева и справа от щели на оси волновода в сечении центра щели; знак « \rightarrow » соответствует волне, распространяющейся в сторону $z > 0$, знак « \leftarrow » — в сторону $z < 0$.

Амплитуды \dot{A} и \dot{B} можно найти методом вспомогательных источников, основанным на лемме Лоренца [1]:

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \vec{H}_2) - (\vec{E}_2 \vec{H}_1) = (j_1^e \vec{E}_2 - j_2^e \vec{E}_1) - (j_1^m \vec{H}_2 - j_2^m \vec{H}_1), \quad (2)$$

где \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 — не зависящие друг от друга поля одной и той же частоты;

j_1^e, j_1^m и j_2^e, j_2^m — векторы плотности электрических и магнитных токов, возбуждающих эти поля.

Считаем, что источником искомого поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 является \vec{j}_1^m , а все

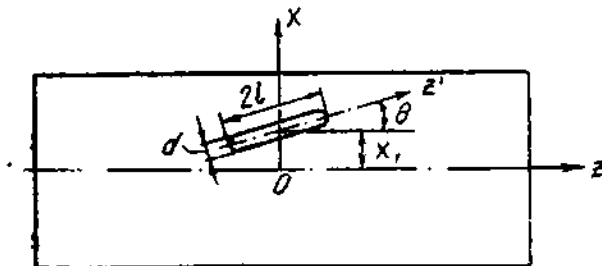


Рис. 1.

прочие источники равны нулю. В качестве вспомогательного поля \vec{E}_2, \vec{H}_2 выбираем поле волны H_{10} единичной амплитуды. Интегрируя лемму Лоренца по замкнутому объему, ограниченному боковыми стенками волновода со щелью и двумя поперечными сечениями по разные стороны от нее, находим амплитуды волн, возбуждаемых щелью слева и справа:

$$\dot{A} = \frac{W_{10}}{S_A} \int_{S_{\text{ли}}} j_1^m H_2^+ dS = \frac{W_{10} j_n^m}{S_A} \int_{S_{\text{ли}}} j(z') H_{2z}^+ dS; \quad (3)$$

$$\dot{B} = \frac{W_{10}}{S_A} \int_{S_{\text{ли}}} j_1^m H_2^- dS = \frac{W_{10} j_n^m}{S_A} \int_{S_{\text{ли}}} f(z') H_{2z}^- dS, \quad (4)$$

где индексы «+» и «-» соответствуют распространению вспомогательной волны в сторону $z > 0$ и $z < 0$;

z' — координата, отсчитываемая вдоль щели от центрального сечения;

$f(z') = j^m / j_n^m$ — распределение магнитного тока вдоль щели;

j_n^m — значение магнитного тока в пучности;

W_{10} — волновое сопротивление волновода;

S_A — площадь поперечного сечения волновода.

Интегрирование ведется по площади щели. Ограничимся рассмотрением щелей длиной $2l \leq \frac{\lambda}{2}$. Поскольку магнитный ток обращается в нуль на краях щели, а в некотором среднем сечении имеет максимум, распределение вдоль него можно аппроксимировать синусоидой

$$f(z') \approx \cos \frac{\pi z'}{2l}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и (4), получим в результате интегрирования амплитуды волн \dot{A} и \dot{B} в таком виде:

$$\dot{A} = -\frac{j_n^m}{S_d} (\alpha + i\beta) = \frac{j_n^m}{S_d} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{i(\kappa + \varphi)}; \quad (6a)$$

$$\dot{B} = \frac{j_n^m}{S_d} (\alpha - i\beta) = \frac{j_n^m}{S_d} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{-i\varphi}, \quad (6b)$$

где

$$\alpha = \frac{2ld}{\pi} \left\{ |F(l\xi) + F(l\eta)| \sin \theta + |F(l\xi) - F(l\eta)| \frac{\lambda_g}{\lambda_{кр}} \cos \theta \right\} \cos \frac{\pi x_1}{a}; \quad (7)$$

$$\beta = \frac{2ld}{\pi} \left\{ |F(l\xi) - F(l\eta)| \sin \theta + |F(l\xi) + F(l\eta)| \frac{\lambda_g}{\lambda_{кр}} \cos \theta \right\} \sin \frac{\pi x_1}{a};$$

$$F(l\xi) = \frac{\cos l\xi}{1 - \left(\frac{2}{\pi} l\xi\right)^2}; \quad (8)$$

$$F(l\eta) = \frac{\cos l\eta}{1 - \left(\frac{2}{\pi} l\eta\right)^2};$$

$$\xi = \frac{\pi}{a} \sin \theta - \gamma \cos \theta; \quad (9)$$

$$\eta = -\frac{\pi}{a} \sin \theta - \gamma \cos \theta;$$

a — размер широкой стенки волновода;
 γ — постоянная распространения волны H_{10} в волноводе;
 x_1 — смещение щели от оси широкой стенки;
 $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Для нахождения коэффициентов отражения и передачи щели необходимо знать отношения комплексных амплитуд, возбужденных щелью волн \dot{A} и \dot{B} , к амплитуде падающей волны E_0 . Для этого в выражениях (6) надо определить абсолютное значение плотности магнитного тока и его фазу по отношению к возбуждающему полю E_0 . Модуль плотности магнитного тока $|j_n^m|$ можно получить из уравнения баланса мощности, если известен $\operatorname{arg} j_n^m$. Поэтому прежде всего найдем $\operatorname{arg} j_n^m$.

Сдвиг фазы между магнитным током в центре щели и полем, возбуждающим щель

С использованием теоремы взаимности можно показать [2], что при возбуждении вибратора полем падающей волны электродвижущая сила, наводимая этим полем на клеммах вибратора, выражается формулой

$$\dot{E}^m = \int_L E_z(\zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad (10)$$

где L — длина вибратора;

ζ — координата, отсчитываемая вдоль оси вибратора;

E_z — проекция на ось вибратора электрического вектора падающего поля;

$f(z)$ — амплитудно-фазовое распределение электрического тока вдоль вибратора в режиме передачи, отнесенное к клеммному сечению.

Проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при выводе (10), находим, что магнитодвижущая сила \dot{E}^m , наводимая в некотором сечении z' щели магнитным полем падающей волны, определяется выражением

$$\dot{E}^m = \int_{-l}^l H_z(z') f(z') dz', \quad (11)$$

где H_z — проекция на ось щели магнитного вектора возбуждающего поля; $f(z')$ — амплитудно-фазовое распределение магнитного тока, отнесенное к рассматриваемому сечению.

Магнитный ток I^m свяжем с магнитодвижущей силой обычным соотношением

$$I^m = \frac{\dot{E}^m}{Z^m}, \quad (12)$$

где Z^m — магнитное сопротивление.

Таким образом, в случае узкой щели

$$\arg I_n^m = \arg \dot{E}^m - \arg Z^m.$$

В соответствии с принципом двойственности сдвиг фазы между магнитным током и магнитодвижущей силой в центральном сечении щели равен сдвигу фазы между электродвижущей силой и электрическим током на клеммах симметричного вибратора, одинаковой со щелью электрической длины. Этот сдвиг фазы определяется аргументом входного сопротивления вибратора ($\arg Z^a = \psi$), и его нетрудно рассчитать по имеющимся в литературе формулам [2]. Следовательно,

$$\arg Z^m = \arg Z^a = \psi \quad (13)$$

$$\arg I_n^m = \arg \dot{E}^m - \psi.$$

Полагая, что щель возбуждается полем волны H_{10} , распространяющейся в сторону положительных z , а распределение $f(z')$ подчиняется закону, определенному формулой (5), имеем:

$$\arg \dot{E}^m = \arg \left[\int_{-l}^l f(z^1) H_{z^1}^+(z^1) dz^1 \right]. \quad (14)$$

В случае узкой щели, когда интегрирование по площади щели заменяется интегрированием по ее длине, интеграл в (14) с точностью до вещественного постоянного множителя совпадает с интегралом в выражении (4а). Как видно из (6а), аргумент этого интеграла

$$\arg \dot{E}^m = \pi + \varphi. \quad (15)$$

Таким образом, из (13) с учетом (15) следует, что фаза магнитного тока в центре щели сдвинута по отношению к возбуждающему полю на угол

$$\arg I_n^m = (\pi + \varphi) - \psi. \quad (16)$$

Параметры нерезонансной щели

Для вычисления параметров нерезонансной щели необходимо знать абсолютное значение магнитного тока $|j_n^M|$ в центре щели. Найдем его, составляя баланс мощности:

$$P_{\text{пад}} = P_{\text{отр}} + P_{\text{изл}} + P_{\text{прох}}, \quad (17)$$

где $P_{\text{пад}}$, $P_{\text{отр}}$, $P_{\text{изл}}$, $P_{\text{прох}}$ — соответственно мощности падающей, отраженной, излученной во внешнее пространство и проходящей дальше по волноводу волн.

Учитывая, что $|j_n^M| = \frac{|\dot{U}_n|}{d}$, где \dot{U}_n — амплитуда напряжения на щели влучности тока, получим из уравнения (17):

$$|\dot{U}_n| = \frac{E_0}{W_{10} d G_2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \psi}{1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{G_2 W_{10} d^2 S_d}}, \quad (18)$$

где G_2 — проводимость излучения щели.

В случае резонансной щели входное сопротивление соответствующего щели вибратора становится чисто активным ($\psi = 0$, $\cos \psi = 1$). В результате формула (18) принимает вид

$$\dot{U}_n|_{\text{рез}} = \frac{E_0}{d W_{10} G_2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{G_2 W_{10} d^2 S_d}}. \quad (19)$$

Выражение (19) при соответствующей замене обозначений совпадает с результатом, полученным для резонансной щели И. Е. Вешниковой и Г. А. Евстроповым [3].

Найдем теперь с учетом (6а,б), (16) и (18) коэффициенты матрицы рассеивания четырехполюсника, эквивалентного щели: коэффициенты отражения слева S_{11} и справа S_{22} , а также коэффициент передачи S_{12} :

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\dot{A}}{E_0} = \frac{\rho \cos \psi}{1 + \rho} e^{i(2\tau - \psi)}, \quad (20)$$

где

$$\rho = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2 S_d W_{10} G_2}; \quad (21)$$

$$S_{12} = \frac{\dot{E}_0 + \dot{B}}{E_0} = \sqrt{1 - 2|S_{11}| \cos \psi + |S_{11}|^2} e^{i\Delta}, \quad (22)$$

где

$$\Delta = \arctg \frac{|S_{11}| \sin \psi}{1 - |S_{11}| \cos \psi}. \quad (23)$$

Коэффициент излучения по мощности

$$|S_2|^2 = \frac{P_{\text{изл}}}{P_{\text{пад}}} = \frac{|\dot{U}_n|^2 G_2}{P_{\text{пад}}} = \frac{2\rho \cos^2 \psi}{(1 + \rho)^2}. \quad (24)$$

В частных случаях продольной и поперечной щелей в волноводе структура формул (20), (22) и (24) не меняется. При этом значительно упрощается выражение (21) для ρ .

Так, если рассматривается продольная щель ($\theta = 0$), то

$$\begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \rho &= \frac{\beta^2}{d^2 S_d W_{10} G_z}; \\ \beta &= \frac{4ld}{\pi} F(\gamma l) \frac{\lambda_d}{\lambda_{кр}} \sin \frac{\pi x_1}{a}; \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае поперечной щели, прорезанной симметрично относительно продольной оси волновода ($\theta = 90^\circ$; $x_1 = 0$), оказывается, что

$$\begin{aligned} \beta &= 0; \\ \rho &= \frac{\alpha^2}{d^2 S_R W_{10} G_z}; \\ \alpha &= \frac{4ld}{\pi} F\left(\frac{\pi l}{a}\right); \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнение расчетных и экспериментальных данных

По формулам (20)—(24) рассчитаны в зависимости от длины щели коэффициенты отражения и излучения для двух случаев: продольной

(рис. 2) и поперечной (рис. 3) щелей, прорезанных в широкой стенке прямоугольного волновода. Сечение волновода 23×10 мм², длина волны $\lambda = 32$ мм. Центр продольной щели смещен относительно продольной оси широкой стенки на расстояние $x_1 = 9$ мм, поперечная щель прорезана симметрично ($x_1 = 0$). Аргумент сопротивления эквивалентного щели вибратора рассчитан в приближении длинной линии.

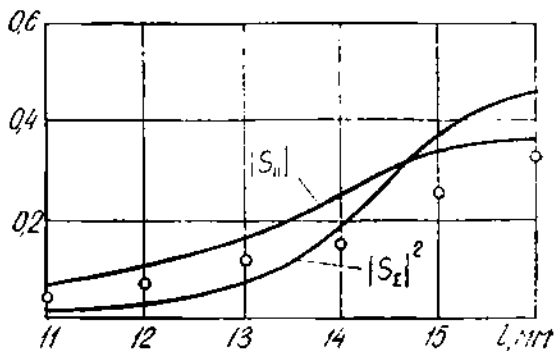


Рис. 2.

Коэффициенты излучения и отражения растут с увеличением длины щели, достигая максимума при длине щели, равной половине длины волны. На характер кривых сильное влияние оказывает косинус аргумента входного сопротивления эквивалентного щели вибратора. Эффект укорочения волны в использованном приближении не учитывался. Однако его можно учесть, если рассчитывать аргумент входного сопротивления эквивалентного вибратора по более точным формулам.

Расчетная зависимость от длины щели сдвига фазы прошедшей волны Δ (рис. 4) имеет максимум при длине щели, отличающейся от резонансной приблизительно на 10% (1 — продольная щель, 2 — поперечная щель).

Экспериментально измерены коэффициенты отражения продольных и поперечных щелей на указанной выше частоте. С помощью измерительной линии определяли коэффициент стоячей волны, по величине которого рассчитывали модуль коэффициента отражения. Измерения прово-

дидлись на отдельных волноводных секциях с прорезанными в них щелями различной длины ($2l = 11,0; 12,0; 13,0; 14,0; 15,0; 16,0$ мм). В случае поперечной щели (рис. 3 — кружки) экспериментальные точки коэффициента отражения достаточно хорошо ложатся на расчетную кривую. В случае продольной щели (рис. 2 — кружки) расчет и эксперимент совпадают хуже. Это, по-видимому, объясняется не учтенным в расчете влиянием стенки волновода, вблизи которой прорезана щель.

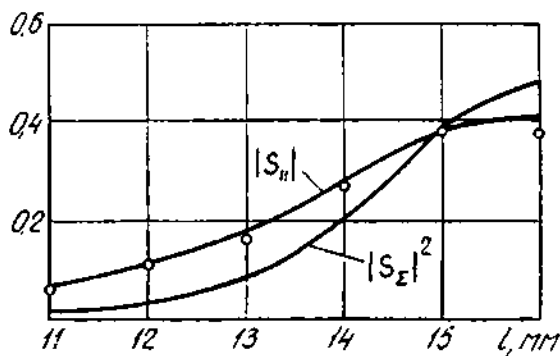


Рис. 3.

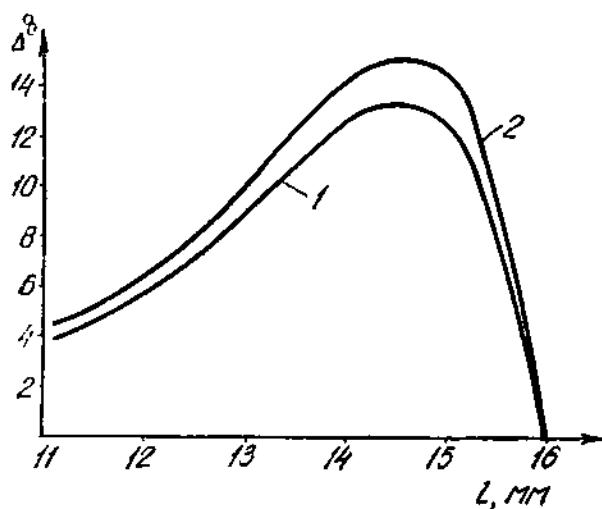


Рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе теоремы взаимности и принципа двойственности выведены простые приближенные формулы для расчета коэффициентов излучения, отражения и передачи нерезонансных щелей, произвольно расположенных на широкой стенке прямоугольного волновода.

Экспериментальные результаты показали хорошее совпадение для S_{11} с расчетом для поперечной щели и худшее — для продольной.

Полученные результаты можно использовать для расчета эквивалентной схемы более сложной, в частности крестообразной,

щели на широкой стенке волновода. Имевшиеся ранее в литературе данные [5] такой возможности не давали.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Фрадн. Антенны сверхвысоких частот, М., изд-во «Сов. радио», 1957.
2. Г. З. Айзенберг. Коротковолновые антенны, М. Связьиздат, 1962.
3. И. Е. Вешнякова, Г. А. Евстипов «Вопросы радиоэлектроники», сер. XII, общетехническая, вып. 13, 1960, стр. 43—56.
4. A. A. Oliner. IRE Trans on Ant. and Prop., v. AP-5, № 1, January, 1957, pp. 4—20.

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОБЛУЧАТЕЛЕЙ

Ю. В. Шубарин, Н. Н. Горобец

ВВЕДЕНИЕ

Поляризационная структура поля облучателя имеет существенное значение при разработке зеркальных и линзовых антенн. У линейно-поляризованных антенн важно знать величину поля поперечной поляризации. Если в таких антеннах применяется поворот плоскости поляризации [1], то поляризационная структура влияет на конструкцию обеспечивающих этот поворот устройств, а также поляризационных фильтров в раскрыве многозеркальных антенн [2]. В антеннах с вращающейся поляризацией, у которых поле первичных облучателей линейно-поляризованное, учет поляризационной структуры поля облучателя влияет на конструкцию устройств, создающих вращающееся поле.

В настоящей статье продолжены начатые нами ранее [3] исследования поляризационной структуры поля излучения круглого волновода и конического рупора, а также исследована поляризационная структура поля излучения конического диэлектрического стержня, прямоугольного волновода и пирамидального рупора. Рассмотрено влияние поляризационной структуры поля облучателя на эффективность решетчатого зеркала в двухзеркальной антенне с поворотом плоскости поляризации.

Поляризационная структура поля излучения круглого волновода и конического рупора

Дифференциальное уравнение проекции на полусферу силовой линии электрического вектора поля излучения антенны имеет вид [3]

$$\frac{\partial d\varphi}{\partial \theta} = \frac{E_{\varphi}}{E_{\theta}}, \quad (1)$$

где θ, φ — угловые координаты точки наблюдения (рис. 1);

E_{φ}, E_{θ} — амплитуды ортогональных компонент электрического вектора поля в дальней зоне антенны.

При выводе этого уравнения сфера с центром в точке расположения антенны трансформирована на плоскость. Каждому направлению наблюдения, определяемому углами θ и φ , соответствует точка плоскости в полярной системе координат, вдоль радиуса которой откладывают угол θ , а угол φ отсчитывают от оси x , соответствующей плоскости $\varphi = 0$.

В ряде случаев вместо угла θ удобно использовать обобщенную угловую координату η , вводимую соотношением

$$\eta = ka \sin \theta,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число;

a — радиус раскрыва антенны.

Тогда вдоль радиуса полярной системы координат откладывают η , а дифференциальное уравнение проекции силовой линии вектора \vec{E} имеет вид

$$\frac{\eta d\varphi}{dr} = \frac{E_z}{E_\theta}. \quad (2)$$

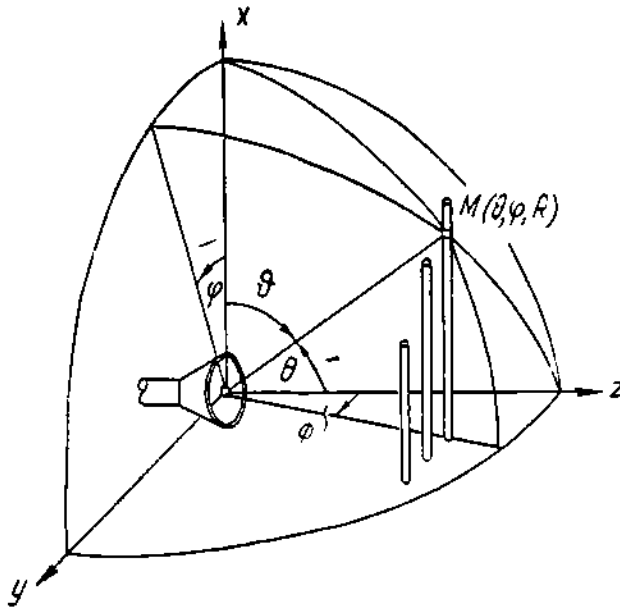


Рис. 1. Система координат, принятая при изучении поляризационной структуры поля.

Методика и результаты численного интегрирования уравнения (1) при излучении из круглого волновода и конического рупора приведены в [3]. Выражения для E_z и E_θ , использованные в [3], получены приближенным методом векторизованного интеграла Кирхгофа. Чтобы оценить возникающую неточность определения поляризационной структуры, в настоящей статье для сравнения использованы данные точного и приближенного решений, полученных Л. А. Вайнштейном [4] для случая излучения из открытого конца круглого волновода, возбуждаемого волной H_{11} , при $ka = 2$. Рассчитана поляризационная структура поля в обоих случаях. Поскольку приближенный метод справедлив только при рассмотрении излучения «вперед», расчет произведен для углов $\theta < 90^\circ$. Поляризационная структура (рис. 2), по данным строгого решения (штриховые линии), весьма незначительно отличается от структуры поля, полученной по

данным приближенного метода (сплошные линии). Например, максимальное отклонение (для линий с $\theta_0 = 70^\circ$ и углов $\theta = 90^\circ$) составляет всего 2° .

Чтобы облегчить обсуждение поляризационной структуры поля, на координатную плоскость θ, φ нанесены следы пересечений вертикальных плоскостей, проходящих через ось x , с поверхностью сферы. Используя рис. 1, нетрудно получить уравнение, связывающее координаты θ, φ, Φ :

$$\frac{\operatorname{tg} \Phi}{\sin \varphi} = \operatorname{tg} \theta. \quad (3)$$

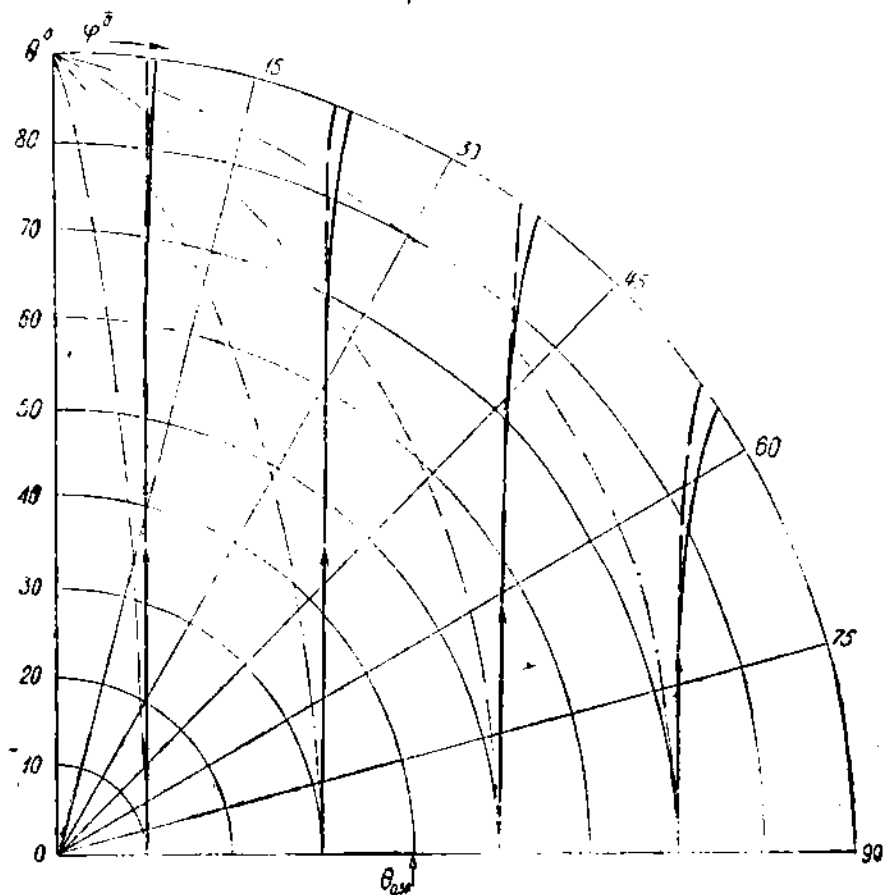


Рис. 2. Проекция электрических векторных линий поля излучения из круглого волновода на полусферу при $ka = 2$.

Полагая в (3) $\Phi = \text{const}$, находим $\varphi(\theta)$ — уравнение следа пересечения вертикальной плоскости с поверхностью сферы. Следы $\Phi = 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ представлены на рис. 2 штрих-пунктирными линиями.

Из рис. 2 видно, что поляризационная структура поля излучения круглого волновода в общих чертах напоминает картину поля волны H_{11} внутри волновода. Силовые линии вектора \vec{E} в пределах ширины главного лепестка по половине мощности компоненты E_θ примерно параллельны друг другу и следам вертикальных плоскостей; при увеличении угла θ они отклоняются от вертикальных плоскостей.

Строгое решение для поля излучения конического рупора отсутствует, поэтому воспользуемся приближенным решением, полученным методом векторизованного интеграла Кирхгофа [3].

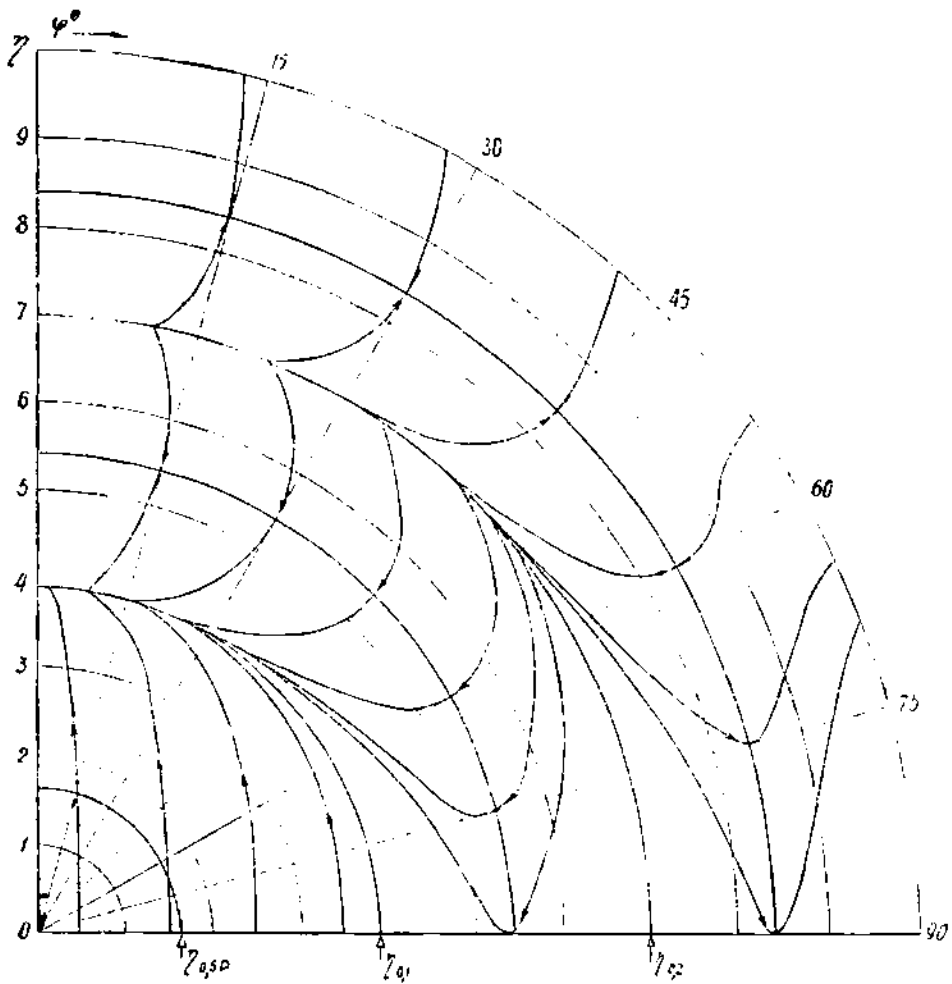


Рис. 3. Проекция электрических векторных линий поля излучения из конического рупора на полусферу в координатах η , φ .

Из результатов приближенного интегрирования (2) для $\eta \leq 10$ (рис. 3) видно, что поляризационная структура поля излучения конического рупора и круглого волновода не одинакова: силовые линии поля рупора искривлены и вогнутостью обращены к оси z . При уменьшении a/λ это отличие уменьшается.

Так как расчет производился в координатах η , φ , то результаты можно считать универсальными — пригодными для рупоров любых размеров, у которых раскрыв хорошо согласован со свободным пространством и пренебрежимо малы фазовые искажения.

Поляризационная структура поля излучения круглого диэлектрического стержня

Электрический вектор поля излучения диэлектрического стержня, запитываемого круглым волноводом, в котором распространяется волна H_{11} , определяется выражением, полученным с помощью интеграла Кирхгофа [5]:

$$\vec{E} = \frac{ik\psi(R)}{4\pi} B \left\{ \theta^0 A_1(\eta) \cos \theta \cos \varphi - \right. \\ \left. - \varphi^0 \frac{2J_1'(\eta)}{1 - (\tau/d)^2} \sin \varphi \right\} \frac{\sin \left[\frac{kL}{2} (\cos \theta - \xi) \right]}{\frac{kL}{2} (\cos \theta - \xi)}, \quad (4)$$

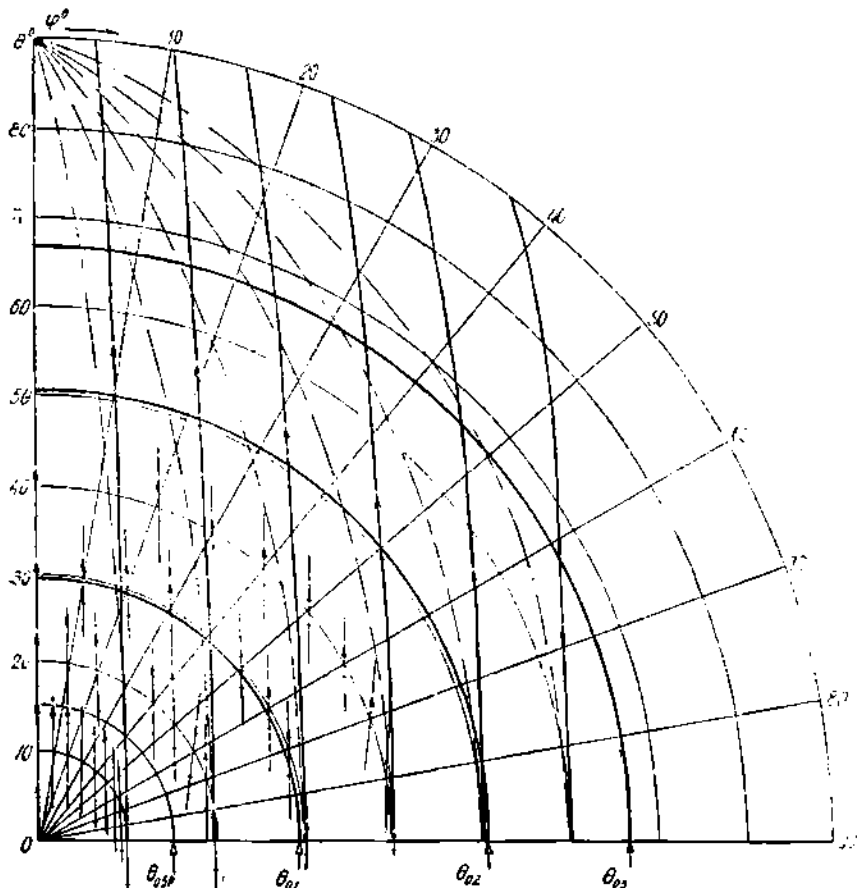


Рис. 4. Проекция электрических векторных линий поля излучения диэлектрического стержня. Векторам изображены результаты эксперимента.

где B — постоянный коэффициент, зависящий от условий возбуждения стержня;

L — длина стержня;

$\xi = \frac{\lambda}{\Lambda}$ — коэффициент укорочения волны в стержне;

$\tau = ka_{cp} \sin \theta$;

Λ — длина волны в стержне;

a_{cp} — средний радиус стержня.

После подстановки E_θ и E_φ из (4) в (1) рассчитана поляризационная структура поля излучения диэлектрической стержневой антенны с $L = 1,30$ мм и $a_{cp} = 7,7$ мм (рис. 4). Штрих-пунктирными линиями изображены проекции вертикальных плоскостей $\Phi = \text{const}$ на плоскость θ, φ . Из рис. 4 можно сделать следующие выводы:

1. Структура поля напоминает картину поля в диэлектрическом стержне, питаемом линейнополяризованной волной H_{11} , и близка к структуре поля излучения конического рупора в пределах главного лепестка его диаграммы направленности.

2. Силовые линии в главном лепестке диаграммы направленности стержня практически совпадают с проекциями вертикальных плоскостей на плоскость θ, φ .

3. На окружностях $\theta = 29^\circ, 51^\circ$ и $67,5^\circ$ последний множитель в (4) обращается в нуль, но отношение компонент поля непрерывно и сохраняет знак, поэтому направления силовых линий не меняются.

Эксперимент, осуществленный по описанной в [3] методике, хорошо подтверждает результаты расчета в пределах главного ($\theta \leq 29^\circ$) и первого бокового ($29^\circ < \theta < 51^\circ$) лепестков.

Поляризационная структура поля излучения прямоугольного волновода и пирамидального рупора

Полученное с помощью векторизованного интеграла Кирхгофа выражение для электрического вектора поля, излучаемого открытым концом прямоугольного волновода, возбуждаемого волной H_{10} , имеет вид [5]:

$$\vec{E} = \frac{ik^2(R)}{4\pi} E_{s0} \left\{ -\vec{e}_\theta \left(1 + \frac{W_0}{W_{10}} \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \cos \theta \right) \cos \varphi + \right. \\ \left. + \vec{e}_\varphi \left(\frac{W_0}{W_{10}} \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} + \cos \theta \right) \sin \varphi \right\} \frac{2ab \sin \tau_1}{\pi} \frac{\cos \tau_2}{1 - \left(\frac{2}{\pi} \tau_2 \right)^2}, \quad (5)$$

где E_{s0} — амплитуда электрического вектора в центре раскрытия;
 W_0 и W_{10} — волновые сопротивления свободного пространства и волновода;
 Γ — коэффициент отражения от раскрытия волны основного типа;
 a, b — размеры волновода в плоскостях E и H ;

$$\tau_1 = \frac{1}{2} ka \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2} kb \sin \theta \sin \varphi.$$

После подстановки E_θ и E_φ из (5) в (1) рассчитана поляризационная структура поля излучения прямоугольных волноводов. При расчете предполагалось, что фаза коэффициента отражения равна нулю, а модуль его определялся по приближенной формуле [5]:

$$|\Gamma| \approx \frac{1 - \frac{W_0}{W_{10}}}{1 + \frac{W_0}{W_{10}}}.$$

Результаты расчета представлены на рис. 5: для волновода сечением 23×10 мм² — короткие штрихи, для волновода сечением $28,5 \times 12,6$ мм²

— длинные штрихи, штрих-пунктирные линии — следы вертикальных плоскостей $\Phi = 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$.

Из рис. 5 видно:

1. Поляризационная структура поля излучения прямоугольного волновода аналогична поляризационной структуре поля круглого волновода: силовые линии искривлены, выпуклостью обращены к оси z и примерно параллельны друг другу.

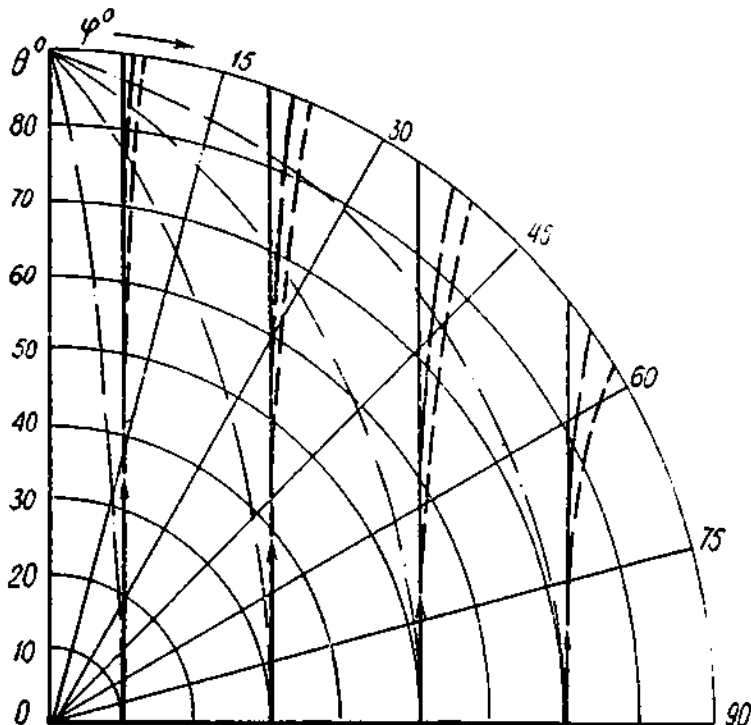


Рис. 5. Проекция электрических векторных линий поля излучения из прямоугольного волновода и пирамидального рупора.

2. Силовые линии отклоняются от вертикальных плоскостей сильнее, чем в случаях круглого волновода и конического рупора и тем более диэлектрического стержня. Эти отклонения тем меньше, чем больше отношение широкой стенки волновода к длине волны.

В случае пирамидального рупора считаем волновое сопротивление в его раскрытии согласованным с волновым сопротивлением свободного пространства. При этом выражение (5) упрощается и уравнение (1) легко интегрируется. Тогда находим:

$$\sin \varphi = \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{1}{\theta} . \quad (6)$$

Выражение (6) в результате расчета (рис. 5, сплошные линии) позволяют сделать следующие выводы:

1. Поляризационная структура поля пирамидального рупора не зависит от размеров его раскрытия, в отличие от других типов рассмотренных облучателей, т. е. полученный график является универсальным.

2. Силовые линии меньше отклоняются от вертикальных плоскостей, чем в случае прямоугольного волновода.

Оценка влияния поляризационной структуры поля облучателя на эффективность решетчатого зеркала

В качестве примера, где учет поляризационной структуры поля имеет существенное значение, рассмотрим двухзеркальную антенну с поворотом плоскости поляризации (рис. 6), состоящую из большого параболического зеркала 1, имеющего устройство для поворота плоскости поляризации: малого плоского решетчатого зеркала 2 и облучателя в виде конического рупора 3. Оценим отношение амплитуд и мощностей поля, просачивающегося через решетчатое зеркало, и поля, падающего на него.

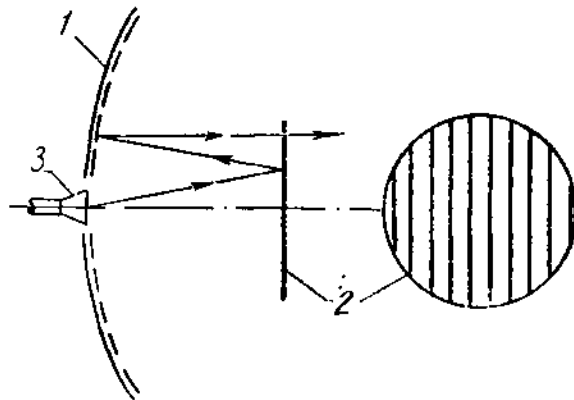


Рис. 6. Двухзеркальная антенна с поворотом плоскости поляризации.

Допустим, что зеркало выполнено так, что оно полностью отражает компоненту, плоскость поляризации которой проходит через проволочки решетки, и пропускает компоненту, ортогональную проволочкам решетки. Хотя эти предположения заведомо грубы, однако для приближенного решения задачи, нам кажется, они вполне допустимы.

Поместим фазовый центр облучателя в начало сферической системы координат, а плоское зеркало — параллельно плоскости xoy . Разложим электрический вектор падающей на решетчатое зеркало волны на указанные выше две компоненты. Допустим, что проволочки решетки параллельны оси x , и введем вторую сферическую систему координат θ, Φ, R , где θ — зенитный угол, отсчитываемый от оси x , Φ — азимутальный угол, отсчитываемый от оси z (рис. 1).

Электрический вектор падающей волны легко разложить по ортам прямоугольной системы координат:

$$\vec{E} = \vec{x}^0 (E_0 \cos \theta \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi) + \vec{y}^0 (E_0 \cos \theta \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi) - \vec{z}^0 E_0 \sin \theta.$$

Разложим также по ортам сферической системы координат орт $\vec{\Phi}^0$, ортогональный проволочкам решетки:

$$\vec{\Phi}^0 = \vec{y}^0 \cos \Phi - \vec{z}^0 \sin \Phi.$$

Тогда компонента поля, ортогональная проволочкам решетки,

$$E_\Phi = \vec{\Phi}^0 E = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta \sin^2 \varphi}} \left[\frac{E_0 \sin \varphi}{\cos \theta} + E_\varphi \cos \varphi \right]. \quad (7)$$

Используя (7), получим интересующее нас отношение $\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|}$ в виде

$$\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|} = \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + \frac{E_z}{E_\theta} \cos \varphi}{\sqrt{E_\theta^2 + E_z^2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \varphi} \sqrt{1 + \left(\frac{E_z}{E_\theta}\right)^2}} \quad (8)$$

Из (8) видно, что $\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|}$ зависит от угла φ .

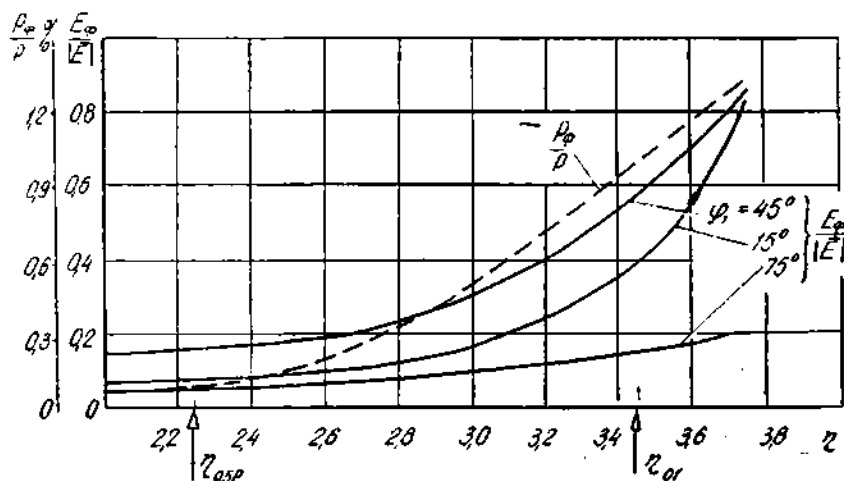


Рис. 7. Зависимость поляризационных потерь плоского решетчатого зеркала от обобщенной угловой координаты.

Рассмотрим случай, когда облучателем служит конический рупор. Тогда

$$\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|} = \frac{\sin \varphi \left[1 - \frac{2J_1(\eta) \cos \theta}{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \Delta_1(\eta)} \right]}{\sqrt{1 - (\sin \theta \cos \varphi)^2} \sqrt{1 + \left[\frac{2J_1(\eta) \operatorname{tg} \varphi}{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \Delta_1(\eta)} \right]^2}} \quad (9)$$

Результаты расчета по формуле (9) для рупора с $ka = 9$ в случаях $\varphi = 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ представлены на рис. 7. Ввиду громоздкости вычисления производились для $\eta > 2,2$ (т. е. от уровня $0,5E_{\theta \text{ макс}}$), где величина $\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|}$ достаточно велика.

Из рисунка видно, что $\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|}$ максимально при $\varphi = 45^\circ$, причем E_Φ достигает значения $0,56|\vec{E}|$ на уровне $0,1E_{\theta \text{ макс}}$. Для меньших η , что соответствует большим уровням мощности, отношение $\frac{E_\Phi}{|\vec{E}|}$ невелико.

Оценим теперь отношение мощности, переносимой компонентой E_Φ , ко всей мощности, падающей на решетчатое зеркало. Отнесенные к еди-

нице телесного угла мощности падающего на зеркало поля и его компоненты, ортогональной проволочкам решетки, пропорциональны соответственно

$$P_1(\theta, \varphi) \sim E_\theta^2(\theta, \varphi) + E_\varphi^2(\theta, \varphi);$$

$$P_{\Phi_1}(\theta, \varphi) \sim E_\Phi^2(\theta, \varphi).$$

Тогда отношение мощности, просачивающейся через зеркало, к мощности, падающей на него,

$$\frac{P_{\Phi}(\theta)}{P(\theta)} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_\Phi^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (E_\theta^2 + E_\varphi^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}. \quad (10)$$

Ввиду сложности анализа этого выражения в общем случае, а также желания выявить зависимость поляризационных потерь от угла φ , рассмотрим (10) в пределах узкого сектора $\Delta\varphi$ при $\varphi = \text{const}$. Тогда

$$\frac{P_{\Phi}(\theta)}{P(\theta)} = \frac{\int_0^{\pi/2} E_\Phi^2 \sin \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} (E_\theta^2 + E_\varphi^2) \sin \theta \, d\theta}. \quad (11)$$

Выражение (11) дает возможность оценить эффективность решетчатого зеркала при любом облучателе. Если облучатель — конический рупор, то (11) будет иметь вид:

$$\frac{P_{\Phi}}{P} = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{1 + \tan^2 \theta \sin^2 \varphi} \left[\frac{\Lambda_1(\eta)}{\cos \theta} - \frac{2J_1'(\eta)}{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \right]^2 d\theta}{\int_0^{\pi/2} \left(\left[\Lambda_1(\eta) \cos \varphi \right]^2 + \left[\frac{2J_1'(\eta)}{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \right]^2 \right) \sin \theta \, d\theta}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что отношение мощности, просачивающейся через решетчатое зеркало, ко всей падающей на него мощности максимально при $\varphi = 45^\circ$. Определим зависимость $\frac{P_{\Phi}}{P}(\theta)$ в этом случае. Интегрировать (12) будем, как и раньше, приближенным методом.

Из результатов расчета для $ka = 9$ (рис. 7, штриховая кривая) видно, что на уровне $0,5E_{0 \text{ max}}$ мощность, просачивающаяся через решетчатое зеркало, составляет всего 0,08% падающей на зеркало мощности; на уровне $0,1E_{0 \text{ max}}$ — около 1%. Отсюда видно, что поляризационные потери в решетчатом зеркале весьма незначительны. Как показывают соответствующие расчеты, при уменьшении ka они уменьшаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты исследований поляризационной структуры поля излучения некоторых типов облучателей позволяют сделать следующие выводы:

1. Поляризационная структура поля излучения из круглого волновода напоминает картину поля линейнополяризованной волны H_{11} в волноводе. Силовые линии тем меньше отклоняются от вертикальных плоскостей, чем больше $\frac{a}{\lambda}$.

Для поляризационной структуры поля излучения конического рупора получен универсальный график, характеризующий рупоры любых размеров, у которых раскрыв согласован со свободным пространством. Структура поля конического рупора значительно отличается от поляризационной структуры поля круглого волновода — силовые линии искривлены в другую сторону (от оси главного лепестка диаграммы направленности). Отклонение силовых линий от вертикальных плоскостей тем меньше, чем меньше $\frac{a}{\lambda}$. Отклонение силовых линий от вертикальных плоскостей минимально, когда первый нуль диаграммы направленности рупора совпадает с $\theta = 90^\circ$, т. е. в случае $ka = 3,9$.

2. Поляризационная структура поля излучения конического диэлектрического стержня напоминает картину поля в стержне, питаемом волной H_{11} , и аналогична структуре поля конического рупора в пределах главного лепестка его диаграммы направленности. Результаты расчета подтверждены экспериментом.

3. В пределах главного лепестка диаграммы направленности поляризационная структура поля излучения прямоугольного волновода аналогична структуре поля круглого волновода. Отклонение силовых линий от вертикальных плоскостей тем меньше, чем больше отношение размера широкой стенки волновода к длине волны.

Для поляризационной структуры поля излучения пирамидального рупора получен универсальный график, пригодный для рупоров любых размеров, у которых раскрыв согласован со свободным пространством. Увеличение раскрыва рупора не приводит к уменьшению отклонения силовых линий от вертикальных плоскостей. В отличие от конического рупора, отсутствуют оптимальные размеры, при которых это отклонение минимально.

4. Сравнение поляризационных структур полей излучения круглого и прямоугольного волноводов, конического и пирамидального рупоров и диэлектрического стержня показывает, что минимальные отклонения силовых линий от вертикальных плоскостей в пределах главного лепестка имеют место в случае диэлектрического стержня.

5. Приблизительно оценено отношение амплитуд и мощностей поля, просачивающегося через решетчатое зеркало, и поля, падающего на него, в двухзеркальной антенне с поворотом плоскости поляризации. Показано, что поляризационные потери в решетчатом зеркале весьма незначительны.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Фрадкин. Антенны сверхвысоких частот, М., изд-во «Сов. радио», 1957.
2. P. W. Наппа. IRE Trans., vol. AP — 9, № 2, 1961.
3. Ю. В. Шубарин, Н. Н. Горобец. «Уч. зап. Харьковск. ун-та». Труды радиофиз. ф-та, т. 7, 1962, стр. 42—49.
4. Л. А. Вайнштейн. Диффракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., изд-во «Сов. радио», 1953.
5. Ю. В. Шубарин. Антенны сверхвысоких частот, Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.

**ПАРАМЕТРЫ КОЛЬЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРОВ
НА *H*- И КРЕСТООБРАЗНЫХ ВОЛНОВОДАХ,
ИЗОГНУТЫХ В ПЛОСКОСТИ *E***

А. Ф. Зоркин, А. И. Терещенко

За последнее время в печати появилось несколько работ [1—5], посвященных равномерно-изогнутым в плоскости *E* волноводам сложной формы поперечного сечения и кольцевым резонаторам на них.

В настоящей работе дается вывод формул для расчета собственной добротности Q_0 и отношения $\frac{R_0}{Q_0}$ (R_0 — активное сопротивление резонатора при резонансе) для кольцевых резонаторов на волноводах сложной формы поперечного сечения. Кроме того, описывается методика экспериментального определения величин Q_0 , $\frac{R_0}{Q_0}$, а также собственной частоты f_0 резонатора на основном виде колебания.

Формулы для расчета Q_0 и $\frac{R_0}{Q_0}$

Рассмотрим резонаторы на изогнутых в плоскости *E* волноводах *H*-образного (рис. 1, а) и крестообразного (рис. 1, б) поперечного сечения, симметричные относительно плоскости $z = a + b$.

Как известно [6, 7], собственная добротность Q_0 и отношение $\frac{R_0}{Q_0}$ определяются по формулам

$$Q_0 = \int_V (\mu |\vec{H}|^2 + \epsilon |\vec{E}|^2) dV \Big/ \frac{1}{\delta \mu_{\text{ст}}} \oint_S |\vec{H}_t|^2 dS; \quad (1)$$

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{2 \left(\int_a^b \vec{E}_m dl \right)^2}{\omega_0 \int_V (\mu |\vec{H}|^2 + \epsilon |\vec{E}|^2) dV}, \quad (2)$$

где \vec{E}_m — амплитуда напряженности электрического поля на пути интегрирования между точками *a* и *b*;

δ — толщина скин-слоя на частоте f_0 ;

$\mu_{\text{ст}}$ — магнитная проницаемость материала стенок резонатора.

¹ Как показано в работе [6], формулы для отношения $\frac{R_0}{Q_0}$ являются более точными, чем формулы для Q_0 и R_0 в отдельности, в силу того что отношение $\frac{R_0}{Q_0}$ не зависит от потерь.

Для определения Q_0 и $\frac{R_0}{Q_0}$ воспользуемся приближенными выражениями для полей основного вида [5]:

$$\begin{aligned} E_r^{(i)} &= -\frac{A}{r} \xi_i k \sin k(z - \zeta_i); \\ H_z^{(i)} &= i \frac{A}{r} \xi_i \omega_0 \varepsilon \cos k(z - \zeta_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где индекс $i = 1, 2, 3$ — номер области (рис. 1 а, б), для которой записаны поля; значения ζ_i : $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = a + b - \frac{\pi}{2k}$, $\zeta_3 = 2(a + b)$; а значения ξ_i :

$$\xi_2 = 1, \quad \xi_j = \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} \ln \frac{R_2}{r_2} \cos ka}{\ln \frac{R_1}{r_1} \sin kb}.$$

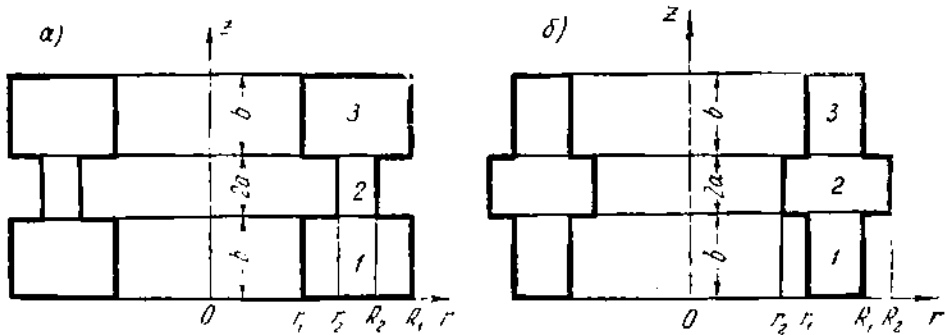


Рис. 1.

где $j = 1, 3$ — номер области. Очевидно, что в нашем случае $|\xi_1| = |\xi_3|$.

Величина k ($k = \omega_0 \sqrt{\varepsilon \mu}$) является минимальным корнем уравнений следующего вида [2, 4, 5]:

а) для резонатора на H -волноводе:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} ka &= \left(\frac{\ln \frac{R_2}{r_2}}{\ln \frac{R_1}{r_1}} \right) \left\{ \operatorname{ctg} kb + \right. \\ &+ 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{ctg} \mu_{0m}^{(1)} b) [u_0 (\alpha_{0m}^{(1)} R_2) - u_0 (\alpha_{0m}^{(1)} r_2)]^2 \ln \left(\frac{R_1}{r_1} \right)}{\mu_{0m}^{(1)} \{ [R_1 u_0' (\alpha_{0m}^{(1)} R_1)]^2 - [r_1 u_0' (\alpha_{0m}^{(1)} r_1)]^2 \} \left[\alpha_{0m}^{(1)} \ln \left(\frac{R_2}{r_2} \right) \right]^2} \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

б) для резонатора на крестообразном волноводе:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} kb &= \left(\frac{\ln \frac{R_1}{r_1}}{\ln \frac{R_2}{r_2}} \right) \left\{ \operatorname{tg} ka + \right. \\ &+ 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{tg} \mu_{0m}^{(2)} a) [u_0 (\alpha_{0m}^{(2)} R_1) - u_0 (\alpha_{0m}^{(2)} r_1)]^2 \ln \left(\frac{R_2}{r_2} \right)}{\mu_{0m}^{(2)} \{ [R_2 u_0' (\alpha_{0m}^{(2)} R_2)]^2 - [r_2 u_0' (\alpha_{0m}^{(2)} r_2)]^2 \} \left[\alpha_{0m}^{(2)} \ln \left(\frac{R_1}{r_1} \right) \right]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

В этих формулах обозначено:

$$u_0(\alpha_{0m}^{(i)} r) = N_0(\alpha_{0m}^{(i)} r_i) J_0(\alpha_{0m}^{(i)} r) - J_0(\alpha_{0m}^{(i)} r_i) N_0(\alpha_{0m}^{(i)} r),$$

где $\alpha_{0m}^{(i)}$ определяется из уравнения

$$N_0(\alpha_{0m}^{(i)} r_i) J_0(\alpha_{0m}^{(i)} R_i) - J_0(\alpha_{0m}^{(i)} r_i) N_0(\alpha_{0m}^{(i)} R_i) = 0, \\ \alpha_{0m}^{(i)} = \sqrt{k^2 - (\alpha_{0m}^{(i)})^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Подставив (3) в формулу (1) и выполнив интегрирование, получим

$$Q_0 = \frac{M}{\omega N}, \quad (6)$$

где

$$M = 2 \left[\xi_1^2 b \ln \left(\frac{R_1}{r_1} \right) + a \ln \left(\frac{R_2}{r_2} \right) \right], \\ N = \xi_1^2 \left[2 \ln \left(\frac{R_1}{r_1} \right) + b \left(1 + \frac{\sin 2kb}{2kb} \right) \frac{(R_1 + r_1)}{R_1 r_1} + \right. \\ \left. + a \left(1 - \frac{\sin 2ka}{2ka} \right) \frac{(R_2 + r_2)}{\xi_1^2 R_2 r_2} + 2 \cos^2 kb \left| \ln \left(\frac{R_1 r_2}{R_2 r_1} \right) \right| \right].$$

Найдем выражение для $\frac{R_0}{Q_0}$ относительно того сечения резонатора в котором электрическое поле E_r принимает максимальное значение. Таким сечением на основной резонансной частоте является сечение $z = a + b$. В этом случае криволинейный интеграл в (2) следует брать на интервале $[r_2, R_2]$. Подставив (3) в (2) и выполнив интегрирование, имеем

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\ln \left(\frac{R_2}{r_2} \right) \right]^2}{\pi k M}. \quad (7)$$

Полученные формулы справедливы также для кольцевых резонаторов на H - и T -волноводах, которые являются частным случаем H - и крестообразных волноводов. Так, например, кольцевой резонатор на H -волноводе получается из резонатора на H -волноводе (рис. 1, а), у которого $r_1 = r_2 = r_3$ или $R_1 = R_2 = R_3$. Точно так же кольцевой резонатор на T -волноводе можно рассматривать, как резонатор на крестообразном волноводе (рис. 1, б), у которого $r_1 = r_2 = r_3$ или $R_1 = R_2 = R_3$.

Экспериментальное определение параметров резонаторов

Для экспериментальной проверки формул (4) — (7) были изготовлены из латуни ($\sigma_{\text{эф}} \approx 1,4 \cdot 10^7 \text{ см/м}$ [8]) три кольцевых резонатора. Резонаторы № 1 (рис. 2, а) и № 3 (рис. 2, в) выполнены соответственно на H - и T -волноводах, изогнутых в плоскости E так, что $r_1 = r_2 = r_3$; резонатор № 2 (рис. 2, б) выполнен на H -волноводе таким образом, что $R_1 = R_2 = R_3$. Геометрические размеры резонаторов приведены в табл. 1, где $h = R_j - r_j$, $h_2 = R_2 - r_2$.

Все резонаторы сделаны разборными, так что крышка 1 (рис. 2 а, б, в) снимается и при сборке под нее можно положить кольцо 2 с зондом и гнездом для детектора 3.

Таблица 1

№ резонатора	Геометрические размеры, мм				
	r_1	$2a$	b	h_2	h
1	9,83	9,20	10,70	2,88	9,78
2	9,85	9,25	10,60	3,02	9,85
3	9,80	9,30	10,70	16,68	9,83

С помощью зонда можно зафиксировать момент резонанса по максимуму показаний индикаторного устройства, включенного в цепь детектора, а также определить периодичность поля по окружности резонатора, путем вращения кольца 2.

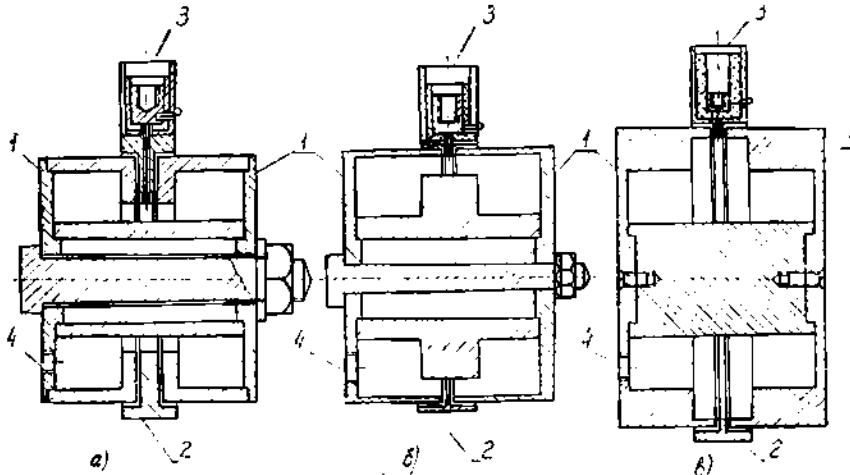


Рис. 2.

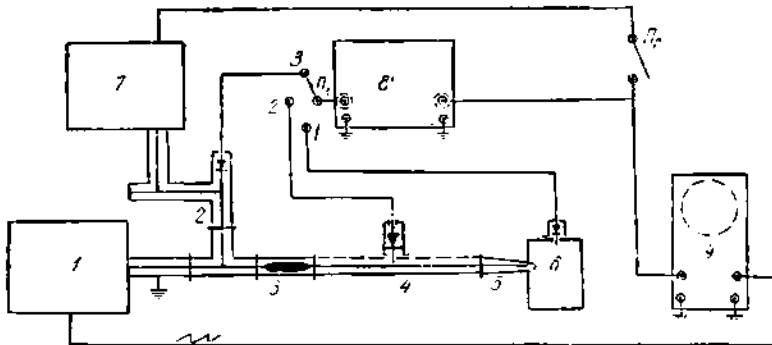


Рис. 3.

Для возбуждения резонаторов применен конусный коаксиальный переход, один конец которого соединен с отверстием 4 резонатора, а другой сделан в виде фишки стандартного 50-омного коаксиального кабеля и может быть подключен непосредственно к коаксиальной измерительной линии.

Для измерения параметров кольцевых резонаторов была собрана установка, блок-схема которой приведена на рис. 3. Здесь 1 — генера-

тор Г4-9 (или Г4-10А), 2 — смесительная головка, 3 — коаксиальный фиксированный аттенуатор на $10 \div 15$ дБ, 4 — коаксиальная измерительная линия ИКЛ-10, 5 — конусный коаксиальный возбуждатель, 6 — исследуемый резонатор, 7 — волномер ВСТ-10П, 8 — измерительный усилитель 28ИМ, 9 — осциллограф ЭО-7.

Измерение резонансной частоты производилось двумя методами: проходным и «реактивным» [6].

При проходном методе высокочастотные колебания модулировались прямоугольными импульсами с соотношением полупериодов 1:1 при частоте следования 1000 гц, а момент резонанса отмечался по максимуму показаний индикаторного прибора 8 (P_1 находился в положении 1).

Основная резонансная частота определялась, как наименьшая резонансная частота, при которой нет вариации поля по окружности резонатора. Частота измерялась с помощью волномера ВСТ-10П (или ВСТ-6М).

При «реактивном» методе генератор модулировался пилообразным напряжением. Высокочастотная энергия, поступающая в смесительную головку 2, детектировалась, и сигнал низкой частоты (частоты модуляции) после усиления прибором 8 (P_1 в положении 3) подавался на вертикально отклоняющие пластины осциллографа 9, горизонтальная развертка которого осуществлялась тем же пилообразным напряжением, что и модуляция генератора. В результате на экране была видна область генерации клистрона. Так как на резонансной частоте полное сопротивление резонатора резко изменяется, то на кривой области генерации на этой частоте появлялся провал. Совместив его с «отсосом» от волномера 7, можно было измерить резонансную частоту.

Если связь волномера 7 с трактом оказывалась слабой, то использовался внутренний усилитель волномера (при этом P_2 включен). В этом случае «отсос» от волномера был виден достаточно хорошо.

Усредненные значения многократно измеренных резонансных частот резонаторов № 1 — № 3 приведены в табл. 2. Относительная погрешность измерения резонансных частот не превышает $\pm 1,0\%$. Для сравнения в табл. 2 даны значения резонансных частот, рассчитанных по формулам (4) и (5). Как видно из таблицы, расхождение между рассчитанными и экспериментальными значениями резонансных частот не превышает 1,3%. Это указывает на пригодность формул (4) и (5) для расчета резонансных частот.

Измерение собственной добротности Q_0 кольцевых резонаторов производилось методом коэффициента стоячей волны (КСВ) [6]. В этом случае высокочастотные колебания генератора 1 модулировались прямоугольными импульсами, измерительная коаксиальная линия 4 подключалась к усилителю 8 (P_1 в положении 2).

После установки частоты генератора, близкой к резонансной, снимался график зависимости КСВ от частоты и по минимуму КСВ определялась резонансная частота f_0 , а также находилась величина параметра связи β .

По известной величине минимального КСВ находилась величина КСВ, соответствующая уровню половинной мощности ($k_{0,5}$). Затем из графика зависимости КСВ от частоты по найденной величине $k_{0,5}$ определялась полоса частот Δf , собственная добротность находилась по формуле

$$Q_0 = \frac{(1 + \beta) / \beta}{\Delta f} f_0. \quad (8)$$

Расчетные и экспериментальные значения Q_0 занесены в табл. 2. Как видно из таблицы, расхождение между расчетными и экспериментальными значениями Q_0 весьма велико. Это объясняется тем, что формула (6) не учитывает потерь в контактах и на излучение (резонаторы сборной конструкции), которые во много раз больше омических потерь в стенках резонатора. По-видимому, можно ввести в формулу (6) некоторый коэффициент, постоянный для данного типа конструкции резонатора, и тогда формула может быть использована для инженерных расчетов собственной добротности.

Величина отношения $\frac{R_0}{Q_0}$ определялась методом возмущения [6]. В качестве возмущающих тел использовались станиоловые кольца толщиной $l = 0,015$ мм с внутренним радиусом ρ . Они помещались в плоскости $z = a + b$ (рис. 4). В этом случае из теоремы возмущения Слэтера

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{\alpha \int (\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) d\tau}{\int (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV},$$

после подстановки (3) и выполнения интегрирования с учетом малости величин l и $\Delta\rho = R_2 - \rho$ имеем

$$M = \frac{\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta f_0}\right) \alpha f_0}{2R_2}, \quad (9)$$

где $\Delta f_0 = f_0 - f$;
 f_0 — резонансная частота невозмущенного резонатора;

α — постоянная, зависящая от формы возмущающего тела и от того, каким образом $\Delta\tau$ (возмущение объема V) стремится к нулю.

В (9) можно положить $\alpha = 1$, если отношение определять как тангенс угла наклона касательной в той точке экспериментальной кривой $f = F(\rho)$, которая соответствует случаю невозмущенного резонатора. Подставив (9) в (7), окончательно получим

$$\frac{R_0}{Q_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\left(\ln \frac{R_2}{r_2}\right)^2 R_2}{\pi k f_0 l} \left(\frac{df}{d\rho}\right)_{\rho=R_2}. \quad (10)$$

Итак, измерение отношения $\frac{R_0}{Q_0}$ сводится к снятию зависимости резонансной частоты от величины внутреннего радиуса ρ возмущающего кольца, который изменяется от $R_2 - \Delta\rho$ до $R_2 + \Delta\rho$, и к определению тангенса угла наклона касательной в точке $\rho = R_2$. Результаты измерений $\frac{R_0}{Q_0}$ приведены в табл. 2, где даны и расчетные значения отношения $\frac{R_0}{Q_0}$.

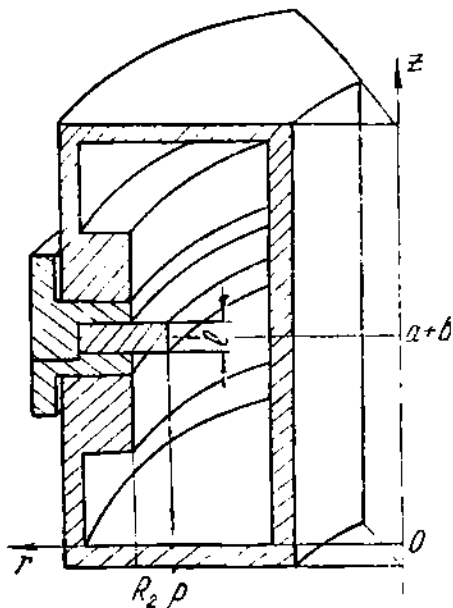


Рис. 4.

Таблица 2

№ резонатора	f_0 , мГц		Q_0		$\frac{R_0}{Q_0}$, ом		Δf , мГц	β
	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент		
1	3220	3214	2020	935	17,8	18,6	11,9	2,46
2	2635	2633	1750	1210	14,5	16,4	3,7	0,70
3	5115	5052	2820	2030	29,5	31,7	6,0	1,41

Как видно из таблицы, расхождение между расчетными и экспериментальными значениями $\frac{R_0}{Q_0}$ не превышает 14% при относительной погрешности измерения $\frac{R_0}{Q_0} \pm 25\%$. Это говорит о пригодности формулы (7) для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Яшкин. Расчет собственной частоты резонаторов сложной формы в цилиндрических функциях. «Радиотехника», 1961, т. 16, 5, 35.
2. А. Я. Яшкин. Равномерный изгиб H -, T -волноводов в плоскости E . «Радиотехника и электроника», 1961, т. 7, 1, 67.
3. А. И. Терещенко, В. И. Милько. Кольцевой резонатор для радиального кластрона. ЖТФ, 1959, т. 29, 11, 1415.
4. А. Ф. Зоркин. Дисперсионные уравнения для равномерно-изогнутых волноводов сложной формы поперечного сечения с выступами на цилиндрических стенках. «Тр. радиофиз. ф-та Харьковск. ун-та», 1962, т. 5, 56.
5. А. И. Терещенко, А. Ф. Зоркин. Кольцевые резонаторы на волноводах сложной формы поперечного сечения. «Радиотехника и электроника», 1964, т. 9, 7, 1206.
6. Э. Л. Гинзтон. Измерения на сантиметровых волнах, М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Н. В. Лебедев. Техника и приборы сверхвысоких частот, М. — Л., Госэнергоиздат, 1961.
8. Я. Д. Ширман. Радиоволноводы и объемные резонаторы, М., Связьиздат, 1959.

ИНДУКТИВНЫЙ ШТЫРЬ В *H*- И *П*-ВОЛНОВОДЕ

Н. В. Ляпунов, Ю. М. Бородавко, А. Е. Зайцев, А. Г. Шейн

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появились сообщения о разработке отдельных деталей и узлов на *П*-волноводах [1, 2]. Использование *П*-волноводов в радиотехнической аппаратуре ставит вопрос о теоретическом расчете как параметров самих волноводов (критических частот, постоянной затухания, волнового сопротивления и предельной мощности), так и параметров различного вида неоднородностей.

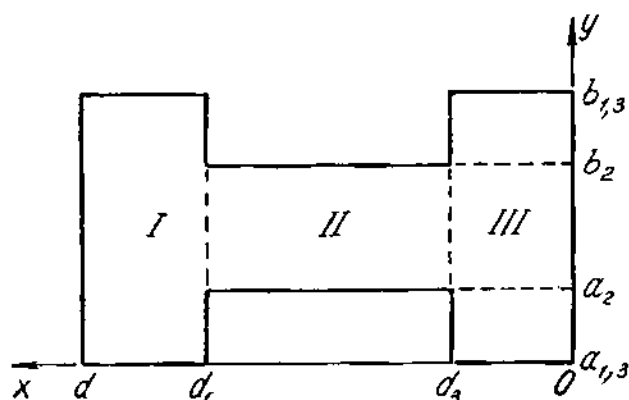


Рис. 1.

В ряде работ советских и зарубежных авторов [3, 4, 5, 6] приводятся теоретические формулы для расчета основных параметров *H*- и *П*-волноводов. Что касается теории неоднородностей в *H*- и *П*-волноводах, то в литературе она совершенно не освещена.

В данной статье сделана попытка рассмотреть один из видов неоднородностей — тонкий индуктивный штырь конечной проводимости в *H*- и *П*-волноводе.

1. Тонкий индуктивный штырь в *H*- и *П*-волноводе

Исследование неоднородности штыревого типа удобно производить, оперируя электрическим вектором Герца — $\vec{\Pi}_e$. Составляющие полей в волноводе при помощи $\vec{\Pi}_e$ определяются, как известно, по формулам

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} (\nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}_e + k^2\vec{\Pi}_e); \quad H = j\omega[\nabla\vec{\Pi}_e]. \quad (1)$$

В работе [7] показано, что для частичных областей H -волновода (рис. 1) вектор Герца, направленный вдоль оси Y , может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{zk}^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_k \xi_{zk}^{(i)} \cos [s_n^{(i)}(y - a_i)] \sin [p_{nk}^{(i)}(x - a_i)] e^{i\omega t - \gamma_k z} = \\ &= A_k \omega_{zk}^{(i)}(x, y) e^{i\omega t - \gamma_k z}, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь A_k — амплитудный коэффициент,

$\omega_{zk}^{(i)}(x, y)$ — функция, зависящая от номера области и типа волны.

Пусть штырь имеет радиус r ($r \ll \lambda_n$) и расположен на расстоянии l' ($l' \gg r$) от боковой стенки волновода (рис. 2).

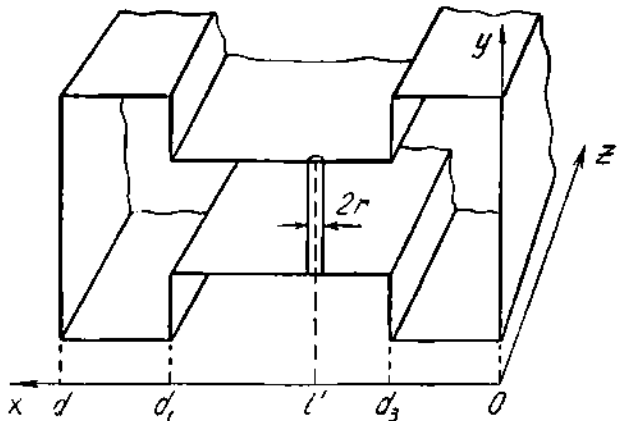


Рис. 2.

В положительном направлении z распространяется волна основного типа — TE_{10} . Поперечную составляющую электрического поля мы можем записать в виде

$$E_y = \omega_{e0}^{(i)}(x, y) e^{-\gamma z}, \quad (3)$$

при этом мы положили амплитуду падающей волны равной единице. Множитель $e^{i\omega t}$ мы везде будем опускать.

Падение волны на металлический проводник в волновде вызывает в проводнике появление наведенных токов. Последние возбуждают в волновде вторичное электромагнитное поле. Учитывая, что штырь имеет круглое сечение и достаточно малый радиус, мы можем ввести некоторый фиктивный ток I , протекающий по оси штыря. Тогда, с учетом проводимости материала штыря, граничное условие на его поверхности может быть записано так:

$$E = \frac{I}{2\pi r} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{\sigma}}. \quad (4)$$

Линейный ток I , очевидно, является функцией положения штыря в волновде и направлен вдоль оси штыря. Поэтому запишем его как

$$I = I_0(x, y) \delta(z) \delta(x - l') \hat{y}_0, \quad (5)$$

здесь $\delta(z)$ и $\delta(x - l')$ — дельта-функции.

Вектор Герца, описывающий поля, возбужденные линейным током I , удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \bar{\Pi}_e + k^2 \bar{\Pi}_e = j \frac{I}{\omega}. \quad (6)$$

Из (6) непосредственно следует, что вектор Герца $-\bar{\Pi}_e$ имеет лишь составляющую, направленную вдоль оси « Y » — $\bar{\Pi}_{ey}$. Решение (6) ищем в виде:

$$\Pi_{ey}^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \omega_{ek}^{(j)}(x, y) e^{\pm \gamma_k z}, \quad (7)$$

здесь k — номер типа колебания;

$$\gamma_k = \sqrt{x_k^2 - k^2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

$$x_k^2 = s_n^{(j)2} + \rho_{nk}^{(j)2}, \quad s_n^{(j)} = \frac{n\pi}{a_j - b_j}; \quad n = 0; 1; 2; \dots$$

Подставим (7) в (6), учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \omega_{ek}^{(j)}(x, y)}{\partial x^2} = -[\rho_{nk}^{(j)}]^2; \quad \frac{\partial^2 \omega_{ek}^{(j)}(x, y)}{\partial y^2} = -[s_n^{(j)}]^2.$$

Получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_k^2 \right) \omega_{ek}^{(j)}(x, y) e^{\pm \gamma_k z} = j \frac{I_0}{\omega} \delta(z) \delta(x - l'). \quad (8)$$

Как показано в [9], коэффициенты A_k могут быть найдены, если учесть ортогональность собственных функций волновода. Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} \omega_{ek}^{(j)}(x, y) \omega_{ek'}^{(j)}(x, y) dS_j = \begin{cases} \delta_k & k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

можно записать

$$A_k = \frac{-j}{2\omega \gamma_k \delta_k} \sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x - l') \omega_{ek}^{(j)}(x, y) dS_j. \quad (9)$$

Согласно (1), для E_y имеем выражение

$$E_y^{(j)} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \Pi_{ey}^{(j)}}{\partial y^2} + k^2 \Pi_{ey}^{(j)} \right). \quad (10)$$

С учетом (9) выражение (10) имеет вид:

$$E_y^{(j)} = - \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 - (s_n^{(j)})^2] \frac{j}{2\omega \epsilon_0 \gamma_k \delta_k} \left[\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x - l') \omega_{ek}^{(j)}(x, y) dS_j \right] \times$$

$$\times \omega_{ek}^{(j)}(x, y) e^{-\gamma_k |z|}. \quad (11)$$

Тогда поле основной возбужденной волны записывается как

$$E_y^{(i)} = -[k^2 - (s_n^{(i)})^2] \frac{l}{2\omega \varepsilon_0 \gamma_0 \delta_0} \left[\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x-l') \omega_{z0}^{(j)}(x, y) dS_j \right] \times \\ \times \omega_{z0}^{(i)}(x, y) e^{-\gamma_0 |z|}. \quad (12)$$

Вводя коэффициент отражения по напряжению R , получаем для него выражение

$$R = -[k^2 - (s_n^{(i)})^2] \frac{l}{2\omega \varepsilon_0 \gamma_0 \delta_0} \left[\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x-l') \omega_{z0}^{(j)}(x, y) dS_j \right]. \quad (13)$$

Вычтем (13) из (11) и применим граничное условие (4) на поверхности штыря. Получим интегральное уравнение для определения неизвестной функции $I_0^{(i)}(x, y)$:

$$(1+R) \omega_{z0}^{(i)}(l'+r, y) = \frac{I_0^{(i)}(x, y)}{2\pi r} \sqrt{\frac{\omega_{z0}^{(i)}}{\sigma}} + \sum_{k=1}^n j[k^2 - (s_n^{(i)})^2] \times \\ \times \frac{\omega_{zk}^{(i)}(l'+r, y)}{2\omega \varepsilon_0 \gamma_k \delta_k} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x-l') \omega_{zk}^{(j)}(x, y) dS_j \right). \quad (14)$$

Уравнение (14) можно было бы решать непосредственно, однако, такое решение довольно громоздко. Поэтому мы воспользуемся методом, предложенным Ю. Швингером для решения подобного рода задач. Сущность этого метода изложена в [8].

Умножим (14) на $I_0^{(i)}(x, y) \delta(x-l')$ и проинтегрируем по площади поперечного сечения волновода, затем разделим получившийся результат на (13). В итоге получим:

$$\sum_{k=1}^n \frac{[k^2 - (s_n^{(i)})^2]}{2\gamma_k \delta_k} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \omega_{zk}^{(j)}(x, y) \delta(x-l') dS_j \right) \times \\ \times \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \omega_{zk}^{(i)}(l'+r, y) \delta(x-l') dS_j \right) + \\ + \frac{\omega_{z0}^{(i)}}{2\pi r} \sqrt{\frac{\omega_{z0}^{(i)}}{\sigma}} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \delta(x-l') dS_j \right) \\ \frac{1+R}{2R} = \frac{\frac{k^2 - (s_n^{(i)})^2}{\gamma_0 \delta_0} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \omega_{z0}^{(j)}(x, y) \delta(x-l') dS_j \right) \times \\ \times \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(j)}(x, y) \omega_{z0}^{(i)}(l'+r, y) dS_j \right)}{\dots}. \quad (15)$$

Это выражение можно значительно упростить, если воспользоваться свойствами δ -функции. В результате упрощения будем иметь:

$$\frac{1+R}{2R} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{[k^2 - (s_n^{(i)})^2]}{2\gamma_k \delta_k} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(i)}(l', y) \omega_{ek}^{(i)}(l', y) dS_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(i)}(l', y) \omega_{ek}^{(i)}(l' + r, y) dS_j \right) + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0}{2\pi r l} \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{\sigma}} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^2(l', y) dS_j \right)}{\frac{k^2 - (s_n^{(i)})^2}{\gamma_0 \delta_0} \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(i)}(l', y) \omega_{e0}^{(i)}(l', y) dS_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} I_0^{(i)}(l', y) \omega_{e0}^{(i)}(l' + r, y) dS_j \right)} \quad (16)$$

Заметим, что коэффициент отражения для шунтирующего передающую линию приведенного сопротивления \bar{Z} равен

$$R = -\frac{1}{1 + 2\bar{Z}}.$$

Очевидно, что правая часть (16) как раз равна шунтирующему сопротивлению штыря.

Достоинством метода Швингера является то, что нам не нужно искать точное значение функции $I_0^{(i)}(x, y)$, а достаточно задать ее приближенный вид. При этом изменение \bar{Z} будет незначительным. Докажем это.

Предположим, что $l \gg r$. Заменим

$$\left\{ \int I_0^{(i)}(l', y) \omega_{ek}^{(i)}(l', y) dy \right\}^2 \text{ на } \iint I(l', y) I(l', \xi) \omega_{ek}(l', y) \omega_{ek}(l', \xi) dy d\xi.$$

Теперь запишем (14) в виде

$$F(l', y) K = I(y) + \int G(\xi, y) I(\xi) d\xi, \quad (17)$$

а (16) в виде

$$\bar{Z} = \frac{\int I^2(y) dy + \iint G(\xi, y) I(\xi) I(y) d\xi dy}{\left\{ \int I(y) F(l', y) dy \right\}^2}. \quad (18)$$

Если функция $I(y)$ получает малое приращение $\delta I(y)$, то, как легко показать, $\delta \bar{Z} = 0$. Это означает, что \bar{Z} стационарно относительно малых вариаций $I_0^{(i)}(x, y)$. Тем самым мы обосновали возможность выбора вида функции $I_0^{(i)}(x, y)$, соответствующего физическим представлениям о распределении тока на штыре. Нам представляется наиболее естественным выбор функции $I_0^{(i)}(x, y)$ в виде

$$I_0^{(i)}(x, y) = I_0 \omega_{e0}^{(i)}(x, y). \quad (19)$$

Тогда в первом приближении $I_n^{(i)}(x, y) = I_0$. В этом случае сопротивление штыря можно вычислить по формуле

$$\frac{1+R}{2R} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - (s_n^{(i)})^2}{2\gamma_k b_k} \left(\int_{a_j}^{b_j} \omega_{ek}^{(i)}(l', y) dy \right)^2 + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0}{2\pi r l} \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{\sigma}} (b_j - a_j)}{\frac{k^2 - (s_n^{(i)})^2}{\gamma_0 b_0} \left(\int_{a_j}^{b_j} \omega_{e0}^{(i)}(l', y) dy \right)^2}. \quad (20)$$

Формула (20) позволяет определить \bar{Z} с любой степенью точности, но громоздка. Проводить расчеты по этой формуле довольно трудно, так как в выражении для $\omega_{ek}^{(i)}(x, y)$ имеются ряды по пространственным гармоникам.

Расчеты, проведенные при вычислении затухания [6] и других параметров H -волновода, показали хорошее совпадение теоретических результатов, полученных при учете нулевой пространственной гармоники, с экспериментальными данными.

При наших расчетах мы также будем учитывать только нулевую пространственную гармонику.

В этом случае между амплитудами вектора Герца в частичных областях H -волновода имеется следующая связь:

$$A_k^{(1)} = \varepsilon_k^{(i)} A_k^{(2)} = A_k^{(2)} \frac{b_2 - a_3}{b_j - a_j} \cdot \frac{\sin [x_k (d_i - z)]}{\sin [x_k (d_j - a_j)]};$$

$$a = \frac{2l}{2} - \frac{\pi(k+1)}{x_k}; \quad \alpha_1 = 2l; \quad \alpha_3 = 0.$$

Тогда формула (20) имеет вид

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_k^{(i)})^2}{2\gamma_k b_k} \sin^2 [x_k (l' - a_j)] + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0}{i 2\pi k^2 r} (b_j - a_j) \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{\sigma}}}{\frac{(\varepsilon_0^{(i)})^2}{\gamma_0 b_0} \sin^2 [x_0 (l' - a_j)]}. \quad (21)$$

Формулы (20) и (21) в пределе переходят в формулы для проводимости штыря в прямоугольном волноводе, полученные Л. Левиным. В самом деле, пусть H -волновод стремится к прямоугольному так, что $a \rightarrow l$, $g \rightarrow h$. Тогда для всех типов волн $\varepsilon_k^{(i)} \rightarrow 1$. Для нечетных волн собственные числа

$$x_k \rightarrow \frac{m\pi}{2l} = \frac{m\pi}{a_{\text{прямоуг}}}; \quad m = 1; 3; 5; \dots$$

для четных волн —

$$x_k \rightarrow \frac{2m\pi}{2l} = \frac{2m\pi}{a_{\text{прямоуг}}}. \quad m = 1; 2; 3; \dots$$

При этом выражения (20) и (21) переходят в формулу Левина.

2. Экспериментальная проверка

С целью проверки основных результатов расчета было произведено экспериментальное определение величины проводимости штыря в P -волноводе.

Теоретическое значение \tilde{B} определялось по формуле (21), при этом учитывались лишь четыре первые типа колебаний. Расчет проводился для медного штыря диаметром $d = 0,4$ мм.

Полученные значения \tilde{B} приведены в табл. 1 и на рис. 3.

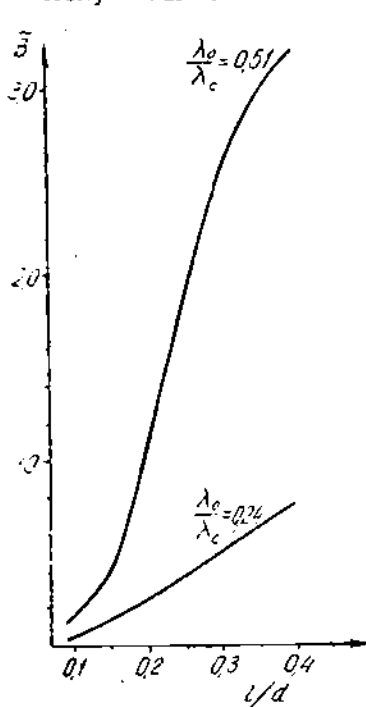


Рис. 3.

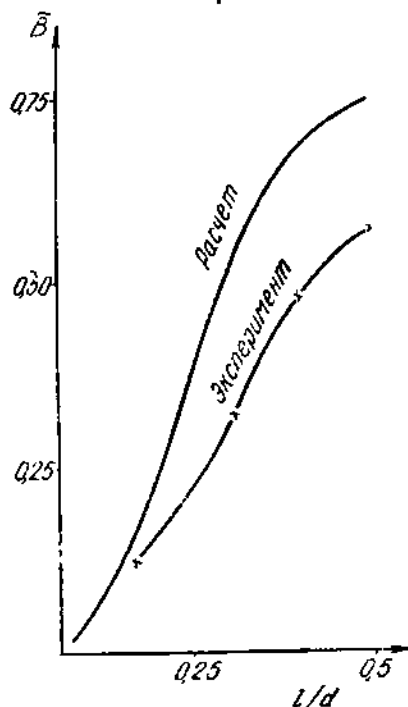


Рис. 4.

Таблица 1

$$\tilde{B} = \tilde{B} \left(\lambda, \frac{l'}{2l} \right)$$

$\frac{l'}{2l}$	0,086	0,170	0,230	0,310	0,400	0,500
$\frac{\lambda_0}{\lambda_c}$						
0,21	0,019	0,161	0,344	0,535	0,747	0,751
0,51	0,106	0,615	1,555	2,450	3,220	—

Исследуемый H -волновод имел размеры: $2l = 35,0$ мм; $2h = 20,0$ мм, $2z = 2,0$ мм, $2a = 21,0$ мм. Измерения осуществлялись на установке, блок-схема которой дана на рис. 5. Каждое измерение производилось 10—12 раз. Полученные результаты приведены в табл. 2 и на рис. 4.



Рис. 5.

Таблица 2

$$\tilde{V} = \bar{V} \left(\frac{l'}{2l} \right)$$

$\frac{l'}{2l}$	0,086	0,170	0,230	0,310	0,400	0,500
$\frac{\lambda_0}{\lambda_c}$	—	0,125	0,200	0,340	0,480	0,570

Расхождение теоретических и экспериментальных результатов можно объяснить, во-первых, малой точностью расчетов (как указывалось, мы учли лишь четыре первые волны), связанной с тем, что расчеты проводились вручную, и, во-вторых, значительными ошибками за счет дополнительных отражений от недостаточно точно изготовленных фланцев волноводов (КСВН в тракте без штыря был порядка 1,10—1,15). Тем не менее из рис. 4 видно хорошее качественное соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

ВЫВОДЫ

1. Для расчета проводимости неоднородностей штыревого типа в *H*- и *P*-волноводах может быть применен вариационный метод.
2. Формулы, полученные для проводимости штыря в *H*- и *P*-волноводе, при стремлении последних к прямоугольным переходят в пределе в формулы Левина.
3. Экспериментальная проверка показала хорошее качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. J. Getsinger, «Ridge Waveguide Field Description and Application to Directional Couplers», IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-10, № 1, January 1962.

2. W. Shelton. «Ridge Waveguide Receiver and Components», Microwave J. v. 5, № 4, 1962.
 3. S. B. Cohn. «Properties of Ridge Waveguide», PIRE, v. 35, N 8, 1947.
 4. Л. Н. Дерюгин. Расчет критической частоты P - и H -волноводов. «Радиотехника», 1948, т. 3, № 6.
 5. Н. Н. Малов. Критические волны волноводов сложных сечений. «Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина», 1954, т. 88, № 67.
 6. В. М. Седых, А. Ф. Зоркин, В. М. Дмитриев, Н. В. Ляпунов, Л. П. Яцук. Параметры H -волноводов в диапазоне миллиметровых и сантиметровых волн. ЖТФ, 1961, т. XXXI, № 6.
 7. А. Ф. Зоркин. Поля в прямых H - и крестообразных волноводах. «Уч. зап. Харьковск. ун-та», т. XXI. Тр. радиофизич. ф-та, 1962, № 6.
 8. Л. Левин. Современная теория волноводов, М., ИЛ, 1954.
 9. Н. В. Ляпунов, Ю. М. Бородавко, А. Е. Зайцев. Индуктивные диафрагмы в H - и P -волноводах. «Радиотехника и электроника», 1964, т. IX, № 7.
-

СОЧЛЕНЕНИЕ H - и ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДОВ

Н. В. Ляпунов, Б. Ф. Заяц

В целом ряде работ [1, 2, 3] описываются свойства H - и P -волноводов, приводятся формулы для расчета критических частот, постоянной затухания, предельной мощности и характеристического сопротивления. Однако в известной нам литературе совершенно не затрагиваются вопросы расчета неоднородностей в H - и P -волноводах. Между тем расчет параметров неоднородностей в таких волноводах имеет немаловажное значение не только для конструирования передающих трактов, но и в ряде смежных вопросов. В частности, в качестве вывода высокочастотных колебаний часто используется отрезок H -волновода, сочлененный с прямоугольным волноводом. Расчет неоднородности подобного вида в литературе отсутствует. В настоящей работе сделана попытка получить расчетные формулы для определения полной проводимости указанного сочленения.

1. Теоретическая часть

При расчете будем предполагать, что H -волновод в плоскости сочленения расположен симметрично (рис. 1), а также что сочленение находится в сечении $z = 0$ и заключено между двумя полубесконечными отрезками регулярных прямоугольного и H -образного волноводов. Предполагаем также, что энергия распространяется из H -волновода в прямоугольный.

Составляющую электрического поля по оси Y в H -волноводе для волны H_{10} , согласно [4], можно записать в виде

$$E_{y0}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi_0^{(i)} \cos [p_n^{(i)} (y - d_i)] \sin [s_{n0}^{(i)} (x - x_i)] e^{-\gamma_0 z} = A_0^{(+)} \omega_{e0}^{(i)} (x, y) e^{-\gamma_0 z}, \quad (1)$$

здесь $\omega_{e0}^{(i)} (x, y)$ — функция координат;

γ_0 — постоянная распространения;

$$\gamma_0^2 = (s_{n0}^{(i)})^2 + (p_n^{(i)})^2; \quad p_n^{(i)} = \frac{n\pi}{h_i} = \frac{n\pi}{b_i - d_i}.$$

Принято без ущерба для общности, что амплитуда падающей на сочленение волны равна единице, т. е. $A_0^{(+)} = 1$. В плоскости сочленения ($z = 0$) установится некоторое распределение электрического поля $E^{(i)} (x, y)$. Вблизи от сочленения при $z < 0$ (в H -волноводе) поле может быть записано как

$$E_y^{(i)} = \omega_{e0}^{(i)} (x, y) [e^{-\gamma_0 z} + R e^{\gamma_0 z}] + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_{ek}^{(i)} (x, y) e^{\gamma_k z}, \quad (2)$$

здесь $\frac{A_0^{(-)}}{A_0^{(+)}} = R$ — коэффициент отражения по напряжению;

$$\gamma_k = \sqrt{x_k^2 - k^2}; \quad x_k^2 = (s_{nk}^{(j)})^2 + p_n^{(j)2}.$$

В прямоугольном волноводе, естественно, поле вблизи сочленения записывается в виде

$$E_y = TV_{10}(x, y) e^{-i\gamma_{10}z} + \sum_m \sum_n A_{mn} V_{mn}(x, y) e^{-\gamma_{mn}z}, \quad (3)$$

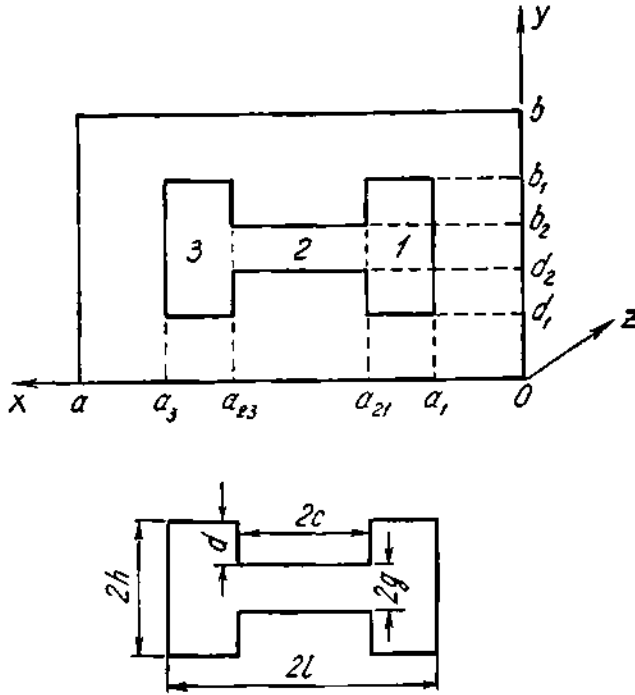


Рис. 1.

где T — коэффициент прохождения по напряжению;

$$\gamma_{mn} = \sqrt{x_{mn}^2 - k^2}; \quad x_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

В плоскости сочленения электрическое поле равно нулю на металлических поверхностях и равно некоторому полю $E^{(j)}(x, y)$ в отверстии.

Что касается магнитных составляющих полей, то они могут быть записаны при $z < 0$ как

$$H_x^{(j)} = \frac{j}{\omega\mu} \left\{ -j\gamma_0 \omega_{e0}^{(j)}(x, y) \left[e^{-i\gamma_0 z} - R e^{i\gamma_0 z} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\gamma_k} \left[(s_{n0}^{(j)})^2 + k^2 \right] \omega_{ek}^{(j)}(x, y) e^{\gamma_k z} \right\}$$

и при $z > 0$ как

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu} \left\{ -j\gamma_{10} TV_{10}(x, y) e^{-i\gamma_{10}z} - \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\gamma_{mn}} (x_k^2 - k^2) V_{mn}(x, y) e^{-\gamma_{mn}z} \right\}. \quad (5)$$

Из (2) и (3) можно получить выражения для A_k и A_{mn} :

$$A_k = \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{ek}^{(i)}(x, y) dS_i}{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{ek}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i}; \quad (6)$$

$$A_{mn} = \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) V_{mn}(x, y) dS_i}{\int_{S_n} [V_{mn}(x, y)]^2 dS}. \quad (7)$$

Если теперь записать уравнение непрерывности магнитных составляющих полей на отверстиях и вместо A_k и A_{mn} подставить выражения (6) и (7), то получим интегральное уравнение для электрического поля $E^{(i)}(x, y)$ в плоскости сочленения и для коэффициента отражения R :

$$\begin{aligned} (1 - R) \gamma_0 \omega_{e0}^{(i)}(x, y) + j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + (s_{nk}^{(i)})^2}{\gamma_k} \omega_{ek}^{(i)}(x, y) \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{ek}^{(i)}(x, y) dS_i}{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{ek}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i} = \\ = \gamma_{10} V_{10}(x, y) \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) V_{10}(x, y) dS_i}{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [V_{10}(x, y)]^2 dS} - \\ - j \sum_m \sum_n \frac{x_m^2 - k^2}{\gamma_{mn}} V_{mn}(x, y) \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) V_{mn}(x, y) dS_i}{\int_{S_n} [V_{mn}(x, y)]^2 dS}. \quad (8) \end{aligned}$$

Это уравнение, в принципе, можно было бы решать непосредственно, однако такое решение весьма затруднительно. Поэтому можно использовать следующий прием. Умножим левую и правую часть (8) на $E^{(i)}(x, y)$ и проинтегрируем по площади сочленения, полученное выражение умножим на

$$1 + R = \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{e0}^{(i)}(x, y) dS_i}{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{e0}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i}. \quad (9)$$

Теперь, если учесть, что

$$\frac{1 - R}{1 + R} = \tilde{G} + j\tilde{B},$$

то мы получим выражение

$$\begin{aligned} \bar{G} + j\bar{B} = \frac{\gamma_{10}}{\gamma_0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{e0}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i \left[\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) V_{10}(x, y) dS_i \right]^2}{\int_{S_n} [V_{10}(x, y)]^2 dS \left[\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{e0}^{(i)}(x, y) dS_i \right]^2} \\ - j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - (s_{nk}^{(l)})^2}{\gamma_0 \gamma_k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{e0}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i \left[\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{ek}^{(i)}(x, y) dS_i \right]^2}{\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\omega_{ek}^{(i)}(x, y)]^2 dS_i \left[\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} E^{(i)}(x, y) \omega_{e0}^{(i)}(x, y) dS_i \right]^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя идею Швингера [5], можно показать, что (10) стационарно относительно малых вариаций поля $E^{(i)}(x, y)$. Стационарность (10) позволяет нам, не решая интегрального уравнения (8), задать поле $E^{(i)}(x, y)$, исходя из физических представлений о характере распределения поля в отверстии сочленения волноводов.

Вообще говоря, поле $E^{(i)}(x, y)$ следовало бы задать в виде

$$E^{(i)}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \omega_{ek}^{(i)}(x, y). \quad (11)$$

Однако, как показали работы ряда авторов [5, 6, 7], даже в том случае, когда в выражении для поля (11) оставлен лишь один член, получается хорошее совпадение теории и эксперимента.

Зададим поэтому поле в отверстии сочленения в виде

$$E^{(i)}(x, y) = C_0 \omega_{e0}^{(i)}(x, y).$$

Если в выражениях $\omega_{ek}^{(i)}(x, y)$ оставить лишь «нулевые» пространственные гармоники и выполнить интегрирование в (10), для активной и реактивной составляющих полной нормированной проводимости получаются выражения:

$$\begin{aligned} \bar{B} = \frac{1}{\gamma_0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{(2U_0 U_k M_k + N_k)^2}{(2U_0^2 K_0 + L_0)(2U_k^2 K_k + L_k)} - \right. \\ \left. - \sum_m \sum_n \frac{x_m^2 - k^2}{\gamma_{mn}} \cdot \frac{4(2U_0 P_{mn} + Q_{mn})^2}{ab(2U_0^2 K_0 + L_0)} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{g}{h} \cdot \frac{\sin [x_k (a_{21} - a_k)]}{\sin x_k a_{21}}; \\ a_k &= a_1 + l - \frac{\pi}{2x_k} (2k - 1); \\ K_k &= h \left(d - \frac{\sin 2x_k d}{2x_k} \right); \\ L_k &= g \left\{ \frac{c}{2} - \frac{\sin 2x_k c \cos [\pi (2k - 1)]}{2x_k} \right\}; \end{aligned}$$

$$M_k = h \left\{ \frac{\sin [f(x_0 - x_k)]}{x_0 - x_k} - \frac{\sin [f(x_0 + x_k)]}{x_0 + x_k} \right\};$$

$$N_k = 2g \left\{ \frac{\sin [c(x_0 - x_k)] \cos [\pi(k-1)]}{x_0 - x_k} - \frac{\sin [c(x_0 + x_k)] \cos \pi k}{x_0 + x_k} \right\};$$

$$P_{mn} = \frac{2b}{\pi c} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi h}{2} \left\{ \frac{\sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 - \frac{m\pi}{a} \right) \right] \cos \left[\frac{x_0 d}{2} - \frac{m\pi}{2a} (a_1 + a_{21}) \right]}{x_0 - \frac{m\pi}{a}} - \frac{\sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 + \frac{m\pi}{a} \right) \right] \cos \left[\frac{x_0 d}{2} + \frac{m\pi}{2a} (a_1 + a_{21}) \right]}{x_0 + \frac{m\pi}{a}} \right\};$$

$$Q_{mn} = \frac{2b}{\pi c} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi g}{2} \left\{ \frac{\sin \left[c \left(x_0 - \frac{m\pi}{a} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi(m+1)}{2} \right]}{x_0 - \frac{m\pi}{a}} - \frac{\sin \left[c \left(x_0 + \frac{m\pi}{a} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi(m+1)}{2} \right]}{x_0 + \frac{m\pi}{a}} \right\};$$

и

$$\tilde{G} = \frac{\gamma_{10}}{\gamma_0} \cdot \frac{2(2U_0 E + F)^2}{ab(2U_0^2 K_0 + L_0)},$$

где

$$E = 2h \left\{ \frac{\cos \left[\frac{x_0 d - \frac{\pi}{a} (a_1 + a_{21})}{2} \right] \sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 + \frac{\pi}{a} \right) \right]}{x_0 - \frac{\pi}{a}} - \frac{\cos \left[\frac{x_0 d + \frac{\pi}{a} (a_1 + a_{21})}{2} \right] \sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 + \frac{\pi}{a} \right) \right]}{x_0 + \frac{\pi}{a}} \right\}$$

и

$$F = 2g \left\{ \frac{\cos \left[\frac{x_0 (d - 2l) + \pi \left(1 - \frac{a_1 + a_{21}}{a} \right)}{2} \right] \sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 - \frac{\pi}{a} \right) \right]}{x_0 - \frac{\pi}{a}} - \frac{\cos \left[\frac{x_0 (d - 2l) + \pi \left(1 + \frac{a_1 + a_{21}}{a} \right)}{2} \right] \sin \left[\frac{d}{2} \left(x_0 + \frac{\pi}{a} \right) \right]}{x_0 + \frac{\pi}{a}} \right\}.$$

По выражению (12) для сочленения прямоугольного волновода с размерами $a = 72$ мм, $b = 34$ мм и H -волновода с размерами $2l = 35$ мм, $2h = 20$ мм, $2c = 17$ мм, $2g = 2$ мм были рассчитаны значения \tilde{B} и \tilde{G} в зависимости от λ_0 . Результаты расчета приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1

$\lambda_0, \text{см}$	5,0	7,0	8,0	9,0	10,0	13,0
\bar{G}	0,098	0,085	0,083	0,081	0,078	0,064
\bar{B}	1,60	0,72	0,24	-0,28	-0,84	-3,04

2. Экспериментальная часть

Для проверки результатов теоретического расчета была собрана установка, блок-схема которой приведена на рис. 3. Здесь 1 — генератор, 2 — фиксированный аттенуатор, 3 — измерительная линия на H -волноводе, 4 — измерительный усилитель, 5 — исследуемое сочленение, 6 — согласованная нагрузка. Обработанные результаты измерений приведены в табл. 2. На рис. 2 пунктиром обозначена экспериментально снятая зависимость реактивной составляющей проводимости \bar{B} от длины волны λ_0 .

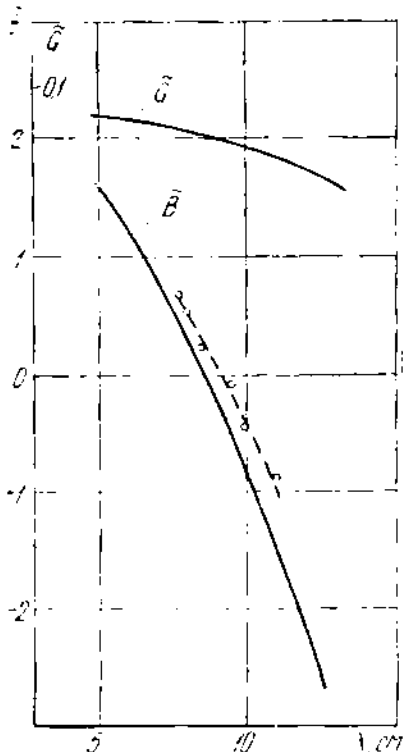


Рис. 2.

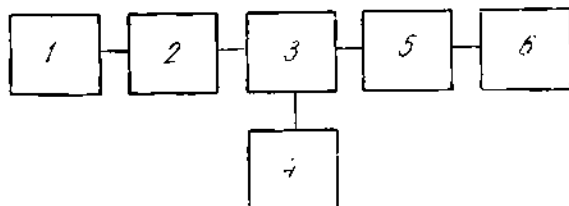


Рис. 3.

Таблица 2

$\lambda_0, \text{см}$	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	11,0
\bar{B}	0,50	0,22	0,03	-0,12	-0,48	-0,90

На основании проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Получены теоретические выражения для определения активной и реактивной составляющих полной нормированной проводимости сочленения прямоугольного и H -волновода.

2. Теоретические и экспериментальные кривые зависимости реактивной составляющей полной проводимости, хорошо совпадают и имеют одинаковый характер поведения.

3. Численные значения реактивной составляющей полной проводимости сочленения, полученные экспериментально, достаточно хорошо совпадают с теоретическими.

4. Данные, полученные в работе, могут быть использованы при конструировании выводов энергии генераторов СВЧ колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Дерюгин. Расчет критической частоты H -и H -волноводов. «Радиотехника», 1948, т. 3, № 6.
 2. В. М. Седых, А. Ф. Зоркин, В. М. Дмитриев, Н. В. Ляпунов, Л. П. Яцук. Параметры H -волноводов в диапазоне миллиметровых и сантиметровых волн. ЖТФ, т. XXXI, № 6, 1961.
 3. S. V. Сопп. PIRE, v. 35, № 8, 1947.
 4. А. Ф. Зоркин. Поля в прямых H - и крестообразных волноводах. «Уч. зап. Харьковск. ун-та», т. СХХI. Тр. радиофизич. ф-та, 1962, № 6.
 5. Л. Левин. Современная теория волноводов, М., ИЛ, 1954.
 6. E. D. Fagter. Proc. IEE, v. 103c, 1956.
 7. В. С. Ильин. Изв. вузов СССР. «Радиофизика», 1958, № 3.
-

К ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ВОЛНОВОДОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

С. С. Третьякова

Задача о возбуждении кольцевого волновода, находящегося в свободном пространстве, электрическим и магнитным диполем решена в работах В. А. Марченко и В. Г. Сологуба [1], [2]. Метод, использованный в этих работах, может быть распространен на случай возбуждения кольцевых волноводов, находящихся в диэлектрической среде. Следуя этому методу, в данной работе рассматривается возбуждение электрическим диполем бесконечно протяженного диэлектрического канала в изотропной диэлектрической среде, на поверхности которого периодически расположены идеально проводящие бесконечно тонкие металлические кольца. Соотношение между периодом структуры, шириной колец, радиусом канала и длиной волны может быть произвольным.

§ 1. Постановка и строгое решение задачи

Рассматриваемый кольцевой волновод представляет собой бесконечный цилиндрический канал радиуса a в изотропной диэлектрической среде с проницаемостью ε , нагруженный бесконечно тонкими идеально проводящими кольцами такого же радиуса. Ширина колец — l — d , период их — l .

Начало цилиндрической системы координат (r, φ, z) помещено в середине щели между двумя произвольными соседними кольцами.

Кольцевой волновод возбуждается неподвижным электрическим диполем, находящимся в начале координат. Момент диполя равен единице и направлен вдоль оси волновода oz . Дипольный момент гармонически изменяется во времени пропорционально $\exp(-i\omega t)$.

Излучение диполя в любой точке пространства характеризуется вектором Герца

$$\vec{\Pi} = \vec{z}_0 \Pi, \quad (1)$$

где \vec{z}_0 — орт оси oz . Π — функция координат и значения диэлектрической проницаемости ε в точке наблюдения, а множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опускается.

Как известно, в свободном пространстве и в однородной диэлектрической среде вектор Герца точечного диполя определяется соответственно следующим образом:

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r \sqrt{k^2 - h_0^2}) e^{ih_0 z} dh_0; \quad (2)$$

$$\Pi_n = \frac{e^{ik\sqrt{\epsilon}R}}{R} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2\epsilon - h_0^2}) e^{ih_0 z} dh_0, \quad (3)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода.

При наличии границы раздела $r = a$ вектор Герца (1) можно представить

$$\Pi = \begin{cases} \Pi_0 - \Pi_1 & r \leq a \\ \Pi_n - \Pi_{1n} & r > a \end{cases} \quad (4)$$

где Π_1 целесообразно искать в виде

$$\Pi_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a) U(r, z, h_0, \epsilon) e^{ih_0 z} dh_0. \quad (5)$$

Здесь и далее пользуемся обозначением

$$\rho_0 = \sqrt{k^2 - h_0^2}, \quad g_0 = \sqrt{k^2 \epsilon - h_0^2}$$

(подразумевается, что $\text{Im } \rho_0, g_0 > 0$).

Неизвестная функция $U(r, z, h_0, \epsilon)$, определяющая решение задачи о возбуждении рассматриваемого периодического волновода, должна удовлетворять следующим требованиям. Во-первых, поскольку Π_1 удовлетворяет волновому уравнению, то и $U(r, z, h_0, \epsilon)$ должна удовлетворять соответствующим волновым уравнениям в первой ($r < a$) и во второй ($r > a$) областях. Во-вторых, в связи с тем, что Π_1 представляет поле, обусловленное периодической границей раздела $r = a$, то $U(r, z, h_0, \epsilon)$ должна быть периодической функцией z с периодом l .

Учитывая эти соображения, искомую функцию можно записать в виде

$$U(r, z, h_0, \epsilon) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_0(\rho_n r) e^{i\frac{2\pi n}{l} z} & (r < a) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_n H_0^{(1)}(g_n r) e^{i\frac{2\pi n}{l} z} & (r > a) \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\rho_n = \sqrt{k^2 - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad g_n = \sqrt{k^2 \epsilon - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{l}\right)^2};$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя. Неизвестные коэффициенты a_n, \tilde{a}_n находятся из подчинения электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \vec{E}_I &= \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi}, & \vec{H}_I &= -ik \text{ rot } \vec{\Pi}, & (r < a) \\ \vec{E}_{II} &= \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \epsilon \vec{\Pi}, & \vec{H}_{II} &= -ik \epsilon \text{ rot } \vec{\Pi} & (r > a) \end{aligned} \quad (7)$$

точным граничным условиям на поверхности раздела $r = a$:

$$\begin{aligned} E_{zI} &= E_{zII} = 0 & (\text{на металле}); \\ E_{zI} &= E_{zII} & H_{\varphi I} &= H_{\varphi II} & (\text{на шелях}). \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство $E_{z1} = E_{z11}$, выполняющееся на всем периоде структуры, обнаруживает следующую связь между α_n и $\tilde{\alpha}_n$:

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 \frac{\rho_0^2}{g_0^2} \frac{J_0(\rho_0 a)}{H_0^{(1)}(g_0 a)} + \frac{1}{\rho_0^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)} - \frac{1}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{\rho_n^2}{g_n^2} \frac{J_0(\rho_n a)}{H_0^{(1)}(g_n a)},$$

а оставшиеся независимые граничные условия приводят к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a) e^{i h_n z} = e^{i h_0 z}; \quad \left(\frac{d}{2} < |z| < \frac{l}{2} \right); \quad (9a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \rho_n \left[\frac{\rho_n \varepsilon}{g_n} J_0(\rho_n a) \frac{H_1^{(1)}(g_n a)}{H_0^{(1)}(g_n a)} - J_1(\rho_n a) \right] e^{i h_n z} =$$

$$= \left[\frac{\varepsilon H_1^{(1)}(g_0 a)}{g_0 H_0^{(1)}(g_0 a)} - \frac{1}{\rho_0} \frac{H_1^{(1)}(\rho_0 a)}{H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \right] e^{i h_0 z}. \quad \left(|z| < \frac{d}{2} \right) \quad (9b)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{2\pi}{l} z, \quad \theta = \frac{\pi d}{l}, \quad \Delta = \frac{l}{2\pi a}, \quad \chi = ka, \quad \frac{h_0 l}{2\pi} = m_0 + \mu,$$

m_0 — ближайшее целое число, $|\mu| < \frac{1}{2}$, $h_n = \frac{2\pi}{l} (m_0 + n + \mu)$,

$$Q_n(\varepsilon) = J_1(\rho_n a) H_0^{(1)}(g_n a) - \frac{\rho_n \varepsilon}{g_n} J_0(\rho_n a) H_1^{(1)}(g_n a),$$

$$a_{n+m_0} = \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a),$$

тогда уравнения (9) преобразуются к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+m_0} e^{i(m_0+n+\mu)\varphi} = e^{i(m_0+\mu)\varphi}; \quad (\theta < |\varphi| < \pi) \quad (10a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+m_0} \frac{Q_n(\varepsilon)}{\rho_n J_0(\rho_n a) H_0^{(1)}(g_n a)} e^{i(m_0+n+\mu)\varphi} = -D'_0 e^{i(m_0+\mu)\varphi}, \quad (|\varphi| < \theta) \quad (10b)$$

где

$$D'_0 = - \frac{g_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) - \rho_0 \varepsilon H_0^{(1)}(\rho_0 a) H_1^{(1)}(g_0 a)}{\rho_0 g_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}.$$

Можно показать, что множитель, входящий в левую часть равенства (10b), представляется в виде

$$\frac{Q_n(\varepsilon)}{\rho_n J_0(\rho_n a) H_0^{(1)}(g_n a)} = \frac{|m_0 + n|}{m_0 + n} \cdot \frac{(1 + \varepsilon) a \Delta}{(m_0 + n + \mu)} (1 - \chi m_0 + n), \quad (11)$$

где χ_k с ростом k убывает как $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Более точная оценка χ_k при $k \rightarrow \infty$ дает выражение

$$|\chi_k| < \frac{\Delta^2}{2(k + \mu)^2} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} x^2 + 2C \right) \left[1 - \frac{1 + \varepsilon}{2} \frac{x^2 \Delta^2}{(k + \mu)^2} \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Учитывая (11), систему уравнений (10) после некоторых преобразований можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - \delta_k^{m_0}) e^{ik\varphi} = 0; \quad (\theta < |\varphi| < \pi) \quad (13a)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - \delta_k^{m_0}) \frac{|k|}{k} e^{ik\varphi} = -\frac{|m_0|}{m_0} B_0 e^{im_0\varphi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{|k|}{k} \gamma_k e^{ik\varphi}; \quad (|\varphi| < \theta) \quad (13b)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{k+\mu} \frac{|k|}{k} = -\Phi_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{k+\mu} \frac{|k|}{k} \gamma_k \quad (13в)$$

где

$$B_0 = 1 + \frac{|m_0|}{m_0} (m_0 + \mu) \Phi_0;$$

$$\Phi_0 = \frac{\varepsilon_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) - \rho_0 \varepsilon H_0^{(1)}(\rho_0 a) H_1^{(1)}(g_0 a)}{(1 - \varepsilon) a \Delta \rho_0 g_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)};$$

$$\delta_k^{m_0} = \begin{cases} 1 & k = m_0 \\ 0 & k \neq m_0 \end{cases}$$

Как показано в работе [1], [2], система уравнений, аналогичная полученной здесь, образует задачу Римана—Гильберта, решением которой является бесконечная система линейных алгебраических уравнений, и может быть приведена к виду

$$(a_0 - \delta_0^{m_0}) \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu}(-u) + P_{\mu-1}(-u)} = \mu \left[-\frac{|m_0|}{m_0} B_0 V^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \gamma_n V^n(u) \right] \quad (14a)$$

$$a_n - \delta_n^{m_0} = -\frac{|m_n|}{m_n} B_0 V_n^{m_0} + (a_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \gamma_n V_n^m \quad (14b)$$

где

$$V_m^n = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)]; \quad (m \neq n)$$

$$V^n(u) = \frac{1}{n+\mu} \left[P_n(u) - \frac{P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu}(-u) + P_{\mu-1}(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)] \right]; \quad (15)$$

$P_n(u)$ — полиномы Лежандра; $P_{\mu}(-u)$ — функции Лежандра; $u = \cos \frac{\pi d}{l}$.

Можно показать, что для получения решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (14) можно воспользоваться методом редукции. Следовательно, система уравнений (14) пригодна для отыскания возбужденного диполем электромагнитного поля с любой степенью точности.

§ 2. Приближенное решение основных уравнений

Система уравнений (14) аналогична системе уравнений работы [2]. Поэтому можно воспользоваться некоторыми результатами этой работы для получения приближенного решения задачи в длинноволновом приближении, а именно, в интервале $2\kappa\Delta \sqrt{\varepsilon} < 1$.

Следуя [2], получим

$$a_0 - \delta_0^{m_0} = -\mu \times$$

$$\frac{(1 - \gamma_{m_0}) B_0 \frac{|m_0|}{m_0} V^{m_0}(u) - \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \gamma_n V^n(u) \left[\theta_n^{m_0}(u) - \frac{|m_0|}{m_0} B_0 W_n^{m_0}(u) \right]}{\frac{P_{-\mu}(-u) - P_{\mu}(-u)}{P_{-\mu}(-u) + P_{\mu}(-u)} + 1 - \gamma_0 - \mu \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \gamma_n V^n(u) [(n - \mu) V^n(u) + \theta_n(u)]}, \quad (16)$$

где

$$|\theta_m(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} |(m + \mu) V^m(u)| < 3 \sqrt{2\pi} \sqrt{1+u} \frac{q}{1-q};$$

$$|\theta_m^{m_0}(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} \left| \delta_m^{m_0} - \frac{|m_0|}{m_0} B_0 W_m^{m_0}(u) \right| < C_1 [1 + B_0 \ln(|m_0| + 1)] \frac{q}{1-q}$$

и

$$q = \max_{m, n} \sum | \gamma_n W_m^n(u) |;$$

$$q < C_2 \frac{\Delta^2 \left(\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon} x^2 + 1 \right) \sqrt{1-u}}{|1 - 2(\varepsilon + 1) x^2 \Delta^2|^{3/2}};$$

C_1, C_2 — константы, не зависящие от параметров задачи. Согласно введенным ранее соотношениям,

$$\alpha_n = \frac{a_n + m_0}{\rho_n^2 J_0(\rho_n a)}.$$

Подставив это выражение в (6), получим:

$$U(r, z, h_0, \varepsilon) e^{i h_0 z} =$$

$$\left[\begin{aligned} & a_0 \frac{J_0(\rho_{-m_0} r)}{\rho_{-m_0}^2 J_0(\rho_{-m_0} a)} e^{i \frac{2\pi}{l} \mu z} + \sum_{m \neq 0} \frac{a_m}{\rho_{m-m_0}^2} \frac{J_0(\rho_{m-m_0} r)}{J_0(\rho_{m-m_0} a)} e^{i \frac{2\pi}{l} (m+\mu) z} \quad (r < a) \\ & a_0 \frac{H_0^{(1)}(g_{-m_0} r)}{g_{-m_0}^2 H_0^{(1)}(g_{-m_0} a)} e^{i \frac{2\pi}{l} \mu z} + \sum_{m \neq 0} \frac{a_m}{g_{m-m_0}^2} \frac{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} r)}{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} a)} e^{i \frac{2\pi}{l} (m+\mu) z} - \\ & - \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)} e^{i \frac{2\pi}{l} \mu z} + \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{\rho_0^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)} e^{i \frac{2\pi}{l} \mu z} \quad (r > a) \end{aligned} \right] \quad (17)$$

В интервале $2x\Delta\sqrt{\varepsilon} < l$ величины $\rho_{m-m_0} a$ и $g_{m-m_0} a$ ($m \neq 0$) принимают чисто мнимые значения, причем для внутренней и внешней области справедливы оценки

$$\frac{J_0(\rho_{m-m_0} r)}{J_0(\rho_{m-m_0} a)} < C_3 e^{-\frac{\sqrt{|1-3x^2\Delta^2}}{\Delta} \left(|m| - \frac{1}{2} \right) \theta}; \quad (r \leq a(1 - \theta'))$$

$$\frac{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} r)}{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} a)} < C_3 e^{-\frac{\sqrt{|1-(x^2\Delta^2\varepsilon)}}{\Delta} \left(|m| - \frac{1}{2} \right) \theta}. \quad (r \geq a(1 + \theta')) \quad (18)$$

Тогда $U(r, z, h_0, \varepsilon)$ принимает следующий вид:

$$U(r, z, h_0, \varepsilon) e^{ih_0 z} = \begin{cases} a_0 \frac{J_0(\rho_{-m_0} r)}{\rho_{-m_0}^2 J_0(\rho_{-m_0} a)} e^{\frac{i2\pi}{l} \mu z} + \tilde{U}_1(r, z, h_0, \varepsilon) & (r < a) \\ \left[a_0 \frac{H_0^{(1)}(g_{-m_0} r)}{g_{-m_0}^2 H_0^{(1)}(g_{-m_0} a)} - \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)} + \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{\rho_0^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \right] e^{\frac{i2\pi}{l} \mu z} + \\ + \tilde{U}_2(r, z, h_0, \varepsilon), & (r > a) \end{cases} \quad (19)$$

где

$$|\tilde{U}_1(r, z, h_0, \varepsilon)| < C_4 \Delta^2 \frac{\ln(1 + |m_0 + \mu|)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{1 - 4x^2 \Delta^2}}{\Delta} \nu r},$$

$$|\tilde{U}_2(r, z, h_0, \varepsilon)| < C_5 \Delta^2 \frac{\ln(1 + |m_0 + \mu|)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{1 - 4x^2 \Delta^2}}{\Delta} \nu r}, \quad (20)$$

а a_0 определяется формулой (16).

Если теперь выражения (19) подставить в (4), то получим приближенное значение вектора Герца в длинноволновом приближении, при этом оно будет, очевидно, тем точнее, чем меньше величина $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$, т. е. чем гуще расположены кольца при постоянном радиусе канала.

Рассмотрим предельный случай, когда $\Delta \rightarrow 0$. В этом случае a_0 ведет себя при $m_0 \neq 0$, как $a_0 = \Delta \cdot O(1)$, и при $m_0 = 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} a_0 = \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}, \quad (21)$$

где

$$Q = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \ln \frac{1 - a}{2}. \quad (22)$$

Переходя к пределу в выражении Π_1 при $\Delta \rightarrow 0$ и учитывая (21) и (20), получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1 = \begin{cases} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\rho_0 r) \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} H_0^{(1)}(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon) \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \cdot \rho_0 a} e^{ih_0 |z|} dh_0 & (r < a) \\ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_0^2 H_0^{(1)}(g_0 r)}{g_0^2} \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} e^{ih_0 |z|} dh_0 & (r > a) \end{cases} \quad (23)$$

Запишем полученные интегралы в несколько ином виде. Подынтегральная функция зависит от аргументов $\rho_0 a$ и $g_0 a$, которые являются двузначными функциями и имеют точки ветвления. Тогда интегрирование по отрезку $(-R, R)$ при $R \rightarrow \infty$ можно заменить интегрированием по полуокружности радиуса R с петлями γ_1 и γ_2 , охватывающими разрезы в верхней полуплоскости комплексного переменного h_0 вдоль линий $k = \text{const}$ и $k\sqrt{\varepsilon} = \text{const}$, и учесть при этом сумму вычетов относительно полюсов, попадающих в область интегрирования.

Производя некоторые преобразования и учитывая изменение подынтегральной функции при переходе через разрезы, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1 = & 2\pi i \sum_{k+i0}^{k+i\infty} \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho_0 r) \times \\ & \times \left\{ -1 + \frac{1}{\left[1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \right]^{(l)}} \right\} e^{ih_0 |z|} dh_0 + \\ & + \frac{i}{2} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} J_0(\rho_0 r) \frac{(1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} H_0^{(1)}(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \Big|_{(r, \pi)}^{(l, \pi)} e^{ih_0 |z|} dh_0}{\left[1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \right]^{(l, \pi)} \left[1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \times \right.} \\ & \left. \times \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \right]^{(n)}}; \quad (r < a) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1 = & 2\pi i \sum_{k+i0}^{k+i\infty} \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} H_0^{(1)}(g_0 r) \frac{\rho_0^2}{g_0} \times \\ & \times \frac{(1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) J_0(\rho_0 a)}{\left[1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \right]} e^{ih_0 |z|} dh_0 + \\ & + i \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left\{ -J_0(g_0 r) - \frac{1}{2} \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{\left[1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \right]^{(n)}} \right\} + \\ & + \left[\frac{(1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 r)}{1 + (1+\varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} \right]^{(n)} \frac{\rho_0^2}{g_0} e^{ih_0 |z|} dh_0; \quad (r > a), \end{aligned} \quad (25)$$

$f^{(n)}$ и $f^{(l)}$ означают значения функции на правом и левом берегах разреза; $f_{(n)}^{(l)} = f^{(n)} - f^{(l)}$.

Для вычисления суммы вычетов необходимо учесть полюса подынтегральной функции в (23). Они определяются как корни уравнения:

$$\frac{(1+\varepsilon) Q J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a) \cdot \rho_0 a}{-\frac{\rho_0^2}{g_0} J_0(\rho_0 a) H_1^{(1)}(g_0 a) + J_1(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} + 1 = 0. \quad (26)$$

Отметим, что (26) есть дисперсионное уравнение рассматриваемого волновода (в длинноволновом приближении), набор корней этого уравнения даст совокупность собственных значений постоянной распространения электромагнитных волн в рассматриваемой структуре.

Определяя вычеты функций по соответствующим формулам и обозначая их через A_ν^+ и A_ν^- для ν корня уравнения (26), получим:

$$2\pi i \sum \text{Res} = - \sum_\nu A_\nu^+ J_0(r \sqrt{k^2 - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu} |z|}; \quad (r < a)$$

$$2\pi i \sum \text{Res} = - \sum_\nu A_\nu^- H_0^{(1)}(r \sqrt{k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu} |z|}; \quad (r > a) \quad (27)$$

при этом из выражений для вычетов следует связь

$$A_{\nu}^{-} J_0(a \sqrt{k^2 - h_{0\nu}^2}) \frac{(k^2 - h_{0\nu}^2)}{(k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2)} = A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2}).$$

Так как $\Pi = \begin{cases} \Pi_0 - \Pi_1 & (r < a) \\ \Pi_2 - \Pi_1 & (r > a) \end{cases}$ и Π_0 , Π_2 можно представить в виде

$$\Pi_0 = -i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(r \sqrt{k^2 - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu}|z|} dh_{0\nu};$$

$$\Pi_2 = -i \int_{k+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(r \sqrt{k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu}|z|} dh_{0\nu},$$

то окончательное выражение для вектора Герца электромагнитного поля, возбуждаемого электрическим диполем, запишется так:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi &= \sum_{\nu} A_{\nu}^{+} J_0(r \sqrt{k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu}|z|} - i \times \\ &\times \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(\rho_0 r) e^{ih_{0\nu}|z|} dh_{0\nu}}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} - \frac{i}{2} \int_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(\rho_0 r) \times \\ &\times \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} H_0^{(1)}(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} \Big|_{(n)}^{(m)} e^{ih_{0\nu}|z|} dh_{0\nu}; \quad (r < a) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi &= \sum_{\nu} A_{\nu}^{-} H_0^{(1)}(r \sqrt{k^2 \varepsilon - h_{0\nu}^2}) e^{ih_{0\nu}|z|} - i \int_{k+i0}^{k+i\infty} H_0^{(1)}(g_0 r) \frac{\rho_0^2}{g_0^2} \times \\ &\times \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) J_0(\rho_0 a) e^{ih_{0\nu}|z|}}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} \cdot \\ &+ \frac{i}{2} \int_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} \left\{ \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} \Big|_{(n)}^{(m)} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 r)}{1 + (1 + \varepsilon) \rho_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} + \frac{\rho_0^2 - g_0^2}{\rho_0^2} J_0(g_0 r) \right\} \frac{\rho_0^2}{g_0^2} e^{ih_{0\nu}|z|} dh_{0\nu}. \quad (r > a) \end{aligned} \quad (29)$$

При $\varepsilon = 1$ выражения (28), (29) переходят в соответствующие выражения работы [2].

Для исследования вопроса о характере зависимости поля от координаты z необходимо рассмотреть поведение корней уравнения (26), т. е. исследовать дисперсионное уравнение системы.

§ 3. Возбуждение сплошного металлического волновода и цилиндрической полости в диэлектрике

В качестве предельных можно рассмотреть случаи, когда $u = 1$ ($d = 0$), т. е. случай сплошного волновода, и когда $u = -1$ ($d = l$), т. е. случай цилиндрического канала в диэлектрической среде.

Задачи о возбуждении сплошного волновода и диэлектрического канала можно было бы решить, если перейти к соответствующим пределам в выражениях для вектора Герца (28), (29). Однако ввиду сложности этих выражений такие переходы не очевидны. Обе задачи можно решить самостоятельно, используя прежний метод.

1. Если электрический диполь находится на оси сплошного волновода, то вектор Герца возбуждаемого электромагнитного поля определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_0 - \Pi_1 = & \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - h^2}) e^{ihz} dh - \\ & - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - h^2) H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - h^2}) U(r, z, h) e^{ihz} dh. \end{aligned} \quad (30)$$

Функция $U(r, z, h)$ должна удовлетворять волновому уравнению и граничным условиям на поверхности волновода. Выбирая ее соответствующим образом, получим

$$\Pi = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - h^2}) - \frac{H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - h^2})}{J_0(a\sqrt{k^2 - h^2})} J_0(r\sqrt{k^2 - h^2}) \right\} e^{ihz} dh. \quad (31)$$

Преобразовывая интеграл по отрезку $(-R, R)$, выражение (31) можно привести к виду

$$\Pi = -i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(pr) e^{ih|z|} dh - 2\pi i \sum \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(pr) e^{ih|z|} dh. \quad (32)$$

Вычеты берутся по всем полюсам функции

$$\frac{H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - h^2})}{J_0(a\sqrt{k^2 - h^2})} J_0(r\sqrt{k^2 - h^2}) e^{ih|z|}.$$

Если через h_1, h_2, \dots, h_v обозначить корни $J_0(a\sqrt{k^2 - h^2})$, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного h , то вычеты определяются так:

$$2\pi i \sum \text{Res} = - \sum_v A_v J_0(r\sqrt{k^2 - h_v^2}) e^{ih_v|z|}, \quad (33)$$

где

$$A_v = \frac{1}{2\pi i} \frac{H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - h_v^2})}{J_1(a\sqrt{k^2 - h_v^2})}.$$

Уравнение $J_0(a\sqrt{k^2 - h^2}) = 0$ является дисперсионным уравнением для сплошного волновода, а h_1, h_2, \dots, h_v — набор собственных значений постоянной распространения в волноводе. Окончательное выражение для вектора Герца имеет вид

$$\Pi = \sum_v A_v J_0(r\sqrt{k^2 - h_v^2}) e^{ih_v|z|}, \quad (34)$$

что совпадает с известными в литературе решениями.

Таким образом, в отличие от кольцевого волновода электромагнитное поле в сплошном волноводе имеет только экспоненциальную зависимость от z .

2. Если кольцевой волновод отсутствует, то находящийся на оси бесконечного канала в изотропном диэлектрике электрический диполь, ориентированный вдоль oz , возбуждает электромагнитное поле, вектор Герца (1) для которого имеет вид (4'), где

$$\Pi_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A \rho^2 H_0^{(1)}(\rho a) J_0(\rho r) e^{ihz} dh; \quad (r < a) \quad (35a)$$

$$\Pi_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B \rho^2 H_0^{(1)}(\rho a) H_0^{(1)}(gr) e^{ihz} dh. \quad (r > a) \quad (35b)$$

Здесь $\rho = \sqrt{k^2 - h^2}$; $g = \sqrt{k^2 \epsilon - h^2}$; Π_n , Π_d такие же, как и (2), (3). Коэффициенты A , B находятся из подчинения поля соответствующим граничным условиям. После вычисления A , B величины Π_1 запишутся следующим образом:

$$\Pi_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\rho r) \frac{g H_0^{(1)}(ga) H_1^{(1)}(\rho a) - \rho \epsilon H_0^{(1)}(\rho a) H_1^{(1)}(ga)}{g J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) - \rho \epsilon J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga)} e^{ihz} dh; \quad (r < a) \quad (36a)$$

$$\Pi_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(gr) \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi g a} \frac{1}{[\rho \epsilon J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) - g J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga)]} \right\} e^{ihz} dh. \quad (r > a) \quad (36b)$$

Легко видеть, что при $\epsilon = 1$ величины $\Pi_1 = 0$, и излучение диполя характеризуется только вектором Герца Π_0 для свободного пространства.

После некоторых преобразований (36) величины Π_1 для канала в диэлектрике приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Pi_1 = 2\pi i \sum \text{Res} -i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho r) e^{ihz} dh - i \int_{k\sqrt{\epsilon}+i0}^{k\sqrt{\epsilon}+i\infty} J_0(\rho r) \times \\ \times \frac{4\epsilon}{\pi^2 g^2 a^2} \cdot e^{ih|z|} dh \\ \times \left[-\frac{\rho \epsilon}{g} J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) \right]^{(n)} \left[-\frac{\rho \epsilon}{g} J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) \right]^{(m)}, \end{aligned} \quad (r < a) \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = 2\pi i \sum' \text{Res} -\frac{i}{2} \int_{k\sqrt{\epsilon}+i0}^{k\sqrt{\epsilon}+i\infty} \left\{ -2J_0(\rho r) - \right. \\ \left. -\frac{2i}{\pi g^2 a^2} \left[-\frac{\rho \epsilon}{g} J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) \right]^{(n)} \right\} e^{ihz} dh \quad (r > a) \quad (37b) \end{aligned}$$

где вычеты берутся по всем полюсам подынтегральных функций в выражениях (36). Если через h'_1, h'_2, \dots, h'_n опять обозначить корни функ-

ции $p\epsilon J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) - gJ_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga)$, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного h , то вычеты определяются как

$$2\pi i \sum \text{Res} = -\sum_j B_j^+ J_0(r \sqrt{k^2 - h_j^2}) e^{ih_j |z|}; \quad (38a)$$

$$2\pi i \sum' \text{Res} = -\sum_j B_j^- H_0^{(1)}(r \sqrt{k^2 \epsilon - h_j^2}) e^{ih_j |z|}. \quad (38b)$$

Уравнение

$$p\epsilon J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) - gJ_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) = 0 \quad (39)$$

является дисперсионным уравнением для канала в диэлектрической среде.

Окончательное выражение для вектора Герца

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_j B_j^+ J_0(r \sqrt{k^2 - h_j^2}) e^{ih_j |z|} + i \int_{k\sqrt{\epsilon} + i0}^{k\sqrt{\epsilon} + i\infty} J_0(\rho r) \times \\ & \times \frac{4\epsilon}{\pi^2 g^2 a^2} e^{ih |z|} dh \\ & \times \left[-\frac{p\epsilon}{g} J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) \right]^{(n)} \left[-\frac{p\epsilon}{g} J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + J_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga) \right]^{(n)}; \\ & (r < a) \quad (40a) \\ \Pi = & \sum_j B_j^- H_0^{(1)}(r \sqrt{k^2 \epsilon - h_j^2}) e^{ih_j |z|} + \\ & + \frac{i}{2} \int_{k\sqrt{\epsilon} + i0}^{k\sqrt{\epsilon} + i\infty} \frac{2i}{\pi \cdot ga} \cdot \frac{H_0^{(1)}(gr)}{-p\epsilon J_0(\rho a) H_1^{(1)}(ga) + gJ_1(\rho a) H_0^{(1)}(ga)} \Big|_{(n)} e^{ih |z|} dh, \quad (r > a) \quad (40b) \end{aligned}$$

Таким образом, при распространении электромагнитных волн в цилиндрическом канале в диэлектрической среде поле имеет зависимость от z как экспоненциальную, так и алгебраическую. Пределы, в которых преобладает та или иная зависимость, могут быть определены после исследования дисперсионного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. Первая летняя математическая школа, ч. 1, изд-во «Наукова думка», 1963.
2. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. «Раднотехника», 1965, № 1.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

В. А. Барегамян

Рассмотрим задачу о распространении установившихся электромагнитных колебаний в кольцевом волноводе, внутренняя область которого заполнена анизотропной диэлектрической средой. Радиус металлических колец волновода равен a , расстояние между соседними кольцами d (ширина щели), период структуры l .

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы ось oz совпала с общей осью всех колец, а начала координат поместим в середине щели.

Анизотропным диэлектриком является одноосный кристалл, ось которого направлена по оси oz . Компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют следующие значения: $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_0$, $\epsilon_{zz} = \epsilon_e$, а остальные компоненты равны нулю.

Отыскание решения такой задачи сводится к решению однородных уравнений Максвелла, которые внутри волновода дают следующие волновые уравнения для симметричных ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$) электрических и магнитных волн:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \left(\epsilon_e k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_\varphi = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \left(\epsilon_0 k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) E_\varphi = 0. \quad (2)$$

Как видно из (1), (2), в кольцевом волноводе с анизотропной средой возможно разделение волн на E и H типы. Остальные компоненты для симметричных волн определяются из уравнений Максвелла.

Решение симметричных волн можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{H}(r, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_{1n}(r) e^{ih_n z}; \\ \vec{E}(r, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{1n}(r) e^{ih_n z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}$, а временной множитель здесь и далее опущен.

Подставляя (3) в (1) и (2), получим для амплитуд Фурье компонент полей следующие уравнения:

$$\frac{d^2 H_{1\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_{1\varphi}}{dr} + \left(\epsilon_e k_0^2 - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} h_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_{1\varphi} = 0 \quad (4)$$

и

$$\frac{d^2 H_{1\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_{1\varphi}}{dr} + \left(\varepsilon_0 k_0^2 - h_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) E_{1\varphi} = 0.$$

Обозначим

$$g_{n0} = \sqrt{\varepsilon_0 k_0^2 - h_n^2} \tag{5}$$

$$g_{ne} = \sqrt{\varepsilon_n k_0^2 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} h_n^2}.$$

Решения (4) и (5) запишем в виде

$$H_{1\varphi} = B_n J_1(g_{ne} r); \tag{7}$$

$$E_{1\varphi} = A_n J_1(g_{n0} r). \tag{8}$$

Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла соответственно для E - и H -волн.

$$\begin{cases} E_{1r} = \frac{h_n}{\varepsilon_0 k_0} B_n J_1(g_{ne} r) \\ E_{1z} = \frac{i}{k_{nz} \varepsilon} g_{ne} B_n J_0(g_{ne} r), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} H_{1r} = -\frac{h_n}{k_0} A_n J_1(g_{n0} r) \\ H_{1z} = -\frac{i \varepsilon_{n0}}{k_0} A_n J_0(g_{n0} r). \end{cases} \tag{10}$$

Вне волновода решение можно получить, заменяя функции Бесселя функциями Ханкеля первого рода. Они имеют вид

$$\begin{cases} H_{\varphi 11} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_1^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z} \\ E_{r 11} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h_n}{k_0} D_n H_1^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} E_{z 11} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_n}{k_0} D_n H_0^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z}, \\ E_{\varphi 11} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_1^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z} \\ H_{r 11} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h_n}{k_0} C_n H_1^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z} \\ H_{z 11} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_n}{k_0} C_n H_0^{(1)}(g_n r) e^{i h_n z}. \end{cases} \tag{12}$$

Формулы (7—12) описывают распространяющиеся волны без затухания в данной системе, если аргументы функции действительные, т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 k_0^2 - h_n^2 > 0; \\ \varepsilon_n k_0^2 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} h_n^2 > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда получим условие незатухания волн в волноводе

$$v_{\Phi n} > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{14}$$

где $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$ является скоростью распространения основной волны в данной среде в поперечной плоскости, $v_{\phi n}$ — фазовая скорость n -ой пространственной гармоники, а $v_{\phi 0}$ — нулевой; при этом

$$v_{\phi n} = \frac{v_{\phi 0}}{1 + \frac{n}{\chi c} v_{\phi 0}}. \quad (15)$$

В длинноволновом приближении можно определить $v_{\phi 0}$ из дисперсионного уравнения, которое будет зависеть от свойства среды и геометрии волновода. В общем случае в дисперсионное уравнение входят фазовые скорости всех n гармоник. Поэтому $v_{\phi 0}$ будет зависеть и от скоростей остальных гармоник.

Как видно из формулы (15), фазовая скорость n -ой пространственной положительной гармоники всегда меньше, чем фазовая скорость нулевой гармоники. Для отрицательных гармоник при выполнении условия $v_{\phi n} > \frac{\chi c}{|n|}$ возможно распространение в обратную сторону. Ясно, что

это имеет место при больших номерах гармоник.

Рассматриваемая система будет замедляющей, если аргументы J_0 , J_1 , $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ являются мнимыми. Это имеет место, если

$$\begin{aligned} \epsilon_0 k_0^2 - h_n^2 &< 0; \\ \epsilon_s k_0^2 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} h_n^2 &< 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда получим условие, когда система будет замедляющей:

$$v_{\phi n} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}. \quad (17)$$

Полученные поля (7—12,3) должны удовлетворять граничным условиям при $z = a$, т. е. обеспечить равенство нулю тангенциальных составляющих вектора \vec{E} и непрерывность r — составляющей вектора \vec{H} на металлических цилиндрах, а также непрерывность всего поля между цилиндрами.

Таким образом, получим системы уравнений для волны типа E и типа H соответственно:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{n0} B_n J_0(g_{n0} a) e^{ihnz} = 0 \quad (\text{на кольцах}) \\ &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_s g_n J_1(g_n a) H_0^{(1)}(g_n a) - g_{n0} J_0(g_{n0} a) H_1^{(1)}(g_n a)}{\epsilon_s g_n H_0^{(1)}(g_n a)} B_n e^{ihnz} = 0; \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_1(g_{n0} a) e^{ihnz} = 0 \quad (\text{на кольцах}) \\ &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n0} J_0(g_{n0} a) H_1^{(1)}(g_n a) - g_n J_1(g_n a) H_0^{(1)}(g_n a)}{H_1^{(1)}(g_n a)} A_n e^{ihnz} = 0, \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

где учитывается, что

$$C_n = \frac{J_1(g_{n0}a)}{H_1^{(1)}(g_{n0}a)} A_n; \quad D_n = \frac{g_{ne}}{\epsilon_e g_{ne}} \cdot \frac{J_0(g_{ne}a)}{H_1^{(1)}(g_{n0}a)} B_n. \quad (20)$$

Продифференцируем второе уравнение системы (18) и первое уравнение системы (19) по z и введем следующие обозначения:

$$\nu = \frac{h_0 a}{2\pi}; \quad \kappa = \frac{k_0 a}{2\pi}; \quad \mu = \frac{\kappa}{\nu} = \frac{v_{\phi 0}}{c}; \quad x_n = (\nu + n) J_1(g_{n0}a) A_n;$$

$$y_n = (\nu + n) \frac{\epsilon_e g_n J_1(g_{ne}a) H_n^A(g_{n0}a) - g_{ne} J_0(g_{ne}a) H_1^{(1)}(g_{n0}a)}{\epsilon_e g_n H_0^{(1)}(g_{n0}a)} B_n;$$

$$\xi_n^E = \frac{|\nu + n| \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_e} + 1}{\nu + n} \frac{\epsilon_e g_n J_0(g_{ne}a) H_0^{(1)}(g_{n0}a) \sqrt{\frac{\epsilon_e \kappa^2}{(\nu + n)^2} - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}}}{g_{ne} J_0(g_{ne}a) H_1^{(1)}(g_{n0}a) - \epsilon_e g_n J_1(g_{ne}a) H_0^{(1)}(g_{n0}a)};$$

$$\xi_n^H = \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \frac{H_0^{(1)}(g_{n0}a) J_1(g_{n0}a) \sqrt{\frac{\kappa^2}{(\nu + n)^2} - 1} - J_0(g_{n0}a) H_1^{(1)}(g_{n0}a) \sqrt{\frac{\epsilon_0 \kappa^2}{(\nu + n)^2} - 1}}{2H_1^{(1)}(g_{n0}a) J_1(g_{n0}a)};$$

$$\chi_n^E = 1 + \frac{|n|}{n} \xi_n^E; \quad \chi_n^H = 1 + \frac{|n|}{n} \xi_n^H.$$

Тогда системы (18) и (19) примут вид

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} y_n e^{ihnz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E y_n e^{ihnz} \quad (\text{на кольцах}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{ihnz} &= 0 \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

и

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{ihnz} &= 0; \quad (\text{на кольцах}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} x_n e^{ihnz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H x_n e^{ihnz}. \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right. \quad (23)$$

С дополнительными условиями соответственно

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m}{\nu + m} = 0; \quad (24)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{x_m}{\nu + m} = 0. \quad (25)$$

Системы (22) и (23) образуют задачу Римана—Гильберта [2]. Решение этих систем с учетом (24), (25) запишем в виде

$$R_\nu y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} [R_\nu V_m^n - R_n V_\nu^n] \chi_n^E y_n; \quad (26)$$

$$m = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \quad \dots$$

$$R_\nu x_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} [R_\nu V_m^n - R_n V_\nu^n] \chi_n^H x_n. \quad (27)$$

$$m = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \quad \dots$$

Здесь коэффициенты R_m , V_m^n , R_σ и V_σ^n в системе (26) зависят от аргумента $\sigma = \cos \frac{\pi(l-d)}{l}$, а в системе (27) — от $u = \cos \frac{\pi d}{l}$. Значения этих коэффициентов определяются следующими формулами:

$$R_m(u) = \frac{1}{2} P_m(u), \quad V_m^n = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)];$$

$$V_m^n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \mu_{n+1-j}(u) P_{m-j}(u) & n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-j}(u) P_{j+m+1}(u) & n < -1 \\ \frac{1}{2} [P_m(u) - P_{m+1}(u)], & n = -1 \end{cases} \quad (28) \quad m \neq n$$

где

$$\mu_0(u) = 1; \quad \mu_1(u) = -u; \quad \mu_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u); \quad (n > 2)$$

$$R_\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{R_m}{m+\nu} = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} P_{\nu-1}(u);$$

$$V_\sigma^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{V_m^n}{\nu+m} = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \frac{\nu-1}{n+\nu} [P_{\nu-1}(u) P_{n+1}(u) - P_{\nu-2}(u) P_n(u)],$$

где $P_m(u)$, $P_\nu(u)$ — полиномы и функции Лежандра. Как видно из систем (26) и (27), они являются однородными и имеют нетривиальное решение только тогда, когда определители систем равны нулю. Одновременное выполнение этих условий является условием существования в кристалле одновременно симметричных электрических и магнитных волн.

Равенства нулю определителей систем (26), (27) являются дисперсионными уравнениями симметричных электрических и магнитных волн отдельно.

При выполнении условия замедления волн (17) в волноводе в полученных формулах функции Бесселя J_0 и J_1 соответственно нужно заменить на модифицированные функции Бесселя I_0 и I_1 первого рода, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ — на функции Макдональда K_0 и K_1 .

Ясно, что аргументами I_0 и I_1 являются $g_n^i r$ и $g_n^e r$, а K_0 и K_1 — $g_n^i r$. Эти аргументы определяются по формулам

$$g_{ne} = i g_n^e; \quad g_{n0} = i g_n^0; \quad g_n = i g_n^i. \quad (29)$$

В длинноволновом приближении, если предположить, что $\chi_n^E = \chi_n^H = 0$ при $n=0$, получим для симметричных электрических волн дисперсионное уравнение в виде

$$J_0(g_{0e} a) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_e + 1}} \frac{\epsilon_{ue} J_0(g_{ue} a) H_1^{(1)}(g_{0a}) - \epsilon_e \epsilon_0 J_1(g_{0e} a)}{g_0 H_0^{(1)}(g_{0a}) \sqrt{\epsilon_e \mu^2 - \epsilon_e}} \cdot H_0(g_{0a}) \times$$

$$\times \frac{R_\sigma - R_\sigma V_0^0 + R_0 V_\sigma^0}{R_1 I_0^0 - R_0 I_\sigma^0}, \quad (30)$$

а для симметричных магнитных волн имеем

$$J_0(g_{00}a) = \frac{H_0^{(1)}(g_0a) J_1(g_{00}a) \sqrt{\mu^2 - 1} - J_0(g_{00}a) H_1^{(1)}(g_0a) \sqrt{\epsilon_0 \mu^2 - 1}}{2H_1^{(1)}(g_0a)} \times \\ \times \frac{R_3 V_0^0 - R_0 V_3^0}{R_3 - R_3 V_0^0 + R_0 V_3^0}. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) при малых x ($x \ll 1$) переходят в формулы (36) работы [1], когда $\epsilon_0 = \epsilon_s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович и В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXIV, II, 1964.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXII, 4, 1962.

РАСЧЕТ ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ H_{01} -ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНОЙ КОЛЕЦ

С. А. Масалов

1. Введение. Эквивалентные граничные условия

В работах [1, 2] подробно исследована задача о распространении электромагнитных волн в кольцевом волноводе, образованном бесконечно тонкими и идеально проводящими кольцами. В [3] получены дисперсионные уравнения для волновода, состоящего из колец с бесконечно большим внешним радиусом, причем дисперсионные уравнения решаются методом малых возмущений. Представляет также интерес рассмотреть задачу о распространении H_{01} -волны в волноводе, состоящем из колец прямоугольного поперечного сечения.

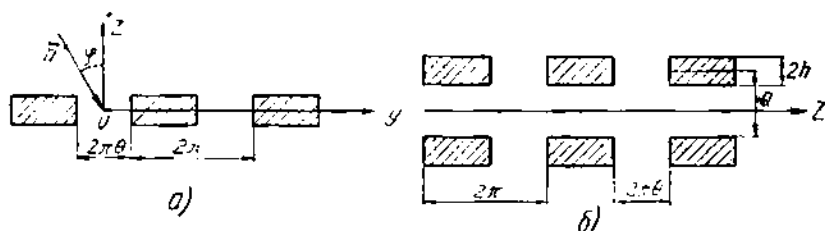


Рис. 1. Периодическая структура:
а) решетка. б) кольцевой волновод

Вывод дисперсионного уравнения будет проведен на основе эквивалентных граничных условий. В [4] получено решение задачи о дифракции E -поляризованной нормально падающей плоской электромагнитной волны на идеально проводящей решетке, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения. Период рассматриваемой там плоской решетки взят равным 2π , ширина щели $2\pi\theta$, толщина брусьев $2h$. Нахождение поля в конечном счете сводилось к решению двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Аналогично можно рассмотреть и задачу о дифракции на той же решетке (рис. 1, а) наклонно падающей волны той же поляризации. Из полученных в этом случае бесконечных систем, воспользовавшись методом редукции, в длинноволновом приближении при $k < 0,5$ получим формулы для определения коэффициентов отражения и прохождения по нулевой гармонике a_0 и b_0 . При нахождении явного выражения для a_0 и b_0 учитывались только первые два уравнения из бесконечной системы. Численно сравнивая решения линейных алгебраических систем разных порядков, можно сделать вывод, что формулы для a_0 и b_0 дают удовлетворительную точность.

Зная a_0 и b_0 , мы можем записать при достаточно малых k локальные граничные условия в плоскости $z = 0$, которые будут эквивалентны действию реальной решетки.

Действительно, при $k < 0,5$ на некотором расстоянии от решетки будут существовать поля только основных гармоник, так как остальные поля экспоненциально убывают по оси oz . Выражения составляющих поля, учитывающие только основные волны, имеют вид

$$E_x^+ = e^{i(h_0 y - \gamma_0 z)} + a_0 e^{i\gamma_0(z-h)} \cdot e^{ih_0 y}; \quad z > h$$

$$E_x^- = t_0 e^{-i\gamma_0(z+h)} \cdot e^{ih_0 y}, \quad z < -h$$

где

$$h_0 = k \sin \alpha;$$

$$\gamma_0 = \sqrt{k^2 - h_0^2} = k \cos \alpha.$$

Если мысленно продолжить эти поля до $z = 0$, как поля плоских волн, то мы тем самым введем при $z = 0$ некоторую фиктивную поверхность, на которой определены скачки составляющих поля

$$E_x^+ - E_x^- = \frac{k[1 + (a_0 - b_0)e^{-i\gamma_0 h}]}{\gamma_0[-1 + (a_0 - b_0)e^{-i\gamma_0 h}]} \times (H_y^+ + H_y^-); \quad (1)$$

$$E_x^+ + E_x^- = \frac{k[1 + (a_0 + b_0)e^{-i\gamma_0 h}]}{\gamma_0[-1 + (a_0 + b_0)e^{-i\gamma_0 h}]} \times (H_y^+ - H_y^-). \quad (2)$$

Условия (1), (2) дают возможность проанализировать распространение H_{01} -волны в периодическом волноводе, составленном из колец прямоугольного поперечного сечения. При этом надо, конечно, рассматривать случаи, когда $k < \frac{1}{2}$ и радиус волновода a значительно больше длины волны λ_0 падающего на решетку поля.

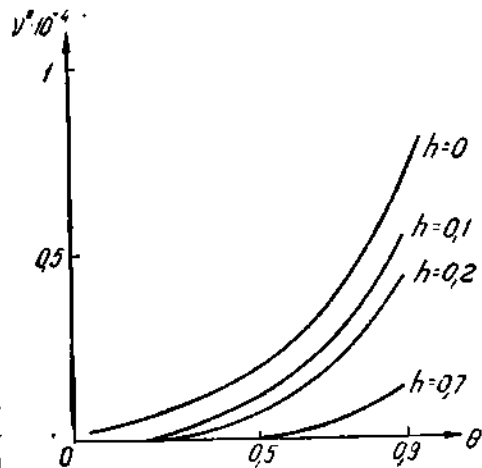
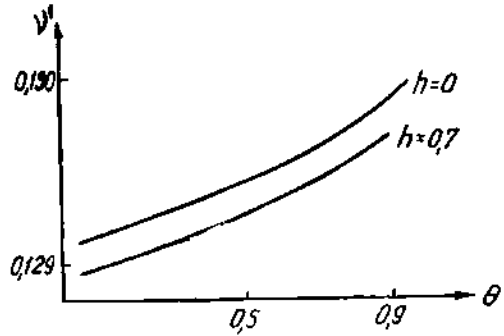


Рис. 2. Зависимость постоянной распространения и затухания H_{01} -волны от ширины щели при разных h и $k = 0,15$.

$$\Delta = \frac{1}{a} = 0,02.$$

2. Дисперсионное уравнение кольцевого волновода

Рассмотрим бесконечный идеально проводящий круглый волновод радиуса a , составленный из периодически расположенных колец (рис. 1, б). Мы будем искать симметричные волны магнитного типа, которые распространяются в такой системе в направлении оси z . Воспользуемся граничными условиями (1) и (2) на поверхности цилиндра радиуса a , считая радиус достаточно большим. При этом роль постоянной распространения вдоль волновода будет играть величина

$$h_0 = k \sin \alpha.$$

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) для симметричных волн магнитного типа отличные от нуля компоненты поля H_z, H_r, E_φ записываются внутри волновода в виде

$$H_z^+ = D\gamma_0^2 I_0(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}; \quad H_r^+ = -iD\gamma_0 h_0 I_1(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}; \quad (3)$$

$$E_\varphi^+ = -ik\gamma_0 D I_1(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}$$

и вне волновода

$$H_z^- = C\gamma_0^2 H_0^{(1)}(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}; \quad H_r^- = -ikh_0 C H_1^{(1)}(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}; \quad (4)$$

$$E_\varphi^- = -ik\gamma_0 C H_1^{(1)}(\gamma_0 r) e^{ih_0 z}.$$

(Зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$).

Подставляя выражения для составляющих полей (3), (4) в граничные условия (1), (2), записанные в цилиндрической системе координат, и исключив постоянные, получаем дисперсионное уравнение

$$I_1(\gamma_0 a) H_1^{(1)}(\gamma_0 a) + A I_0(\gamma_0 a) H_0^{(1)}(\gamma_0 a) - \frac{2B}{\pi\gamma_0 a} = 0, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{1 + e^{-ihh_0} [2a_0 + e^{-ihh_0} (a_0^2 - b_0^2)]}{1 + e^{-ihh_0} [-2a_0 + e^{-ihh_0} (a_0^2 - b_0^2)]};$$

$$B = \frac{-1 + e^{-2ihh_0} (a_0^2 - b_0^2)}{1 + e^{-ihh_0} [-2a_0 + e^{-ihh_0} (a_0^2 - b_0^2)]}.$$

Определению из уравнения (5) подлежит величина $h_n = v' + v''$ (ищется наименьший по модулю корень уравнения).

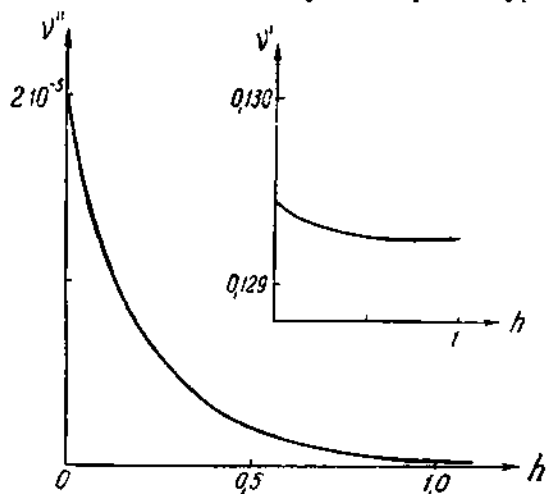


Рис. 3. Зависимость постоянной распространения и затухания H_{01} -волны от толщины колец при $\theta = 0,5$; $k = 0,15$; $\Delta = 0,02$.

Дисперсионное уравнение (5) решалось с помощью метода Ньютона на ЭВМ. Результаты графически изображены на рисунках 2—5. Отметим, что так как период взят равным 2π , то величины $\Delta = \frac{1}{a}$, h_0 , θ , h являются безразмерными.

Для сравнения пунктиром на некоторых рисунках нанесены кривые для $h = 0$, построенные по результатам работы [2]. Различие в $|h_n|$ не превышает 1%, в то время как v'' в нашем случае приблизительно в 2 раза больше. Для $k = 0,1$ v'' отличаются меньше, чем для $k = 0,3$. Это, видимо, связано

с тем, что a_n и b_n для меньших k вычисляются более точно.

Как видно из рисунков, основные свойства кольцевых волноводов сохраняются и для колец с толщиной. С ростом ширины щели затуха-

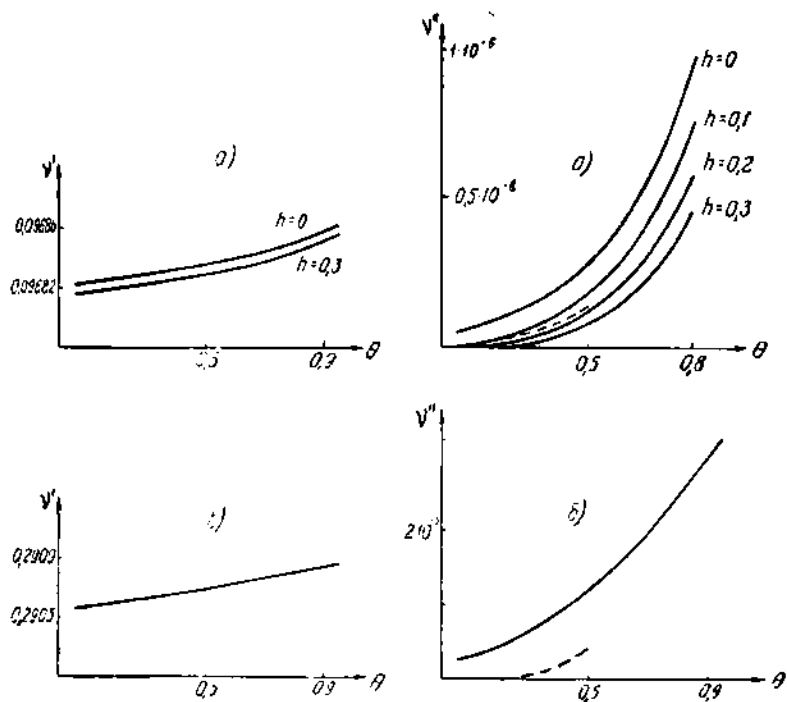


Рис. 4. Зависимость V' и V'' от ширины щели при разных h .
 $\Delta = 0,064 k$;
 а) $h = 0,1$; б) $h = 0,3$

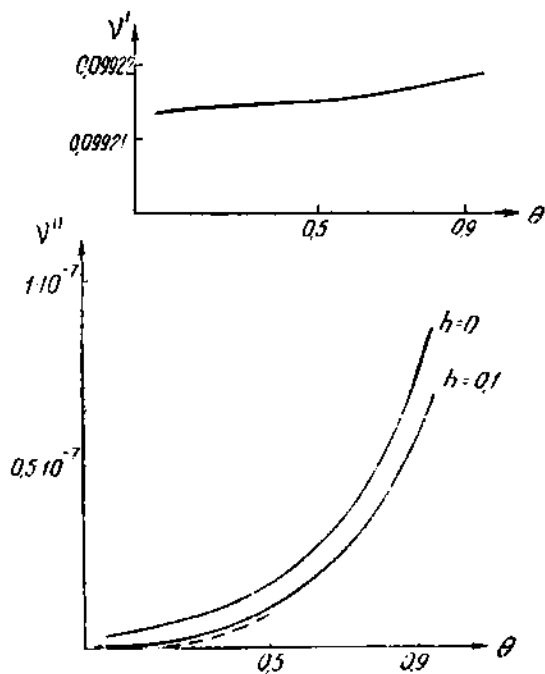


Рис. 5. Зависимость V' и V'' от θ при $h = 0,1$; $\Delta = 0,032 k$.
 $k = 0,1$.

ние возрастает, а с уменьшением постоянная распространения в кольцевом волноводе стремится к ее значению в соответствующем сплошном волноводе. Кроме того, затухание волн увеличивается с уменьшением диаметра волновода.

Наличие толщины колец сильно уменьшает затухание. Например, толщина колец, составляющая всего 5% от периода волновода, уменьшает затухание приблизительно в два раза. На ν' толщина почти не влияет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Смирнов. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1494, 1958.
 2. З. С. Агранович, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIV, вып. 11, 1950, 1964.
 3. G. Piefke. Archiv der elektrischen Übertragung, 11, № 2, 1957.
 4. С. А. Масалов, И. Е. Тарапов. Радиотехника и электроника, IX, № 1, 53, 1964.
-

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. Терещенко, В. М. Бондаренко

В технике СВЧ используются системы, состоящие из проводящих поверхностей различной конфигурации. В ряде случаев в систему вводятся дополнительные элементы, вызывающие малые возмущения поля. Для более обоснованного подхода к расчету и конструированию таких систем необходимо знать невозмущенные поля, в связи с чем требуется выяснить влияние изменения формы граничных поверхностей на структуру поля. В данной работе исследуется зависимость поперечной (по отношению к направлению распространения) структуры поля от кривизны идеально проводящей граничной поверхности.

Рассмотрим две параллельные идеально проводящие плоскости, между которыми вдоль оси z распространяются E_n - или H_n -волны (индекс n обозначает число вариаций поля между плоскостями вдоль оси y).

Для упрощения анализа положим $n = 1$. В таком случае распределение поля между плоскостями записывается следующим образом:
для E_1 -волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{a}_y \frac{k_2}{k} \cos(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k_1}{k} \sin(k_1 y) \sin(k_2 z - \omega t) \\ \vec{H} &= -\vec{a}_x \cos(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для H_1 -волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{a}_x \sin(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) \\ \vec{H} &= -\vec{a}_y \frac{k_2}{k} \sin(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k_1}{k} \cos(k_1 y) \sin(k_2 z - \omega t). \end{aligned} \right\}$$

Здесь \vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z — орты соответствующих осей;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ — длина волны в свободном пространстве);

$k_1 = \frac{\pi}{d}$; d — расстояние между плоскостями;

$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ (λ_2 — длина волны в системе).

Как следует из выражений (1), изменение всех составляющих поля вдоль координаты y происходит по синусоидальному закону (рис. 1, а и 1, б).

Так как систему двух параллельных плоскостей можно рассматривать как часть коаксиального волновода бесконечно большого радиуса, то, учитывая преобразование координат ($z = z$, $y \rightarrow r$, $x \rightarrow -\varphi$), выражение (1) можно переписать в виде:
для E_{01} -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_r \frac{k_z}{k} \cos(k'_{01} r) \cos(k_z z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k'_{01}}{k} \sin(k'_{01} r) \sin(k_z z - \omega t); \\ \vec{H} &= \vec{a}_\varphi \cos(k'_{01} r) \cos(k_z z - \omega t);\end{aligned}$$

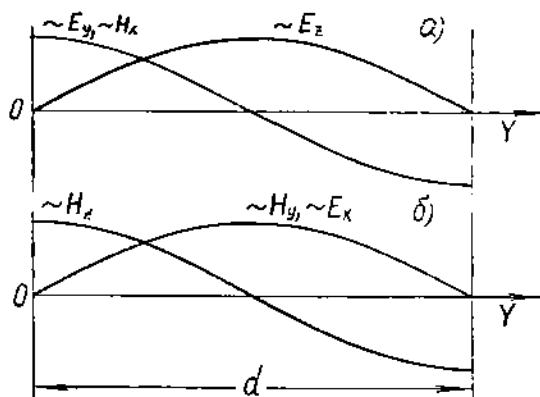


Рис. 1.

а) E_{01} -волна; б) H_{01} -волна

для H_{01} -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_\varphi \sin(k'_{01} r) \cos(k_z z - \omega t); \\ \vec{H} &= -\vec{a}_r \frac{k_z}{k} \sin(k'_{01} r) \cos(k_z z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k'_{01}}{k} \cos(k'_{01} r) \sin(k_z z - \omega t),\end{aligned}$$

где k'_{01} — поперечное волновое число для симметричной волны ($m = 0$, $n = 1$), взятое для системы с бесконечно большим радиусом и численно равное k_1 .

При $m \neq 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) коаксиал бесконечно большого радиуса дает:

для E_{m1} -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left[\vec{a}_r \frac{k_z}{k} \cos(k'_{m1} r) \cos(k_z z - \omega t) + \right. \\ &+ \left. \vec{a}_z \frac{k'_{m1}}{k} \sin(k'_{m1} r) \sin(k_z z - \omega t) \right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}; \\ \vec{H} &= \vec{a}_\varphi \cos(k'_{m1} r) \cos(k_z z - \omega t) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix};\end{aligned}$$

для H_{m1} -волны

$$\vec{E} = \vec{a}_\varphi \sin(k'_{m1}r) \cos(k_z z - \omega t) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix},$$

$$\vec{H} = \left[-\vec{a}_z \frac{k_z}{k} \sin(k_{m1}r) \cos(k_z z - \omega t) + \right. \\ \left. + \vec{a}_z \frac{k'_{m1}}{k} \cos(k_{m1}r) \sin(k_z z - \omega t) \right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix},$$

где k'_{m1} — поперечное волновое число, $m = 1, 2, 3, \dots$

Для определения влияния кривизны граничных поверхностей на структуру электромагнитного поля будем плавно деформировать систему, уменьшая радиус коаксиального волновода. При этом расстояние d между цилиндрическими поверхностями, образующими волновод, выберется из условия

$$d = b - a = \frac{\alpha_{mn} - \alpha_m(n-1)}{k_{mn}}, \quad (2)$$

где α_{mn} и $\alpha_m(n-1)$ — последовательные корни уравнения

$$f_n(k_{mn}r) = 0 \text{ или } f'_n(k_{mn}r) = 0, \\ f_m(k_{mn}r) = A J_m(k_{mn}r) + N_m(k_{mn}r), \quad (3)$$

$f'_m(k_{mn}r)$ — производная от (3) по аргументу;

A — коэффициент, меняющийся в пределах от $-\infty$ до ∞ , $J_m(k_{mn}r)$ и $N_m(k_{mn}r)$ — функции Бесселя и Неймана m -ого порядка;

a и b — внутренний и внешний радиусы коаксиального волновода соответственно;

$k_{mn} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ — поперечное волновое число.

Теперь задача сводится к нахождению радиальной зависимости структуры поля от вида функции (3).

Эта функция была построена в пределах $0 \leq k_{mn}r \leq 15$ при $-\infty < A < \infty$ для $m = 0$ и $m = 1$. Кроме того, были построены функции $\frac{1}{k_{mn}r} f_m(k_{mn}r)$ и $f'_m(k_{mn}r)$ и найдены аргументы нулей и экстремумов этих функций.

На основании результатов этих вычислений можно по формулам для E_{m1} -волны

$$\vec{E} = -\frac{k_z}{k} \left[\vec{a}_r k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \vec{a}_\varphi \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t) - \\ - \vec{a}_z \frac{1}{k} (k_{m1})^2 f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \sin(k_z z - \omega t);$$

$$\vec{H} = \left[\vec{a}_r \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} - \right. \\ \left. - \vec{a}_\varphi k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t);$$

для H_{m1} -волны

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left[\vec{a}_r \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \vec{a}_z k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t); \\ \vec{H} &= \frac{k_z}{k} \left[\vec{a}_r k_{m1} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \vec{a}_\varphi \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t) + \\ &\quad + \vec{a}_z \frac{1}{k} (k_{m1})^2 f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \sin(k_z z - \omega t) \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

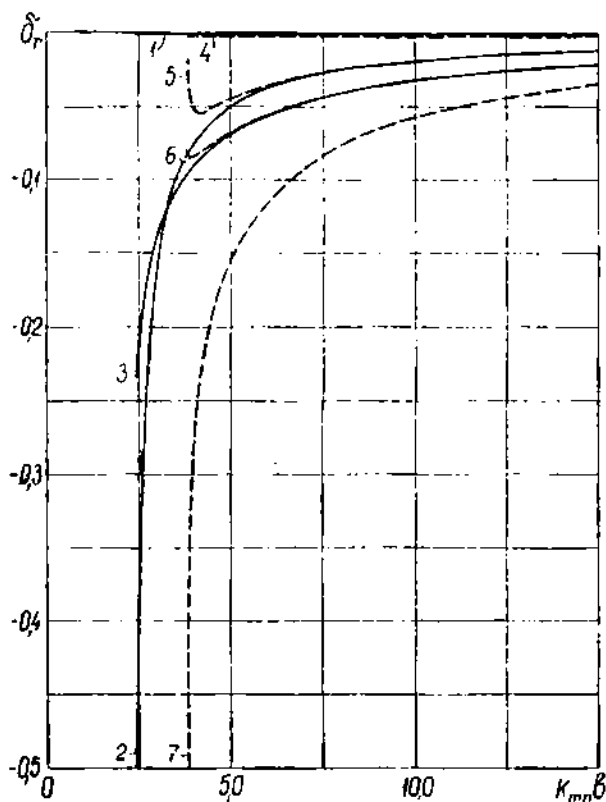


Рис. 2.

E -волны; — $m = 0$; - - $m = 1$;

1 — $E_z = 0$; 2 — $\max(E_z), E_\varphi, H_\varphi = 0$; 3 — $\max(E_\varphi, H_\varphi)$; 4 — $E_z, E_\varphi, H_\varphi = 0$; 5 — $\max(E_z), E_\varphi, H_\varphi = 0$; 6 — $\max(E_\varphi, H_\varphi)$; 7 — $\max(H_\varphi, E_\varphi)$.

определить численные значения составляющих электромагнитного поля в любой точке рассматриваемой системы.

Так как нас интересует только радиальная зависимость структуры поля от кривизны, то эту зависимость удобно представить в виде

$$\delta_r = F(k_{mn}b) = \frac{q_r - p_r}{d} \quad (4)$$

Здесь δ_r — радиальное смещение особенностей поля, вызванное изменением кривизны граничных поверхностей системы (особенностями мы будем называть максимумы и нули составляющих поля);

q_r — положение особенностей поля при конечных значениях $k_{mn}b$;

p_r — их положение в системе параллельных плоскостей (т. е. $b = \infty$).

Как видно из (4), $\delta_r = 0$ соответствует совпадению положения особенности поля с ее положением в случае параллельных плоскостей (заметим,

однако, что отсюда совершенно не следует идентичность всей картины поля в этих случаях). Отрицательные значения δ_r соответствуют смещениям особенностей поля от p_r в направлении оси системы, положительные — в обратную сторону. Величина δ_r , по определению, может меняться в интервале $-0,5 \leq \delta_r \leq 0,5$.

На рис. 2 представлена зависимость δ_r от $k_{mn}b$ для E -волн. На идеально проводящих стенках тангенциальные составляющие электрического поля E_z и E_φ равны нулю. Ввиду этого, естественно, нули этих составляющих при деформации граници не смещаются. В силу граничного условия $(\vec{n}\vec{H}) = 0$ не смещается также нуль составляющей H_r .

В то же время нули E_r и H_φ , а также максимумы E_z , E_r , H_φ , H_r и E_φ значительно смещаются с изменением радиуса кривизны ограничивающих коаксиал поверхностей. Наибольшее смещение испытывает максимум составляющей E_z при $m = 0$, который в случае параллельных плоскостей располагается точно посередине между

ними, а с переходом к коаксиалу и уменьшением его радиуса движется к внутреннему проводнику коаксиала и при $a \rightarrow 0$ (переход к цилиндрическому волноводу) попадает в точку $r = 0$. Подобным же образом происходит перемещение максимумов составляющих H_r и E_φ для $m = 1$.

Из рис. 2 видно, что при некоторых $k_{mn}b$ кривые 5 и 6 для $m = 1$ переходят в кривые 2 и 3 для $m = 0$. При дальнейшем увеличении m (т. е. $m = 2, 3, 4, \dots$) соответствующие кривые для достаточно больших $k_{mn}b$ также будут сливаться с кривыми 2, 3 и 7.

Рассмотрим теперь зависимость δ_r от $k_{mn}b$ для H -волн, представленную на рис. 3. Из рисунка видно, что отсутствие смещения некоторых особенностей определяется граничными условиями (прямые 1 и 4). На-

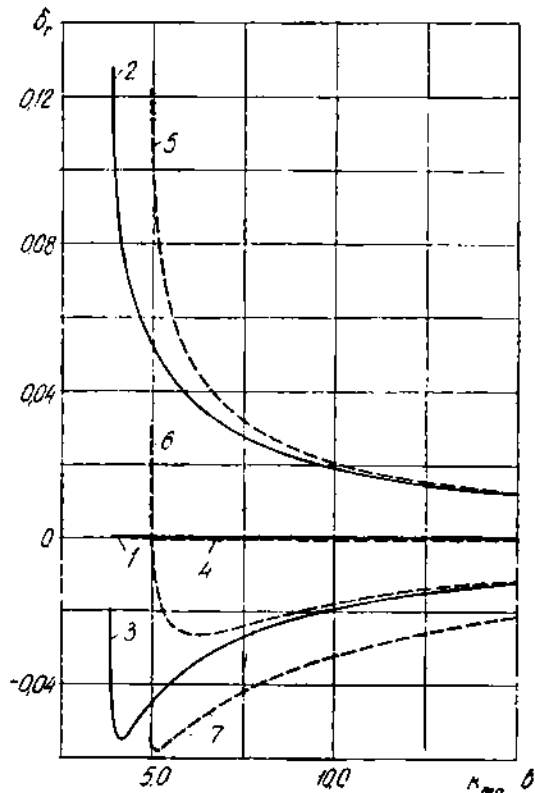


Рис. 3.

H -волны; — $m = 0$; --- $m = 1$; 1 — макс (H_z), H_r , $E_\varphi = 0$; 2 — $H_z = 0$; 3 — макс (H_r , E_z); 4 — макс (H_z), H_r , $E_\varphi = 0$; 5 — H_z , H_φ , $E_r = 0$; 6 — макс (H_r , E_φ); 7 — макс (E_r , H_φ).

большее смещение в сторону от оси коаксиала испытывает нуль H_z при $m = 0$ и 1, а также нули E_r и H_ϕ при $m = 1$. Смещение же остальных особенностей происходит в направлении к оси коаксиала, за исключением положения максимумов H_r и E_z для $m = 1$ (начальные участки кривых 3 и 6).

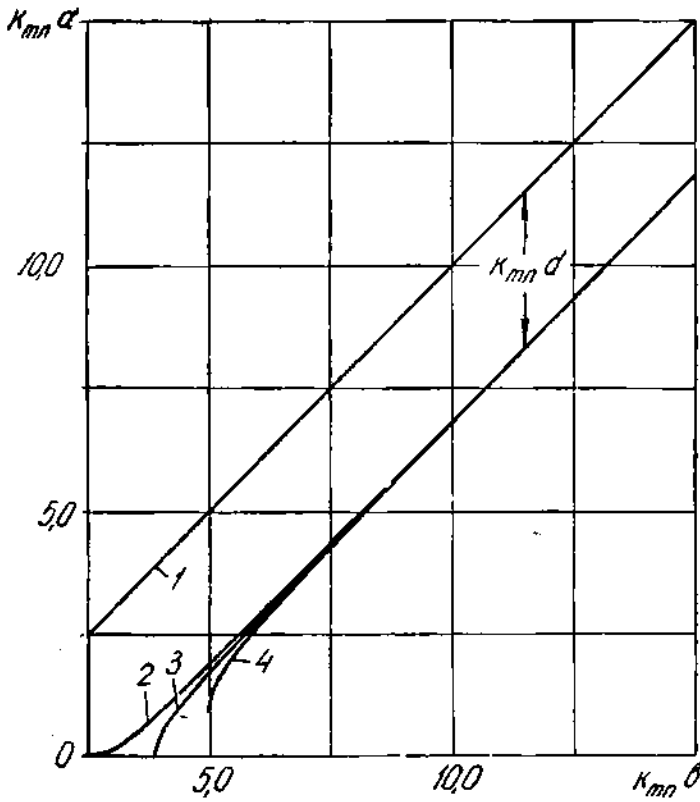


Рис. 4.

1 — E_{01} , H_{01} , E_{11} , H_{11} ; 2 — E_{01} ; 3 — H_{01} , E_{11} ; 4 — H_{11} .

Сравнение величин смещения особенностей поля показывает, что в случае H -волн максимальные величины δ , в несколько раз меньше, чем в случае E -волн. Различие в типах волн сказывается и на направлении смещения особенностей поля: у E -волн особенности либо не смещаются, либо движутся к оси системы, у H -волн движение особенностей происходит в обе стороны. Эти факты, полученные в результате проведенного анализа, свидетельствуют о глубоком различии в структуре поля E - и H -волн.

Заметим, что положение особенностей поля в точке $k_{mn}b$ соответствует любому $k \geq k_{mn}$. При этом постоянная распространения вдоль системы вычисляется из выражения

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}.$$

Выбор расстояния d между поверхностями рассматриваемой системы по формуле (2) на первый взгляд кажется слишком условным, поскольку с изменением $k_{mn}b$ величина d меняется. Для выяснения этого вопроса обратимся к рис. 4, где прямая 1 дает произведение внешнего радиуса коаксиала на k_{mn} , а кривые 2, 3 и 4 определяют величину внутреннего радиуса коаксиала для разных типов волн. Из рисунка видно, что изменение d вообще невелико, за исключением начальных участков кривых 2, 3 и 4. Именно этим изменением и объясняются начальные участки кривых, приведенных на рисунках 2 и 3.

Полученные данные позволяют составить более точное представление о структуре электромагнитного поля в системах с осевой симметрией и могут быть использованы при расчете и конструировании СВЧ-устройств.

ФЛУКТУАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФЕРРИТОВОГО ЦИЛИНДРА

И. П. Якименко

ВВЕДЕНИЕ

Исследование флуктуаций в ограниченной ферритовой среде может быть проведено на основании общей теории (Каллен и Велтон [1], Леонтович и Рытов [2], Ландау и Лифшиц [3]) с помощью известного тензора магнитной проницаемости феррита. Такое исследование представляет особый интерес для сред, размеры которых сравнимы с длиной волны, поскольку здесь несправедливы результаты классической теории теплового излучения. Теория теплового излучения ограниченных ферритовых сред (сфера малого радиуса) в последнее время развивалась рядом авторов [4, 5] в связи с исследованием шумовых характеристик ферритовых усилителей. В работе [6] рассматривалась общая теория электромагнитных флуктуаций в ограниченных гиротропных средах. Некоторые результаты этой теории применены в настоящей работе для определения флуктуационного излучения ферритового цилиндра ограниченного радиуса. В предельном случае магнитного поля, равного нулю, когда анизотропия исчезает, соотношения, полученные в работе, совпадают с результатами для мощности диэлектрического цилиндра, полученными в известной книге С. М. Рытова [2].

Существенно отметить, что в отличие от работ [6, 7], где при вычислении функции корреляции можно ограничиться отдельными несимметричными волнами с индексами n (этот индекс характеризует угловое распределение поля), при определении теплового излучения необходимо, вообще говоря, учитывать всю сумму несимметричных волн в целом. Лишь последующий анализ полученных общих выражений позволяет выяснить, какой вклад вносят отдельные колебания с индексами n . Поэтому окончательный результат работы представлен в виде ряда по всем несимметричным волнам. Эта окончательная формула допускает несложный и вместе с тем строгий расчет мощности теплового излучения ферритового цилиндра произвольных размеров.

1. Система уравнений флуктуационного поля и ее решение

Векторы флуктуационного электромагнитного поля удовлетворяют, как известно [3], уравнениям Максвелла с учетом «сторонних» электрических и магнитных индукций \vec{K} и \vec{L} :

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \vec{E})_i &= ik(\mu_{ik} H_k + L_i); \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -ik(\epsilon \vec{E} + \vec{K}),\end{aligned}\quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве (зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$);

ϵ — диэлектрическая проницаемость феррита,

μ_{ik} — коэффициенты, составляющие тензор магнитной проницаемости феррита:

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & ix & 0 \\ -ix & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

С учетом потерь величины μ_{ik} являются комплексными и могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \mu' &= 1 + \frac{\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right) + 2\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}{\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right)^2 + 4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2} \frac{v}{u}; \\ \mu'' &= \frac{\frac{vx}{u^2}\left(1 + \frac{x^2}{u^2}\right)\alpha}{\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right)^2 + 4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}; \quad x' = \frac{\frac{vx}{u^2}\left(\frac{x^2}{u^2} - 1\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right)^2 + 4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}; \\ x'' &= -\frac{2\frac{vx^2}{u^3}\alpha}{\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right)^2 + 4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}; \\ \mu_z' &\approx 1; \quad \mu_z'' = \frac{v}{x}\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Для удобства вычислений в (3) введены следующие безразмерные параметры:

$$x = \frac{\omega}{c} a; \quad u = \frac{\omega_H}{c} a; \quad v = \frac{\omega_m}{c} a, \quad (4)$$

где

$$\omega_H = |\gamma| H_{\text{рез}}; \quad \omega_m = 4\pi |\gamma| M \quad (4a)$$

($H_{\text{рез}}$ — эффективное резонансное постоянное магнитное поле для данного образца; $4\pi M$ — намагниченность при насыщении; a — характерный размер системы).

Параметр $\alpha = \frac{\Delta H}{2H_{\text{рез}}}$ характеризует затухание и определяется из ширины резонансной кривой (ΔH — ширина кривой на уровне $\mu'' = \frac{1}{2} \mu''_{\text{max}}$).

Представляя поля в виде интеграла Фурье по z и ряда Фурье по φ

$$\vec{E}(z, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \vec{E}_{n\beta} e^{i(n\varphi + \beta z)}, \quad (5)$$

из системы (1) можно установить следующие уравнения для продольных компонент $E_{zn\beta}$ и $H_{zn\beta}$ (индексы n и β мы в дальнейшем писать не будем, всегда, однако, имея в виду, что рассматриваются не составляющие поля, а их Фурье-компоненты):

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} H_z' + a_1 H_z' &= ibE_z + F(\vec{K}, \vec{L}); \\ \Delta_{\perp} E_z + a_2 E_z &= -ibH_z' + F(\vec{K}, \vec{L}); \\ H_z &= \sqrt{\frac{\mu_z}{\epsilon}} H_z'. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь f' и f'' — линейные функционалы от \vec{K} и \vec{L} :

$$f' = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{\mu} (\beta^2 - k^2 \varepsilon \mu) L_z - \frac{i\beta k x}{\mu} K_z + \frac{nk}{r} K_r + \right. \\ \left. + \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) - \frac{i\beta}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r L_r) + \frac{n\beta}{\mu r} L_\varphi \right\}; \quad (7)$$

$$f'' = \frac{1}{\varepsilon} \left(\beta^2 - k^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - x^2}{\mu} \right) K_z - \frac{i\beta}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_r) + \frac{n\beta}{\varepsilon r} K_\varphi + \frac{i\beta k x}{\mu} L_z - \\ - \frac{nk}{r} L_r - \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r L_\varphi) + \frac{kx}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r L_r) + \frac{inkx}{\mu r} L_\varphi,$$

а коэффициенты a_i и b равны

$$a_1 = \frac{kx}{\mu} (k^2 \varepsilon \mu - \beta^2); \quad a_2 = k^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - x^2}{\mu} - \beta^2; \quad b = -\frac{\beta k x \sqrt{\varepsilon \mu_2}}{\mu}. \quad (8)$$

Вводя линейную комбинацию

$$\Psi' = E_z + i\Lambda H_z', \quad (9)$$

получим из (6) следующие уравнения для Ψ' :

$$\Delta_\perp \Psi'_{1,2} + \gamma_{1,2}^2 \Psi'_{1,2} = F_{1,2}, \quad (10)$$

где

$$\gamma_{1,2}^2 = a_1 - b\Lambda_{2,1} = a_2 + b\Lambda_{1,2}; \quad F_{1,2} = f' + i\Lambda_{1,2} f'',$$

причем $\Lambda_{1,2}$ являются корнями уравнения

$$\Lambda^2 - \frac{a_1 - a_2}{b} \Lambda - 1 = 0. \quad (11)$$

Решения уравнений (10) находятся с помощью функции Грина для рассматриваемой задачи

$$\Psi_{1,2} = A_{1,2} J_n(\gamma_{1,2} r) + \Phi_{1,2}, \quad (12)$$

где

$$\Phi_{1,2}(a) = \mp \frac{\pi}{2} \frac{k\Lambda_{2,1}}{\gamma_{1,2}^2 (\Lambda_2 - \Lambda_1)} H_n^{(1)}(\gamma_{1,2} a) \int_0^a dr f_{1,2};$$

$$f_{1,2} = -\gamma_{1,2}^2 J_{n1,2} K_z + i\beta J'_{n1,2} K_r + \frac{ink}{r} \Lambda_{1,2} \sqrt{\varepsilon \mu_2} J_{n1,2} K_r + \\ + \frac{n\beta}{r} J_{n1,2} K_\varphi + k\Lambda_{1,2} \sqrt{\varepsilon \mu_2} J'_{n1,2} K_\varphi - i\gamma_{1,2}^2 \Lambda_{1,2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_2}} J_{n1,2} L_z - \\ - \frac{nk\varepsilon}{r} J_{n1,2} L_r + ik\varepsilon J'_{n1,2} L_\varphi - k\varepsilon b_{1,2} J_{n1,2} L_r + k\varepsilon b_{1,2} \frac{in}{r} J_{n1,2} L_\varphi; \quad (13)$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\beta \Lambda_{1,2}}{k \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_2}}} + x \right); \quad (14)$$

$J_{n1,2} = J_n(\gamma_{1,2} r)$; $A_{1,2}$ — постоянные.

Ψ_i в (12) линейно связано с Ψ'_i :

$$\Psi'_i = \frac{\Lambda_i \gamma_i^2}{ik\varepsilon} (\Lambda_2 - \Lambda_1) \Psi_i. \quad (15)$$

Из (9) следует, что

$$E_z = \frac{i\gamma_1^2}{k\varepsilon} \Psi_1 + \frac{i\gamma_2^2}{k\varepsilon} \Psi_2; \\ H_z = \frac{\Lambda_1 \gamma_1^2}{k \sqrt{\varepsilon \mu_2}} \Psi_1 + \frac{\Lambda_2 \gamma_2^2}{k \sqrt{\varepsilon \mu_2}} \Psi_2. \quad (16)$$

Пользуясь системой уравнений (1), все остальные компоненты также можно выразить через функции Ψ_i :

$$\begin{aligned}
 E_z &= -i\Lambda_1 \sqrt{\frac{\mu_z}{\epsilon}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - i\Lambda_2 \sqrt{\frac{\mu_z}{\epsilon}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{i\beta}{k_z} \frac{n\Psi_1}{r} - \frac{i\beta}{k_z} \frac{n\Psi_2}{r} - \\
 &\quad - \frac{i\beta k^2 \epsilon z}{\delta} L_\varphi - \frac{i\beta^2 k^2 z}{\delta} K_r - \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} L_r + \frac{k^2 [\beta^2 \mu + k^2 \epsilon (z^2 - \mu^2)]}{\delta} K_z; \\
 E_r &= -\frac{\beta}{k\epsilon} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\beta}{k\epsilon} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \sqrt{\frac{\mu_z}{\epsilon}} \Lambda_1 \frac{n\Psi_1}{r} - \sqrt{\frac{\mu_z}{\epsilon}} \Lambda_2 \frac{n\Psi_2}{r} + \frac{i\beta^2 k^2 z}{\delta} K_z - \\
 &\quad - \frac{i\beta k^2 \epsilon z}{\delta} L_r + \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} L_z + \frac{k^2 [\beta^2 \mu + k^2 \epsilon (z^2 - \mu^2)]}{\delta} K_r; \\
 H_z &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - b_1 \frac{n\Psi_1}{r} - b_2 \frac{n\Psi_2}{r} + \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} K_r + \frac{i\beta k^2 \epsilon z}{\delta} K_\varphi - \\
 &\quad - \frac{ik^4 \epsilon z}{\delta} L_r + \frac{k^2 \epsilon (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} L_\varphi; \\
 H_r &= ib_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + ib_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{in}{r} \Psi_1 + \frac{in}{r} \Psi_2 - \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} K_\varphi + \\
 &\quad + \frac{i\beta k^2 \epsilon z}{\delta} K_r + \frac{k^2 \epsilon (\beta^2 - k^2 \epsilon \mu)}{\delta} L_r - \frac{ik^4 \epsilon z}{\delta} L_\varphi.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\delta = \frac{\mu}{\mu_z} \gamma_1^2 \gamma_2^2.$$

Заметим, что при $\vec{K} = \vec{L} = 0$ (17) преобразуется в известные выражения для полей в ферритовой среде.

2. Мощность флуктуационного излучения

Поля в области, не занятой ферритом ($r > a$), являются решениями волнового уравнения для свободного пространства

$$\begin{aligned}
 E_z &= B_1 H_n^{(1)}(\gamma r); \\
 E_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} B_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + ik B_2 H_n^{(1)\prime}(\gamma r) \right\}; \\
 H_z &= B_2 H_n^{(1)}(\gamma r); \\
 H_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} B_2 H_n^{(1)}(\gamma r) - ik B_1 H_n^{(1)\prime}(\gamma r) \right\} \quad \gamma^2 = k^2 - \beta^2
 \end{aligned} \tag{18}$$

и позволяют представить поток мощности теплового излучения в радиальном направлении с единицы длины цилиндра в следующем виде:

$$P_{\text{ш}} = \frac{2ck}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^k d\beta (|\bar{B}_1|^2 + |\bar{B}_2|^2) \cdot \frac{1}{\gamma^2}. \tag{19}$$

Как показано в [2], область интегрирования по β сведена здесь к интервалу $(-k, +k)$ из-за наличия в подынтегральном выражении множителя $H' H^* - H'^* H$.

Черта сверху в последнем выражении означает усреднение по равновероятному распределению состояний.

3. Усреднение

Для того, чтобы получить среднее значение мощности флуктуационного излучения в соответствии с (19), необходимо коэффициенты B_i представить в виде линейных функционалов от \vec{K} и \vec{L} , пользуясь гра-

ничными условиями на поверхности $r = a$. Применяя обычные граничные условия на поверхности раздела феррит — вакуум, состоящие в равенстве тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, получим

$$B_i = \frac{\delta_{ik} \varphi_k}{\Delta}, \quad (20)$$

где индексы i и k принимают значения 1 и 2, а

$$\begin{aligned} \delta_{11,2} &= \frac{i}{J_{1,2} H} \left\{ -\frac{\Lambda_{2,1} \mu_2 \gamma^2 J'_{2,1}}{\gamma_1 \gamma_2 J_{2,1}} - \frac{n^2}{ka} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_1 \gamma_2} - \frac{\gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}} \right) + \frac{i \Lambda_{2,1} \epsilon \gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}} \frac{H'}{H} \right\}; \\ \delta_{21,2} &= \frac{1}{J_{1,2} H} \left\{ \frac{\gamma^2 \sqrt{\epsilon \mu_2} J'_{2,1}}{\gamma_1 \gamma_2 J_{2,1}} + \frac{n \sqrt{\epsilon \mu_2} \epsilon_{2,1} \gamma^2}{\gamma_{1,2} a} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n \beta \gamma_{2,1} \Lambda_{2,1}}{ka \gamma_{1,2}} - \frac{\gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon}} \frac{H'}{H} \right\}; \\ \Delta &= -\frac{\epsilon \mu_2 \gamma^2 J'_1 J'_2}{\gamma_1 \gamma_2 J_1 J_2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) - \frac{H'}{H} \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\Lambda_1 \mu_2 - \Lambda_2 \epsilon) \frac{J'_1}{J_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\Lambda_2 \mu_2 - \Lambda_1 \epsilon) \frac{J'_2}{J_2} \right] - \frac{\gamma_1 \gamma_2 H'^2}{\gamma^2 H^2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) + \\ &\quad + \frac{n \sqrt{\epsilon \mu_2} [\gamma_2^2 (\beta^2 + k^2) - \gamma^2 (\beta^2 + k^2 \epsilon \mu_2)] J'_1}{\beta ka \gamma_1 \gamma_2} \frac{J'_1}{J_1} - \\ &\quad - \frac{n \sqrt{\epsilon \mu_2} [\gamma_1^2 (\beta^2 + k^2) - \gamma^2 (\beta^2 + k^2 \epsilon \mu_2)] J'_2}{\beta ka \gamma_1 \gamma_2} \frac{J'_2}{J_2} + \\ &\quad + \frac{n^2 \beta^2 k^2 [(1 - \epsilon \mu)^2 - \epsilon^2 \mu^2] \mu_2 (H/\gamma^2 a H') + n \mu_2 (\beta^2 + k^2 \epsilon^2) H'}{\mu \gamma_1 \gamma_2 a} \frac{H'}{H} (\Lambda_2 - \Lambda_1); \quad (21) \\ \varphi_{1,2} &= \frac{i}{a} \int_0^a dr r \{f_{1,2}\}; \quad J_{1,2} = J_n(\gamma_{1,2} a), \quad H = H_n^{(1)}(\gamma a). \end{aligned}$$

Отметим, что равенство

$$\Delta = 0 \quad (22)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в ферритовом волноводе при наличии внешнего продольного магнитного поля.

Как видно из (20) и (21), B_i являются линейными функционалами от \vec{K} и \vec{L} . Тогда квадратичные формы, входящие в выражение (19) для потока мощности, могут быть усреднены с помощью известных корреляционных функций для «сторонних» индукций \vec{K} и \vec{L} :

$$\begin{aligned} \langle K_{i\omega\beta}^{(1)} K_{k\omega\beta}^{*(2)} \rangle &= \frac{\hbar^2}{2\pi^2} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \delta_{ik} \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1}; \quad (23) \\ \langle L_{i\omega\beta}^{(1)} L_{k\omega\beta}^{*(2)} \rangle &= \frac{i\hbar}{4\pi^2} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} (\mu_{ki}^* - \mu_{ik}) \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1}. \end{aligned}$$

После усреднения и интегрирования (одно интегрирование по r выполняется сразу из-за наличия δ -функции, а второе производится с помощью известных свойств функций Бесселя) получается следующий окончательный результат для мощности теплового излучения на частоте ω

с единицы поверхности ферритового цилиндра, находящегося во внешнем продольном магнитном поле (в классическом случае $hw \ll T$):

$$P_w = \frac{T}{\pi^2 \sigma^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2 |\Delta|^2} (-1)^{l+k} f_{ik} \delta_{li} \delta_{ik}^* \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} f_{ik} = & \gamma_i^2 \gamma_k^{*2} \left(\varepsilon^* + \mu_z^* \Lambda_i \Lambda_k^* \left| \frac{\varepsilon}{\mu_z} \right| \right) I_1^{ik} + \\ & + \{ \varepsilon^* (\beta^2 + k^2 \Lambda_i \Lambda_k^* | \varepsilon \mu_z |) + k^2 | \varepsilon |^2 [\mu^* (1 + b_i b_k^*) - \\ & - x^* (b_i + b_k^*)] \} I_2^{ik} + nk^2 | \varepsilon |^2 \left\{ \frac{\beta \varepsilon^* [\Lambda_i \sqrt{\varepsilon \mu_z} + \Lambda_k^* \sqrt{\varepsilon^* \mu_z^*}]}{k | \varepsilon |^2} + \right. \\ & \left. + \mu^* (b_i + b_k^*) - x^* (1 + b_i b_k^*) \right\} I_3^{ik}; \\ I_1^{ik} = & \frac{J_n J_n^* - J_n' J_n'^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a; \quad I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 J_n J_n^* - \gamma_k^{*2} J_n' J_n'^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a. \end{aligned} \quad (25)$$

Все индексы в формулах (24) и (25) принимают значения 1 и 2.

Соотношение (24) представляет собой точную формулу для расчета мощности флуктуационного излучения, включающую как магнитную, так и диэлектрическую часть, связанную с наличием мнимой части диэлектрической проницаемости. Эта последняя часть может иметь существенное значение в областях частот, не слишком близких к частоте гиромангнитного резонанса.

Как видно из (24), флуктуационное излучение состоит из бесконечной суммы колебаний с индексами n .

Отметим также, что полная мощность излучения пропорциональна температуре цилиндра. Отсюда следует, что эффективным методом борьбы с шумами ферритовых элементов является не только снижение уровня их потерь, но также их охлаждение.

4. Переход к диэлектрическому цилиндру

Полагая $\mu_z = \mu$, $\mu^* = x = 0$, найдем $\Lambda_{1,2} = \mp 1$; $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = k^2 \varepsilon \mu - \beta^2 = = \lambda^2$; $b_{1,2} = \mp \frac{\beta}{k \sqrt{\varepsilon \mu}}$; $\gamma^2 = \lambda_0^2$.

Тогда

$$\begin{aligned} f_{ik} = & \varepsilon^* \{ | \lambda |^4 I_1 + (\beta^2 + k^2 \mu) | \varepsilon | \Lambda_i \Lambda_k^* I_2 + n^2 k \sqrt{\mu} (\Lambda_i | \varepsilon | + \\ & + \Lambda_k^* \sqrt{\varepsilon^*}) I_3 \}; \\ I_1 = & \frac{J_n J_n^* - J_n' J_n'^*}{\lambda^2 - \lambda^{*2}} a; \quad I_2 = \frac{\lambda^2 J_n J_n^* - \lambda^{*2} J_n' J_n'^*}{\lambda^2 - \lambda^{*2}} a; \\ I_3 = & J_n J_n^*; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta_{11,2} = & \frac{i}{J^2 H^2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \delta \pm \Delta_1 \right); \quad \delta_{21,2} = \frac{1}{J^2 H^2} \left(\mp \delta - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Delta_2 \right); \\ \Delta = & - \frac{2\lambda^2 (\Delta_1 \Delta_2 - \delta^2)}{\lambda_0^2 J^2 H^2}; \quad \Delta_1 = H' J - \frac{\mu \lambda_n^2}{\lambda^2} H J'; \\ \Delta_2 = & H' J - \frac{\varepsilon \lambda_0^2}{\lambda^2} H J'; \quad \delta = \frac{\beta n}{k a} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2} \right) H J. \end{aligned} \quad (27)$$

Последние обозначения введены в книге С. М. Рытова [2].

Выражение (26) позволяет вычислить сумму

$$(-1)^{l+k} f_{ik} \delta_{ik} \delta_{ik}^* = \frac{4}{|J_{ik} H_{ik}|} \{ (|\delta|^2 + |\Delta_1|^2) (|\lambda|^2 I_1 + \beta^2 I_2) + k^2 \mu^2 (|\delta|^2 + |\Delta_2|^2) I_3 - \beta n k \mu [\delta (\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^* (\Delta_1 + \Delta_2)] I_3 \}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (24), для потока мощности с единицы поверхности диэлектрического цилиндра находим окончательно

$$P_w = \frac{\varepsilon'' T}{\pi^2 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} d\beta \frac{J_n^2}{|J_n|^2 |\Delta_1 \Delta_2 - \beta^2|^2} \{ k^2 \mu^2 (|\delta|^2 + |\Delta_2|^2) I_3 + (|\delta|^2 + |\Delta_1|^2) (|\lambda|^2 I_1 + \beta^2 I_2) - \beta n k \mu [\delta (\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^* (\Delta_1 + \Delta_2)] I_3 \}. \quad (29)$$

Формула (29) в точности совпадает с известным результатом С. М. Рытова [2].

5. Тонкий цилиндр

Из различных частных случаев полученного общего результата наибольший интерес представляет случай тонкого цилиндра ($a \ll \lambda$), когда условия геометрической оптики не выполняются и, следовательно, классическая теория теплового излучения не может быть применена. Поскольку при малых радиусах цилиндра

$$\gamma a \ll 1, \quad (30)$$

здесь можно воспользоваться приближенными значениями функций Бесселя при малых аргументах:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n; & J'_0(\gamma a) &= -\frac{\gamma a}{2}; & J'_n(\gamma a) &= \frac{1}{(n-1)! a} \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^n; \\ H_0^{(1)}(x) &= \frac{2i}{\pi} \ln \frac{x}{2}; & H_n^{(1)}(x) &= -\frac{i(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n; \\ H_0^{(1)'}(\gamma a) &= \frac{2i}{\pi a}; & H_n^{(1)'}(\gamma a) &= \frac{in!}{\pi a} \left(\frac{2}{\gamma a}\right)^n. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя (31) в (24), нетрудно убедиться, что мощность колебаний с $n=0$ пропорциональна a (с единицы поверхности цилиндра), а мощность колебаний с $n \geq 1$ пропорциональна $a^{2|n|-1}$. Отсюда следует, что при малых a основной вклад дают только колебания с $n=0$ и $n=1$.

При $n=0$ из (24) при (31) получим

$$P_{w_0} = \frac{T k^3 a (\varepsilon'' + \mu_z'')}{6\pi^2} \quad (32)$$

и при $n=1$

$$P_{w_1} = \frac{2T k^3 a}{3\pi^2} \left\{ \frac{\varepsilon''}{\varepsilon + 1} + \frac{\mu'' - \kappa''}{|1 + \mu - \kappa|^2} \right\}. \quad (33)$$

Заметим, что при $\mu_z'' = 0$ (32) совпадает с полученной в [2] формулой для свободного диэлектрического цилиндра. Однако из сравнения (32) и (33) видно, что для тонкого диэлектрического цилиндра существен также учет колебания $n=1$, если только $|\varepsilon + 1|$ не слишком велико.

Поскольку резонансным образом от магнитного поля зависят только величины μ и κ , то мощность P_w резко изменяется в зависимости от магнитного поля. При определенных условиях вклад этого колебания является основным. Это, очевидно, наблюдается, если

$$\operatorname{Re}(1 + \mu - \kappa) = 0. \quad (34)$$

Это условие, как видно из (3), выполняется при

$$x = u + \frac{1}{2} v. \quad (35)$$

Но тогда

$$\frac{u^2 - x^2}{|1 + \mu - z|^2} = \frac{1}{\mu^2 - x^2} = \frac{1}{4xz}. \quad (36)$$

Следовательно,

$$P_{\omega_1} \approx \frac{Tk^2 a}{6\pi^2} \frac{v}{xz}. \quad (37)$$

Полагая $\frac{v}{x} = 1$, $a = 10^{-3}$, получим

$$P_{\omega_1} \approx 10^3 \frac{Tk^2 a}{6\pi^2}. \quad (38)$$

На волне 25 см и при $a = 0,25$ см для цилиндра длиной 20 см получаем $P_{\omega_1} \approx 10^{-14}$ вт/мггц. В других случаях тонкий ферритовый цилиндр будет излучать мощность, на несколько порядков меньшую.

6. О численном расчете

В общем случае для точных вычислений необходимо пользоваться соотношением (24). Интеграл по β , входящий в это выражение, может быть вычислен одним из простых численных методов, например, по формуле Симпсона. При этом могут быть полезны следующие свойства подынтегральной функции $F(\beta)$:

1. $F(+\beta) = F(-\beta)$, т. е. подынтегральная функция является четной функцией;

2. $F(\pm k) = 0$;

$$\begin{aligned} 3. F(0) = & \frac{|\Delta_1|^2}{|\Delta|^2} \left[\mu_z^2 |\gamma_1|^2 \left| \frac{\varepsilon}{\mu_z} \right| I_1^{11} + \varepsilon^2 k^2 |\varepsilon \mu_z| I_2^{11} \right] + \\ & + \frac{|\Delta_2|^2}{|\Delta|^2} \left\{ \varepsilon^2 |\gamma_2|^2 I_1^{22} + k^2 |\varepsilon|^2 \left[\mu^2 \left(1 + \left| \frac{x}{\mu} \right|^2 \right) - 2x^2 \operatorname{Re} \frac{x}{\mu} \right] I_2^{22} - \right. \\ & \left. - nk^2 |\varepsilon|^2 \left[x^2 \left(1 + \left| \frac{x}{\mu} \right|^2 \right) - 2x^2 \operatorname{Re} \frac{x}{\mu} \right] I_3^{22} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{J_1 H} \left\{ \frac{\gamma_1 \sqrt{\varepsilon \mu_z}}{\gamma_1} \left(\frac{n}{\gamma_2 a} - \frac{J_{n+1,2}}{J_{n2}} \right) + \frac{n \gamma_1 \sqrt{\varepsilon \mu_z} x}{\mu \gamma_1 \gamma_2 a} - \frac{\gamma_2 \sqrt{\mu_z}}{\gamma_1 \sqrt{\varepsilon}} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{n}{\gamma_1 a} - \frac{H_{n+1}}{H_n} \right) \right\}; \\ \Delta_2 = & \frac{1}{\gamma_2 J_2 H} \left\{ \gamma_1 \left(\frac{n}{\gamma_1 a} - \frac{H_{n+1}}{H_n} \right) - \gamma_2 \left(\frac{n}{\gamma_1 a} - \frac{J_{n+1,1}}{J_{n1}} \right) \right\}; \\ \Delta = & - \frac{\varepsilon \mu_z \gamma_2^2 J_1' J_2'}{\gamma_1 \gamma_2 J_1 J_2} - \frac{H'}{H} \left[\frac{\gamma_2 \mu_z J_1'}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1 \varepsilon J_2'}{\gamma_2} \right] - \frac{\gamma_1 \gamma_2 H'^2}{\gamma^2 H^2} - \\ & - \frac{nk^2 \varepsilon \mu_z J_1'}{\mu \gamma_1 \gamma_2 a} + \frac{nk^2 \varepsilon^2 \mu_z H'}{\mu \gamma_1 \gamma_2 a}; \quad \gamma_1 = k \sqrt{\varepsilon \mu_z}; \\ & \gamma_2 = k \sqrt{\frac{\mu^2 - x^2}{\varepsilon}}; \quad \gamma = k. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, пользуясь формулой Симпсона, достаточно вычислить подынтегральную функцию по точной формуле лишь в точке $\beta = \frac{k}{2}$, а при $\beta = 0$ и $\beta = \pm k$ воспользоваться свойствами (39).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей работы показывают, что для расчета мощности флуктуационного излучения ферритового цилиндра, находящегося в продольном магнитном поле, могут быть предложены простые и точные формулы типа (24). Аналогичным образом решаются и задачи по определению мощности тепловых шумов в различных волноводных системах, содержащих ферритовые стержни. Решение таких задач существенно для применений волноводных элементов в различных малощумящих устройствах, с одной стороны, и для строгого анализа работы шумовых генераторов, с другой стороны.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. V. Callen, T. A. Welton. *Phys. Rev.*, **83**, 34, 1951.
 2. М. А. Леонтович, С. М. Рытов. *ЖЭТФ*, **23**, 246, 1952; С. М. Рытов. *Теория электрических флуктуаций и теплового излучения*, М., Изд-во АН СССР, 1953.
 3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*, М.—Л., Гостехиздат, 1959.
 4. Я. А. Моносов. «*Радиотехника и электроника*», **7**, 1738, 1962.
 5. Л. А. Шишкин, М. А. Савченко. *ИВУЗ, «Радиотехника»*, **5**, 4, 1962.
 6. И. П. Якименко. Всесоюз. научн. сессия, посв. Дню радио, М., изд-во «Сов. радио», 1962.
 7. И. П. Якименко. *ИВУЗ, «Радиофизика»*, **7**, 375, 1964.
-

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ГИРОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

И. П. Якименко, Л. А. Назаренко, А. А. Шадрин

1. В ферритовой и плазменной среде, как и в любом теле с отличной от нуля температурой, возникают интенсивные электромагнитные флуктуации. Эти флуктуации проявляются прежде всего в виде конечного потока мощности теплового излучения, испускаемого рассматриваемой гиротропной средой. Тепловое излучение гиротропных сред используется в качестве источника шумовой электромагнитной энергии, а также для определения характеристик самой излучающей среды. Спектральное распределение мощности теплового излучения рассматриваемой системы с ферритом или плазмой может быть определено на основании общей теории флуктуаций [1, 2], если известны тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды. Если рассматриваемая среда неоднородна в каком-либо направлении, то на границе раздела векторы поля должны удовлетворять обычным граничным условиям макроскопической электродинамики.

Именно такой случай имеет место в настоящей работе, где рассматривается цилиндрический объем плазмы или феррита, отделенный от свободного пространства анизотропно-проводящей поверхностью. Такая система, как известно, является хорошим приближением реального спирального волновода с гиротропной средой. Таким образом, на границе раздела гиротропная среда — вакуум должны быть непрерывны тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля, равны нулю тангенциальные электрические поля в направлении проводимости и непрерывна тангенциальная составляющая вектора магнитного поля в этом направлении.

Электромагнитные флуктуации существуют не только в гиротропной среде, заполняющей спиральный волновод, но также и в самом металлическом проводнике, из которого изготовлена спираль. Поэтому полный поток мощности теплового излучения состоит, строго говоря, из суммы потоков, создаваемых гиротропной средой и спирально-проводящей поверхностью. Тепловое излучение хорошо проводящих тел может быть при необходимости вычислено с помощью представления о поверхностном случайном поле и приближенных граничных условий М. А. Леонтовича [1]. Однако, учитывая, что затухание, вносимое гиротропной средой, значительно превышает потери, связанные с неидеальностью провода спирали [3], а в случае плазмы и электронная температура значительно превышает физическую температуру провода, мы в настоящей работе ограничились вычислением флуктуационного излучения, связанного с гиротропной средой.

Примененный в работе электродинамический подход к вычислению мощности теплового излучения необходим при расчетах в диапазоне

сверхвысоких частот, когда неприменимы ни условия геометрической оптики, ни условия квазистационарности цепи. Именно для этого диапазона и пригодны соотношения, полученные в работе. Отметим, что те же результаты могут быть получены и путем вычисления энергетических коэффициентов поглощения данным источником взаимно ортогональных волн, образующих полную систему для рассматриваемой задачи [1].

2. Фурье-компоненты флуктуационных электромагнитных полей в плазме с учетом «сторонней» индукции \vec{K} могут быть представлены в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{\lambda_1 \gamma_1^2}{k \sqrt{\epsilon_z}} \psi_1 - \frac{\lambda_2 \gamma_2^2}{k \sqrt{\epsilon_z}} \psi_2; & H_z &= -\frac{i \gamma_1^2}{k} \psi_1 - \frac{i \gamma_2^2}{k} \psi_2; \\
 E_r &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{n b_1}{r} \psi_1 - \frac{n b_2}{r} \psi_2 - \frac{i k^4 \gamma_{1,2}^2}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_r + \frac{k^2 (\beta^2 - k^2 \epsilon) \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_\epsilon; \\
 E_\varphi &= i b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + i b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{i n}{r} \psi_1 + \frac{i n}{r} \psi_2 + \frac{k^2 (\beta^2 - k^2 \epsilon) \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_r + \frac{i k^4 \eta \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_\varphi; & (1) \\
 H_r &= -i \lambda_1 \sqrt{\epsilon_z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - i \lambda_2 \sqrt{\epsilon_z} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{i n \beta}{k r} \psi_1 + \frac{i n \beta}{k r} \psi_2 + \\
 &\quad + \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon) \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_r + i \frac{k^2 \beta \eta \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_\varphi; \\
 H_\varphi &= \frac{\beta}{k} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\beta}{k} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{n \lambda_1 \sqrt{\epsilon_z}}{r} \psi_1 - \frac{n \lambda_2 \sqrt{\epsilon_z}}{r} \psi_2 - \\
 &\quad - \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon) \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_r + i \frac{k^2 \beta \eta \epsilon_z}{\epsilon_1^2 \gamma_{1,2}^2} K_\varphi,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,2} &= A_{1,2} J_n(\gamma_{1,2} r) + \Phi_{1,2}; \\
 \gamma_{1,2}^2 &= a_2 + b \lambda_{1,2} = a_1 - b \lambda_{1,2}; \\
 \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2b} (a_1 - a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4b^2}); \\
 a_1 &= \frac{\epsilon_z}{\epsilon} (k^2 \epsilon - \beta^2); & a_2 &= -\beta^2 + k^2 \frac{\epsilon^2 - \eta^2}{\epsilon}; & b &= \frac{\beta k \gamma_1 \sqrt{\epsilon_z}}{\epsilon}; \\
 b_{1,2} &= -\frac{\beta^2 - k^2 \epsilon + \gamma_{1,2}^2}{k^2 \gamma_{1,2}}; & & & & (2)
 \end{aligned}$$

$k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве;

$\epsilon, \eta, \epsilon_z$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\eta & 0 \\ -i\eta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}; \quad (3)$$

K_r — составляющие вектора «сторонней» электрической индукции.

В (1) входят также величины $\Phi_{1,2}$ — линейные функционалы от \vec{K} :

$$\Phi_{1,2} = \pm \frac{k \pi \lambda_{2,1} H_n^1(\gamma_{1,2} a)}{2 \gamma_{1,2} (\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^a dr r f_{1,2} \quad (4)$$

где

$$f_{1,2} = -\frac{i\lambda_{1,2}\gamma_{1,2}^3}{V\epsilon_z} J_{n1,2} K_z - \frac{inkb_{1,2}}{r} J_{n1,2} K_\varphi + \\ + \frac{nk}{r} J_{n1,2} K_r + kb_{1,2} J'_{n1,2} K_r - ikJ'_{n1,2} K_\varphi; \quad (5) \\ J_m = J_n(\gamma_i a).$$

Вектор полной напряженности поля в точке с координатами r , φ , z в момент времени t может быть найден по формуле

$$\vec{E}(r, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{n,\varphi,\omega}(r) e^{-i(\omega t - \beta z - n\varphi)}, \quad (6)$$

где составляющие $\vec{E}_{n,\varphi,\omega}$ определяются из (1). Поля в ферритовой среде определяются аналогично и записаны в работе [5].

3. Предположим теперь, что плазменная или ферритовая среда занимает пространство $r < a$ и отделена от свободного пространства аннотропно-проводящей поверхностью. Поля в вакууме имеют обычный вид:

$$E_z = B_1 H_n^{(1)}(\gamma_0 r); \quad H_z = B_2 H_n^{(1)}(\gamma_0 r); \\ E_\varphi = -\frac{1}{\gamma_0^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} B_1 H_n^{(1)}(\gamma_0 r) + ikB_2 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma_0 r)}{\partial r} \right\}; \\ H_\varphi = -\frac{1}{\gamma_0^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} B_2 H_n^{(1)}(\gamma_0 r) - ikB_1 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma_0 r)}{\partial r} \right\}; \quad (7) \\ \gamma_0^2 = k^2 - \beta^2,$$

а интересующий нас поток мощности теплового излучения в радиальном направлении с единицы длины цилиндра [4]:

$$p_\omega = \frac{2ck}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} d\beta (|\bar{B}_1|^2 + |\bar{B}_2|^2) \frac{1}{\gamma_0^2}. \quad (8)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению связи между B , и \vec{K} , \vec{L} , после чего усреднение может быть проведено с помощью функций корреляции для \vec{K} и \vec{L} [2]:

$$\langle K_{i\omega\beta}^{(1)} K_{k\omega\beta}^{*(2)} \rangle = \frac{i\hbar}{4\pi^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} (\epsilon_{ki}^* - \epsilon_{ik}) \frac{\delta(r_2 - r_1)}{r_1}; \\ \langle L_{i\omega\beta}^{(1)} L_{k\omega\beta}^{*(2)} \rangle = \frac{i\hbar}{4\pi^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} (\mu_{ki}^* - \mu_{ik}) \frac{\delta(r_2 - r_1)}{r_1}; \\ \langle K_{i\omega\beta}^{(1)} L_{k\omega\beta}^{*(2)} \rangle = 0. \quad (9)$$

В соответствии со сказанным ранее на границе $r = a$ должно быть:

- 1) $E_z^1 = E_z^2$;
- 2) $E_\varphi^1 = E_\varphi^2$;
- 3) $E_z^1 \operatorname{tg} \theta + E_\varphi^1 = E_z^2 \operatorname{tg} \theta + E_\varphi^2 = 0$;
- 4) $H_z^1 \operatorname{tg} \theta + H_\varphi^1 = H_z^2 \operatorname{tg} \theta + H_\varphi^2$.

Пользуясь (1), (7) и (10), найдем

$$B_1 = \frac{\delta_{ik} \cdot \varphi_k}{\Delta}, \quad (11)$$

где

$$\Delta = J_1 J_2 H H' \left\{ \left[\frac{n k^2 \gamma_0^2}{a} h + k^2 \gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \left(\operatorname{tg} \theta e - \frac{n \beta}{a} \right)^2 \right] \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{\epsilon_2}}{\epsilon_2} + \right. \\ \left. + \frac{k \sqrt{\epsilon_2} J_1 J_2'}{J_1 J_2} (\lambda_2 - \lambda_1) + \left[2 \gamma_2^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{\lambda_2 \gamma_2^2 \gamma_0^2}{k \sqrt{\epsilon_2}} h - \frac{n}{a} (b_2 \lambda_2 \sqrt{\epsilon_2} + \beta) \right] \frac{J_1'}{J_1} - \right. \\ \left. - \left[2 \gamma_1^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{\lambda_1 \gamma_1^2 \gamma_0^2}{k \sqrt{\epsilon_2}} h - \frac{n}{a} (b_1 \lambda_2 \sqrt{\epsilon_2} + \beta) \right] \frac{J_2'}{J_2} \right\}; \quad (12)$$

$$\delta_{1,1,2} = - \frac{\lambda_2 \gamma_2^2 J_2'}{\gamma_0^2 \sqrt{\epsilon_2}} H \left[\frac{n (k^2 \epsilon_2 - \gamma_2^2)}{a \beta} - \gamma_{2,1}^2 \operatorname{tg} \theta + k \sqrt{\epsilon_2} \lambda_{1,2} \frac{J_{2,1}'}{J_{2,1}} \right];$$

$$\delta_{2,1,2} = - i \frac{\gamma_0^2 \gamma_0}{k} \frac{H}{H'} \delta_{1,1,2}.$$

$$\varphi_{1,2} = \mp \frac{l}{a} \int_0^a dr r f_{1,2};$$

$$h = \gamma_0^2 \frac{H'}{H} - \frac{k^2 H'}{\gamma_0^2 H}; \quad \tau = \operatorname{tg} \theta - \frac{n \beta}{a \gamma_0^2}; \quad e = k^2 \epsilon - \beta^2; \quad H = H_n^{(1)}(\gamma_0 a).$$

В случае ферритовой среды

$$\Delta = \frac{J_1 J_2 H H'}{\gamma_0^2} \left\{ \left[\frac{\lambda_1 \gamma_1^2}{k} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon}} \operatorname{tg} \theta - \frac{n}{a \mu} \left(\frac{\beta \lambda_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon}}{k} - \epsilon \frac{J_1'}{J_1} \right) \right] \times \right. \\ \times \left(\frac{n \beta}{a} - \gamma_2^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{k \sqrt{\epsilon \mu_2} \lambda_2 J_2'}{J_2} \right) - \left[\frac{\lambda_1 \gamma_2^2}{k} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon}} \operatorname{tg} \theta - \frac{n}{a \mu} \left(\frac{\beta \lambda_2 \sqrt{\mu_2 \epsilon}}{k} - \epsilon \frac{J_2'}{J_2} \right) \right] \times \\ \times \left(\frac{n \beta}{a} - \gamma_1^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{k \sqrt{\epsilon \mu_2} \lambda_1 J_1'}{J_1} \right) + \frac{\gamma_0^2 k \sqrt{\epsilon \mu_2}}{k} \left[\frac{n^2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{\mu a} + \frac{\gamma_1^2 \lambda_2 J_2'}{J_2} - \frac{\gamma_2^2 \lambda_1 J_1'}{J_1} \right] \right\}; \quad (13)$$

$$\delta_{2,1,2} = \frac{i k H' \delta_{1,1,2}}{\tau_0 \gamma_0^2 H};$$

$$\delta_{1,1,2} = - \frac{\tau_0}{k} J_{2,1} H \left[\frac{n \beta}{a} - \gamma_{2,1}^2 \operatorname{tg} \theta + k \sqrt{\epsilon \mu_2} \lambda_{2,1} \frac{J_{2,1}'}{J_{2,1}} \right];$$

 ϵ , μ , χ , μ_2 — диэлектрическая и магнитная проницаемости феррита.

Пользуясь результатами работы [4], запишем теперь окончательное выражение для мощности теплового излучения на частоте ω с единицы поверхности спирального волновода, заполненного гиротропной средой ($\hbar \omega \ll kT$):

$$P_{\omega} = \frac{T}{\pi^2 a^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^k \frac{d\beta}{\gamma_0^2 |\Delta|^2} (-1)^{i+k} f_{ik} \delta_{ii} \delta_{ik}^*, \quad (14)$$

где в случае плазмы

$$f_{ik} = \frac{\epsilon_i^*}{|\epsilon_z|} \gamma_1^2 \gamma_k^2 \lambda_i \lambda_k^* I_1^{ik} + k^2 [\epsilon^* (1 + b_i b_k^*) - \eta^* (b_i + b_k^*)] I_2^{ik} + \\ + \pi k^2 [\epsilon^* (b_i + b_k^*) - \eta^* (1 + b_i b_k^*)] I_3^{ik}, \quad (15)$$

а в случае феррита

$$f_{ik} = \gamma_1^2 \gamma_k^2 \left(\epsilon^* + \mu_2^* \lambda_i \lambda_k^* \left| \frac{\epsilon}{\mu_2} \right| \right) I_1^{ik} + \{ \epsilon^* (\beta^2 + k^2 \lambda_i \lambda_k^* |\epsilon \mu_2|) + k^2 |\epsilon|^2 [\mu^* (1 + b_i b_k^*) -$$

$$-x''(b_i + b_k^*)\} I_2^{ik} + nk^2 |\varepsilon|^2 \left\{ \frac{\beta \varepsilon'' [k_1 V_{\varepsilon \mu_2} + \lambda_k^* V_{\varepsilon^* \mu_2}]}{k_1 |\varepsilon|^2} + \right. \\ \left. + \mu''(b_i + b_k^*) - x''(1 + b_1 b_2^*) \right\} I_3^{ik}, \quad (16)$$

причем

$$I_1^{ik} = \frac{J_{ni} J_{nk}^{*'} - J_{ni}' J_{nk}^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a; \quad I_3^{ik} = J_{ni} J_{nk}^*; \quad I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 J_{ni} J_{nk}^{*'} - \gamma_k^{*2} J_{nk}^* J_{ni}'}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}}. \quad (17)$$

Формула (14) допускает расчет мощности теплового излучения на электронно-вычислительных машинах или приближенными методами. Существенно то, что эта формула содержит полный спектр колебаний с индексами n . В рассматриваемом случае спирального волновода колебание с индексом n является преобладающим в условиях n -ого пространственного резонанса.

4. Рассмотрим теперь наиболее интересный случай тонкого цилиндра ($\gamma_0 a \ll 1$). Пользуясь приближенными значениями функций Бесселя для малых аргументов, найдем в случае спирального волновода с плазмой

$$\rho_{\omega 0} = a \frac{\varepsilon'' k^4 T}{8\pi^2} \int_{-k}^k \frac{\gamma_0^2 d\beta}{\left[2\gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta \ln \frac{\gamma_0 a}{2} - k^2 \right]^2}. \quad (18)$$

При условии

$$\frac{k^2}{2\gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta \ln \frac{\gamma_0 a}{2}} \gg 1,$$

имеющем место при малых $\operatorname{tg} \theta$, из (18) получим

$$\rho_{\omega 0} = \frac{k^3 T \varepsilon''}{6\pi^2} a. \quad (19)$$

Для $n = 1$ из общей формулы найдем

$$\rho_{\omega 1} = a^3 \frac{k^3 (\varepsilon'' - \gamma_0'')}{6\pi} T \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (20)$$

Если спиральный волновод заполнен ферритовой средой при продольном подмагничивании, то

$$\rho_{\omega 0} = \frac{\mu'' k^4 T}{2\pi^2 a} \operatorname{tg}^2 \theta \int_{-k}^k \frac{\gamma_0^2 d\beta}{\left[2\gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta \ln \frac{\gamma_0 a}{2} - k^2 \mu_2 \right]^2}. \quad (21)$$

При условии

$$\frac{k^2 \mu_2}{2 \operatorname{tg}^2 \theta \gamma_0^2 \ln \frac{\gamma_0 a}{2}} \gg 1$$

$$\rho_{\omega 0} = \frac{2\mu_2'}{3\pi^2 a^2 |\mu_2|^2} T \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (22)$$

Для $n = 1$

$$\rho_{\omega 1} = \frac{2k^3 (\mu'' - \chi'') T}{3\pi^2 \chi - \mu - 1} a. \quad (23)$$

Колебания с $n > 1$ дают вклад в мощность теплового излучения, пропорциональный a^{2n+1} , и в рассматриваемом случае тонкого цилиндра могут не учитываться.

Формулы (18) — (23) чрезвычайно просты и дают наглядное представление о мощности теплового излучения спирального волновода с гиротропной средой.

5. До сих пор мы предполагали, что какой-либо зазор между спиралью и гиротропной средой отсутствует, тогда как реально наибольший интерес представляет случай, когда спираль отделена от гиротропной среды диэлектрическим промежуточком. Так, например, плазма обычно заключена в стеклянную трубку, на которой располагается спиральный проводник. Теоретически такая задача будет отличаться от предыдущей тем, что теперь необходим учет полей в пространстве между спиралью и гиротропной средой, а также необходимо учесть мощность теплового излучения в этом пространстве. Предположим, что диэлектрический слой имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_d и магнитную проницаемость μ ; но собственным тепловым излучением этого слоя можно пренебречь. Пусть радиус объема, занятого плазмой, будет равен a , радиус спирали — b . Тогда поля в пространстве $a < r < b$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} E_z &= C_1 H_n^{(1)} + C_2 H_n^{(2)}; & H_z &= D_1 H_n^{(1)} + D_2 H_n^{(2)}; \\ E_r &= -\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{n^2}{r} (C_1 H_n^{(1)} + C_2 H_n^{(2)}) + ik_\mu (D_1 H_n^{(1)'} + D_2 H_n^{(2)'}) \right\}; \\ H_r &= -\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{n^2}{r} (D_1 H_n^{(1)} + D_2 H_n^{(2)}) - ik_{\epsilon_d} (C_1 H_n^{(1)'} + C_2 H_n^{(2)'}) \right\}; \\ H_n^{(1,2)} &= H_n^{(1,2)}(\gamma r); & \gamma^2 &= k^2 \epsilon_d \mu - \beta^2. \end{aligned} \quad (24)$$

К четырем граничным условиям при $r = b$ теперь необходимо добавить еще четыре условия при $r = a$, состоящие в равенстве тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела плазма — диэлектрик.

Эта система из восьми уравнений для восьми неизвестных постоянных A_i, B_i, C_i, D_i позволяет выразить все постоянные в виде линейных функционалов от \vec{K} . В частности, B_i , как и ранее, выражается в виде (11), но теперь

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_1 \left\{ \left(\frac{ikH'}{\gamma_0} Q_2 + \tau_0 H R_2 \right) (S_1 H_{2b} - S_2 H_{1b}) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{ikH'}{\gamma_0} Q_1 + \tau_0 H R_1 \right) (S_1 H_{1b} - S_3 H_{2a}) \right\} + \frac{ikHH'}{\gamma_0} (S_1 S_4 - S_2 S_3); \\ \delta_{1,2} &= \frac{4iak^2 a H'}{\pi \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_0^2} \left[\nabla_{3,4} H_{2a} H_{1b} - \Delta_{3,4} H_{1a} H_{2b} - \frac{ik\tau_0}{\tau_1 \tau_2} (\nabla_{1,2} H_{2a} H'_{1b} - \Delta_{1,2} H_{1a} H'_{2b}) \right]; \\ \delta_{21,2} &= -i \frac{\tau_0 \gamma_0^3 H}{k H^2} \delta_{1,2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \frac{1}{J_{1,2}} \left\{ \frac{\gamma^2 \sqrt{\epsilon_2} J'_{2,1}}{\gamma_1 \gamma_2 J_{2,1}} - \frac{\gamma_{2,1}^2 \sqrt{\epsilon_2} H'_{1,2}}{\gamma_{1,2} H_{1,2}} + \frac{n k \lambda_{2,1}}{a^2 \gamma_1 \gamma_2} (\gamma_{2,1}^2 \epsilon_d \mu - \epsilon_2 \gamma^2) \right\}; \\ \Delta_{3,4} &= \frac{1}{J_{3,4}} \left\{ -\frac{i \lambda_{21} \sqrt{\epsilon_2} \gamma^2 J'_{21}}{\gamma_1 \gamma_2 J_{3,1}} + \frac{i \lambda_{2,1} \gamma_{2,1} \epsilon_d H'_{12}}{\gamma_{1,2} H_{12}} + \frac{i n \beta \sqrt{\epsilon_2} (\gamma^2 - \gamma_{2,1}^2)}{a k \gamma_1 \gamma_2} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражения для ∇_i получаются заменой H_{ia} на H_{2a} в соответствующих Δ_i :

$$Q_{1,2} = \frac{kb}{\gamma_0^2} H' H'_{2,1b} + \frac{n_1^2 \gamma_1^2}{k \mu_1^2} H H_{2,1b}; \quad R = -jb \left(\frac{\epsilon}{\gamma_0} H H_{2,1b} - \frac{\gamma^2}{\mu_1^2} H' H_{2,1b} \right);$$

$$S_{1,4} = \frac{\gamma^2 a}{k \mu} H_{2,1a}^2 (x^2 - \alpha_{1,2} \rho_2) - \alpha \left(\frac{k \epsilon_a b}{\gamma^2} H_{1b} H'_{2b} - \frac{n_3^2}{k \mu} H_{1b} H_{2b} \right);$$

$$S_{2,3} = \frac{\gamma^2 a}{k \mu} H_{2,1a}^2 (x^2 - \alpha_{2,1} \rho_{2,1}) - \alpha \left(\frac{k \epsilon_a b}{\gamma^2} H_{2,1b}^2 - \frac{n_3^2}{k \mu} H_{2,1b}^2 \right);$$

$$\alpha = \frac{n_3^2}{a \gamma^2} - \frac{k \sqrt{\epsilon_2}}{\gamma_1^2 (l_2 - l_1)} \frac{J_1'}{J_1} + \frac{k \sqrt{\epsilon_2}}{\gamma_2^2 (l_2 - l_1)} \frac{J_2'}{J_2} + \frac{n_3^2 (\gamma^2 - k^2 \epsilon) \epsilon_2}{a \gamma_1^2 \gamma_2^2};$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{ik \epsilon_a}{\gamma^2} \frac{H'_{1,2a}}{H_{1,2a}} - \frac{ik \epsilon_2 l_1}{\gamma_1^2 (l_2 - l_1)} \frac{J_1'}{J_1} + \frac{ik \epsilon_2 l_2 J_2'}{\gamma_2^2 (l_2 - l_1) J_2} + \frac{ink^2 \gamma_1^2 \epsilon_2}{a \gamma_1^2 \gamma_2^2};$$

$$\rho_{1,2} = \frac{ik \mu_a}{\gamma^2} \frac{H'_{1,2a}}{H_{1,2a}} - \frac{ik l_1}{\gamma_1^2 (l_2 - l_1)} \frac{J_1'}{J_1} + \frac{ik l_1}{\gamma_2^2 (l_2 - l_1)} \frac{J_2'}{J_2} - \frac{ink^2 \gamma_1^2 \epsilon_2}{a \gamma_1^2 \gamma_2^2};$$

$$H_{ia} = H_a^{(i)}(\gamma a), \quad H_{ib} = H_b^{(i)}(\gamma b), \quad H = H_a^{(i)}(\gamma_0 b).$$

Подставляя (24) в (14), получим мощность теплового излучения системы плазма — диэлектрик — спираль в свободное пространство.

Нетрудно видеть, что при $b = a$ (24) переходит в (12).

Поток мощности теплового излучения в зазоре состоит из суммы потока от плазмы и отраженного потока от спирали. В этом нетрудно убедиться, подставляя поля (24) в обычные выражения для потока мощности с единицы длины цилиндра:

$$p_\omega = \frac{c r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\beta^3 d\beta_1 \operatorname{Re} (E_z H_z^* - E_z H_\varphi^*). \quad (27)$$

Используя (24), найдем

$$p_\omega = \frac{2\omega}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-k \sqrt{\mu \epsilon_d}}^{k \sqrt{\mu \epsilon_d}} [\mu (|\bar{D}_1|^2 - |\bar{D}_2|^2) + \epsilon_a (|\bar{C}_1|^2 - |\bar{C}_2|^2)] \frac{d\beta^3}{\gamma^2} - \right. \\ \left. - (-1)^n \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{-k \sqrt{\mu \epsilon_d}} \frac{d\beta^3}{\gamma^2} (\mu D_1 D_2^* + \epsilon_a C_1 C_2^*) + \int_{k \sqrt{\mu \epsilon_d}}^{\infty} \frac{d\beta^3}{\gamma^2} (\mu D_1 D_2^* + \epsilon_a C_1 C_2^*) \right] \right\}. \quad (28)$$

6. Результаты, полученные в настоящей работе, показывают, что тепловое излучение спирального волновода с ферритом или плазмой сильно зависит от внешнего постоянного магнитного поля и геометрических параметров. Для случая тонкого цилиндра эта зависимость приобретает весьма простой вид и описывается формулами (18)—(23). Зависимость теплового излучения от магнитного поля может, в частности, использоваться для эффективного управления мощностью газоразрядных генераторов шума.

Следует подчеркнуть, что методом, изложенным в работе, может быть вычислена не только мощность теплового излучения, но и плотность флуктуационной энергии в рассматриваемой системе. При этом полная

энергия состоит из энергии бегущих волн и энергии квазистационарного теплового поля. Последняя может быть вычислена только с помощью общей теории электромагнитных флуктуаций, последовательно примененной в настоящей работе и к определению мощности теплового излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, С. М. Рытов. ЖЭТФ, 23, 246, 1952; С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд-во АН СССР, 1953.
 2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
 3. И. П. Якименко. «Радиотехника и электроника», 9, 11, 1968, 1964.
 4. И. П. Якименко. «Радиофизика», 8, 3, 476 1965.
 5. И. П. Якименко. Тепловое излучение ферритового цилиндра (стр. 100 настоящего сборника).
-

ПОНДЕРОМОТОРНОЕ ДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВОЛНОВОДНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В. Г. Орлов, В. Д. Кукуш

Со времени классических исследований П. Н. Лебедева [1], посвященных пондеромоторному действию электромагнитных волн на резонаторы, физика и техника далеко шагнули вперед. В радиотехнике СВЧ широко используются колебательные системы с распределенными параметрами — отрезки волноводных и коаксиальных линий, объемные резонаторы и т. д. Однако до настоящего времени вопрос пондеромоторного взаимодействия электромагнитных волн с колебательными системами такого типа не изучался. Исключением является работа Р. А. Валитова [2], в которой рассмотрено пондеромоторное действие плоской электромагнитной волны на резонансный диполь в свободном пространстве.

Настоящая статья посвящена исследованию пондеромоторного действия на волноводные резонаторы, образованные отрезком регулярного волновода между реактивными диафрагмами. Оговоримся, что нас интересовало не распределение сил по поверхности резонатора, а их равнодействующая.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Расчет сил на волноводный резонатор проходного типа

Пусть имеется волноводная линия передачи прямоугольного сечения, работающая на основном типе волны. В волноводе установлены две тонкие реактивные диафрагмы на некотором расстоянии друг от друга, образующие волноводный резонатор проходного типа. Нагрузка и генератор считаются согласованными.

Задача состоит в определении механического действия распространяющейся волны на резонатор. Эту задачу можно свести к определению сил, действующих на стенки отрезка волновода и диафрагмы.

Очевидно, результирующая сила, действующая на стенки волновода, равна нулю. Это понятно из тех соображений, что поле у противоположных стенок волновода одинаково. Следовательно, одинаковы и силы, действующие на противоположные стенки. Поскольку эти силы действуют в противоположные стороны по отношению к отрезку волновода, их равнодействующая равна нулю.

Определим силы, действующие на торцы проходного резонатора (диафрагмы).

Расчет сил осуществим, используя соотношение (103.5) работы [3] для давления света на отражающую или поглощающую поверхность в

свободном пространстве. Как известно, величина давления (p) равна сумме средних за период плотностей потока энергии падающей (\bar{S}^+) и отраженной (\bar{S}^-) волн, отнесенной к скорости распространения света (c):

$$p = \frac{1}{c} (S^+ + S^-). \quad (1)$$

Очевидно, (1) будет справедлива и для расчета давления электромагнитной волны на неоднородность в волноводе. При этом, естественно, необходимо учитывать дисперсию в волноводе.

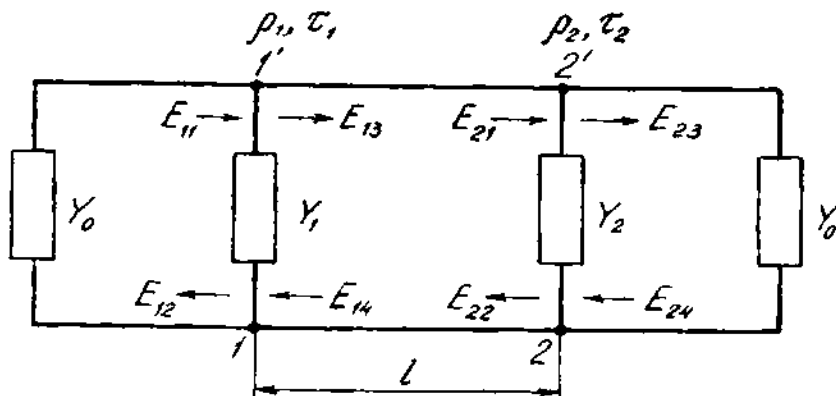


Рис. 1. Эквивалентная схема проходного резонатора.

В общем случае волновода с несколькими неоднородностями результирующую силу, действующую на n -ую неоднородность, можно записать так:

$$F_n = \frac{1}{V_\phi} [(P_{n1} + P_{n2}) - (P_{n3} + P_{n4})], \quad (2)$$

где P_{n1} и P_{n2} — мощности волн, распространяющихся в противоположные стороны в волноводе слева от неоднородности;

P_{n3} и P_{n4} — мощности волн, распространяющихся в противоположные стороны справа от неоднородности;

V_ϕ — фазовая скорость распространения.

Эквивалентная схема рассматриваемой задачи показана на рис. 1. Проходной резонатор образован отрезком линии, ограниченным реактивными диафрагмами в сечениях 1—1 и 2—2, представленными на схеме в виде сосредоточенных реактивных проводимостей Y_1 и Y_2 . Генератор и нагрузка согласованы.

Поскольку сечение волновода неизменно, то величины мощности, входящие в (2), можно представить как

$$P_{ni} = \frac{|E_{ni}|^2}{2Z_0}, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$;

Z_0 — характеристическое сопротивление волновода;

E_{ni} — амплитуды волн, согласно эквивалентной схеме рис. 1.

В таком случае (2) может быть записано так:

$$F = \frac{1}{2V_\phi} \cdot \frac{1}{Z_0} [(|E_{n1}|^2 + |E_{n2}|^2) - (|E_{n3}|^2 + |E_{n4}|^2)]. \quad (4)$$

И задача сведена к определению E_{ni} .

Выразим амплитуды E_{ni} через E_{11} , которая определяется генератором и является заданной. Понятно, что мощность, отдаваемая генератором в согласованную нагрузку, будет

$$P_0 = \frac{|E_{11}|^2}{2Z_0}.$$

Для общности рассмотрения положим, что отрезок волновода проходного резонатора обладает потерями, характеризуемыми затуханием α . Потери в волноводах, соединяющими генератор и нагрузку с резонатором, пренебрегаем, хотя их влияние может быть легко учтено.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} E_{12} &= \frac{E_{11} \rho_1 + \tau_2 \rho_1^{-2\gamma l} \cdot e^{i2\psi_1}}{1 - \rho_1 \tau_2 e^{-2\gamma l}} \\ E_{13} &= \frac{E_{11} \tau_1}{1 - \rho_1 \tau_2 e^{-2\gamma l}} \\ E_{14} &= \frac{E_{11} \tau_1 e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_1 \tau_2 e^{-2\gamma l}} \\ E_{21} &= \frac{E_{11} \tau_1 e^{-\gamma l}}{1 - \rho_1 \tau_2 e^{-2\gamma l}} \\ E_{22} &= \frac{E_{11} \tau_1 \rho_2 e^{-\gamma l}}{1 - \rho_1 \tau_2 e^{-2\gamma l}} \\ E_{24} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2$ — коэффициенты отражения и передачи диафрагм 1 и 2;

$\gamma = \alpha + j\beta$ — постоянная распространения;

β — фазовая постоянная распространения;

ψ_1 — фаза коэффициента передачи диафрагмы 1.

Находя модули системы (5) и подставляя в (4), получим силы, действующие на первую и вторую диафрагмы:

$$F_1 = \frac{2P_0 \lambda_0}{c \cdot l_b} \frac{\rho_1^2 - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l) + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-4\alpha l}}{1 - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l) + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-4\alpha l}}; \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{2P_0 \lambda_0}{c \cdot l_b} \frac{|\tau_1 \rho_2|^2 e^{-2\alpha l}}{1 - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l) + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-4\alpha l}}, \quad (7)$$

где φ_1, φ_2 — фазы коэффициентов отражения диафрагм 1 и 2,

λ_0 и λ_b — длина волны в свободном пространстве и волноводе.

Если $|\rho_1| = 1$, т. е. диафрагма 1 полностью перекрывает волновод, то из (6) получим силу, действующую на короткозамыкающую пластину:

$$F_{к.з} = \frac{2P_0 \lambda_0}{c \cdot l_b}. \quad (8)$$

Условие резонатора в проходном резонаторе записывается как

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l &= 2\pi i. \\ (i = 1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

В этом случае силы, действующие на торцовые стенки резонатора (т. е. на первую и вторую диафрагмы), будут:

$$F_{1p} = F_{к.з} \left[1 - \frac{1 - |\rho_1|^2}{(1 - |\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l})^2} \right]; \quad (10)$$

$$F_{2p} = F_{к.з} \left[\frac{|\tau_1|^2 |\rho_2|^2 e^{-2\alpha l}}{(1 - |\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l})^2} \right]. \quad (11)$$

Результирующая сила, действующая на проходной резонатор, в общем случае равна:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 e^{-2\alpha l} - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l) + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-2\alpha l} (e^{-2\alpha l} - 1)}{1 - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\beta l) + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-4\alpha l}}. \quad (12)$$

При резонансе эта сила будет:

$$F_{\Sigma p} = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 e^{-2\alpha l} - 2|\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l} + |\rho_1 \rho_2|^2 e^{-2\alpha l} (e^{-2\alpha l} - 1)}{(1 - |\rho_1 \rho_2| e^{-2\alpha l})^2}. \quad (13)$$

Если абсолютные значения коэффициентов отражения обеих диафрагм равны, т. е. $|\rho_1| = |\rho_2| = |\rho|$, то

$$F_{\Sigma p} = F_{к.з} \frac{|\rho|^2 (1 - e^{-2\alpha l})}{1 - |\rho|^2 e^{-2\alpha l}}, \quad (14)$$

когда $\alpha = 0$; $F_{\Sigma p} = 0$.

Коэффициенты отражения ρ_1 и ρ_2 могут быть выражены через соответствующие реактивные проводимости диафрагм Y_1 и Y_2 . В общем случае эти проводимости могут носить как индуктивный, так и емкостной характер, т. е. $Y_1 = \pm jb_1$; $Y_2 = \pm jb_2$.

Поэтому

$$|\rho_i| = \frac{b_i}{\sqrt{4 + b_i^2}}; \\ \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{2}{b_i} \quad \text{при } Y_i = jb_i; \\ \operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{2}{b_i} \quad \text{при } Y_i = -jb_i; \\ \psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Здесь через b_i обозначена нормированная реактивная проводимость диафрагмы.

Подставляя (15) в (6), (7), (10), (11), (12), (13), (14), получим значения соответствующих сил в зависимости от реактивных проводимостей диафрагм. Используя (9), можно в каждом конкретном случае определить резонансную длину резонатора.

На рис. 2 а, б показаны расчетные зависимости силы на резонатор и его элементы при отсутствии потерь; на рис. 3 а, б — то же, но при наличии потерь.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Если реактивные проводимости диафрагм равны по абсолютной величине, то равнодействующая сила на проходной резонатор без по-

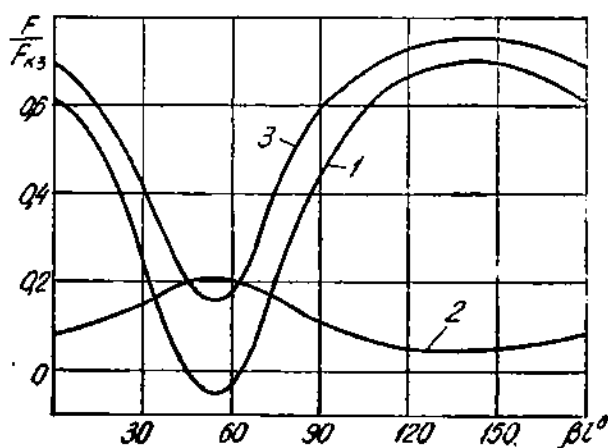
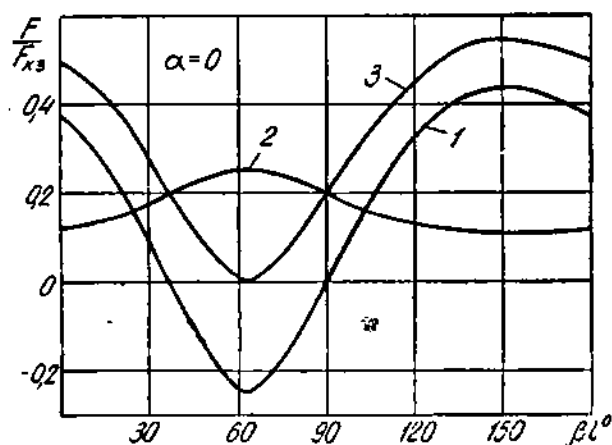


Рис. 2. Расчетные кривые относительного изменения сил, действующих на проходной резонатор и его элементы в функции длины резонатора, при отсутствии потерь:

1 — первая диафрагма, 2 — вторая диафрагма, 3 — результирующая сила на резонатор: а) случай одинаковых диафрагм; б) случай различных диафрагм.

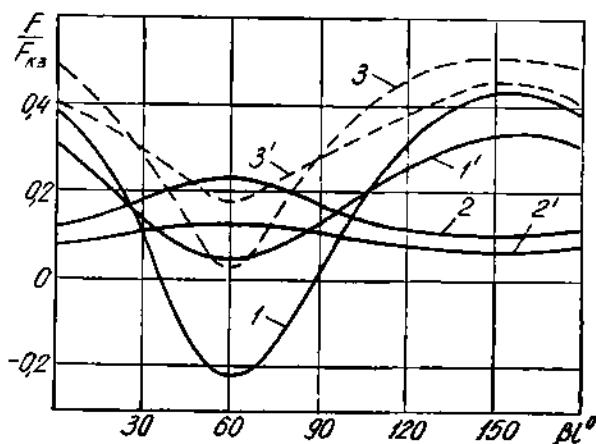


Рис. 3. Расчетные кривые относительного изменения сил, действующих на проходной резонатор и его элементы при наличии потерь. Диафрагмы одинаковые.

Кривые 1, 2, 3 — соответствуют потерям в резонаторе: $\alpha = 1$ дб/м; кривые 1', 2', 3' — $\alpha = 10$ дб/м; $b_1 = b_2 = 1$.

ть при резонансе равна нулю; при этом на противоположные стенки резонатора действуют силы, равные по величине и противоположные по направлению.

2. При наличии потерь равнодействующая сила не может быть равной нулю.

3. Сила, действующая на диафрагму, ближайшую к генератору, в зависимости от настройки резонатора может изменять знак и при резонансе всегда действует в сторону генератора. Это объясняется накоплением энергии в резонаторе. Сила, действующая на диафрагму, ближайшую к нагрузке, знака не изменяет — всегда действует в сторону нагрузки.

4. Если реактивные проводимости диафрагм не равны по абсолютной величине, то равнодействующая сила на проходной резонатор не будет равна нулю.

§ 2. Расчет сил на концевой резонатор

Выражение для сил, действующих на концевой резонатор, можно получить из предыдущих выражений, положив $\rho_2 = 1$ ($b_2 = \infty$). Тогда имеем

$$F_1 = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 (1 + e^{-4\alpha l}) + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 - 2\beta l)}{1 + |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l} + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 - 2\beta l)}. \quad (16)$$

На диафрагму 2, которая в данном случае является короткозамыкающей пластиной, будет действовать сила

$$F_2 = F_{к.з} \frac{(1 - |\rho_1|^2) e^{-2\alpha l}}{1 + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 - 2\beta l) + |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l}}. \quad (17)$$

Результирующая сила на концевой резонатор представляет сумму сил (16) и (17):

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 (1 + e^{-4\alpha l}) + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 - 2\beta l)}{1 + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_1 - 2\beta l)} + \frac{e^{-2\alpha l} - |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l}}{|\rho_1|^2 e^{-4\alpha l}}. \quad (18)$$

Если $\alpha = 0$, $F_{\Sigma} = F_{к.з}$.

Резонанс наступает при выполнении условия

$$\varphi_1 - \pi - 2\beta l = 2\pi n \quad (19)$$

или

$$\varphi_1 - 2\beta l = \pi(2n + 1), \quad (20)$$

где

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

$$F_{1p} = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 (1 + e^{-4\alpha l}) + 2|\rho_1| e^{-2\alpha l}}{(1 - |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l})^2}; \quad (21)$$

$$F_{2p} = F_{к.з} \frac{(1 - |\rho_1|^2) e^{-2\alpha l}}{(1 - |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l})^2}; \quad (22)$$

$$F_{\Sigma p} = F_{к.з} \frac{|\rho_1|^2 (1 - e^{-2\alpha l}) + e^{-2\alpha l} (1 - 2|\rho_1| e^{-2\alpha l} + |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l})}{(1 - |\rho_1|^2 e^{-4\alpha l})^2}. \quad (23)$$

Очевидно, при отсутствии потерь результирующая сила при резонансе остается постоянной величиной:

$$F_{\Sigma p} = F_{к.з}. \quad (24)$$

Соотношения (15) остаются действительными и для данного случая.

На рис. 4 приведены теоретические кривые относительного изменения силы, действующей на концевой резонатор и его элементы при отсутствии потерь, на рис. 5 — те же зависимости при наличии потерь.

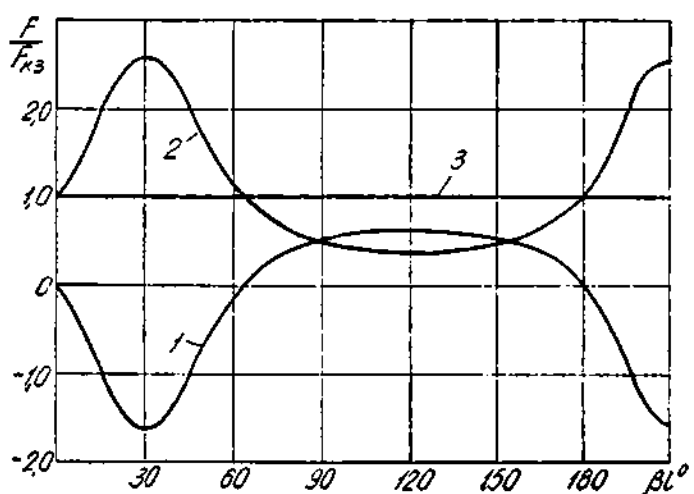


Рис. 4. Зависимость относительного изменения силы, действующей на концевой резонатор и его элементы при отсутствии потерь:

1 — сила на диафрагму связи ($b_1=1$); 2 — сила на короткозамыкающую створку; 3 — результирующая сила на резонатор.

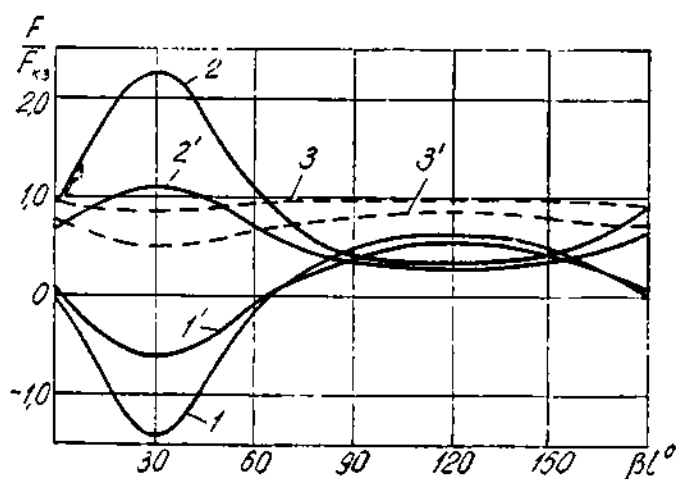


Рис. 5. Зависимость относительного изменения силы, действующей на концевой резонатор и его элементы при наличии потерь ($b_1=1$).

Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\alpha = 1$ об/м. Кривые 1', 2', 3' — $\alpha = 10$ об/м.

Анализ концевой резонатора позволяет сделать следующие выводы:

1. Результирующая сила на концевой резонатор без потерь всегда равна $F_{к.з.}$

2. Сила на торцовые стенки концевой резонанса может во много раз превышать $F_{к.в.}$. При этом сила на диафрагму 1 будет действовать в сторону генератора, а сила на короткозамкнутую стенку всегда действует в сторону, противоположную генератору.

3. Наличие потерь приводит к уменьшению результирующей силы, пределом которой при росте потерь будет величина $F_{к.з}/2$.

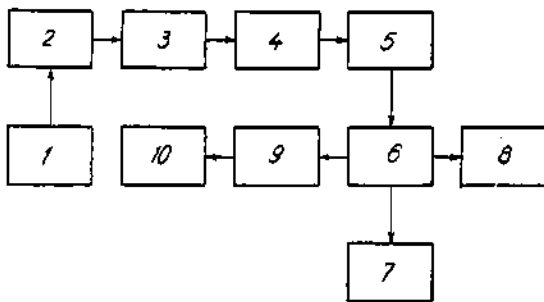


Рис. 6. Блок-схема измерительной установки:

1 — магнетронный генератор; 2 — фиксированный attenuator; 3 — вольтмер; 4 — ponderomotorный измеритель мощности; 5 — ферритовый вентиль; 6 — устройство для размещения исследуемого тела в волноводе и измерения силы; 7 — стабилизированный источник постоянного напряжения; 8 — вольтметр; 9 — фазораспределитель; 10 — волноводные нагрузки.

Центральной частью устройства является подвесная система, укрепленная на двух тонких вертикальных растяжках 2 из фосфористой бронзы. Подвесная система состоит из вертикального металлического стержня 1, к которому в горизонтальной плоскости крепятся:

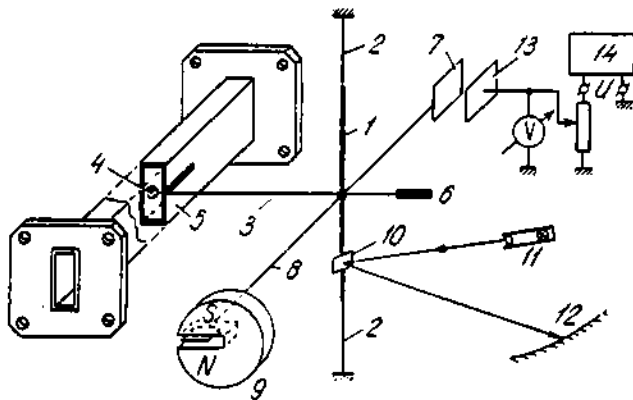


Рис. 7. Устройство для измерения силы, действующей на тело в волноводе.

1) кварцевый стержень 3 с укрепленным на нем тонким, хорошо проводящим диском (или пластиной) 4, размещаемым в волноводе 5, и противовесом 5;

2) металлический стержень с крылышком 7 служит для управления подвесной системы с помощью электростатического поля;

II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Описание установки

Задача экспериментального исследования заключалась в проверке полученных выше количественных соотношений. Решение ее потребовало создания специальной установки, блок-схема которой показана на рис. 6.

Остановимся подробнее на описании устройства для измерения абсолютной величины силы, действующей на торцовые стенки и на резонатор в целом (рис. 7).

3) металлический стерженек с плоским крылышком 8, находящимся в зазоре постоянного магнита 9, обеспечивает электромагнитное демпфирование колебаний подвесной системы;

4) зеркальце 10, совместно с источником света 10 и шкалой 12 служит для индикации углового положения подвесной системы.

Обращаясь к блок-схеме (рис. 6), можно видеть, что если между 6 и 10 включить щелевую секцию, содержащую хорошо проводящую плоскую пластину, причем эта пластинка может перемещаться вдоль волновода, то мы получаем возможность проводить измерения силы, действующей на переднюю стенку проходного резонатора в зависимости от его длины. Включив указанную секцию между 5 и 6, измеряем силу на вторую стенку проходного резонатора.

Результирующая сила, действующая на резонатор, равна сумме сил на торцовые стенки.

Концевой резонатор получаем, если вместо согласованной нагрузки 10 подключим подвижной короткозамыкающий поршень.

Чувствительность системы индикации позволила поддерживать неизменное положение пластины в волноводе с абсолютной погрешностью менее $7 \cdot 10^{-3}$ мм.

Можно показать, что пондеромоторная сила, действующая на пластину, в волноводе может быть определена из выражения

$$F = \frac{G \cdot \theta_0}{L} \left(\frac{U^2}{U_1^2} - 1 \right), \quad (25)$$

где G — удельный момент кручения растяжек:

U_1 — управляющее напряжение, необходимое для установки подвесной системы в начальное положение, характеризуемое углом θ_0 ;

U_2 — управляющее напряжение, обеспечивающее неизменность углового положения подвесной системы при наличии пондеромоторной силы F ;

L — длина стержня 3 от центра пластины до оси вращения.

Отметим, что применение довольно жестких растяжек ($G = 4,7 \times 10^{-2} \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{град}}$) повышает устойчивость системы против внешних механических воздействий, но несколько снижает чувствительность, которая оказалась равной $\sim 0,5 \cdot 10^{-4}$ дин.

Общая погрешность абсолютных измерений сил, больших $2 \cdot 10^{-3}$ дин, определяется в основном погрешностью измерения удельного момента кручения растяжек и не превышает $\pm 5\%$.

§ 2. Результаты измерений

Измерения сил проводились на частоте 9175 мгц в прямоугольном волноводе сечением 10×23 мм на волне H_{10} . Затухание в тракте составляло величину порядка $0,1 \div 0,15$ дб/м.

Зависимости для сил, рассчитанные с учетом указанных потерь, практически не отличаются от расчетных кривых, полученных в случае нулевых потерь.

На рис. 8 изображены экспериментальные зависимости абсолютного значения сил, действующих на проходной резонатор и его элементы.

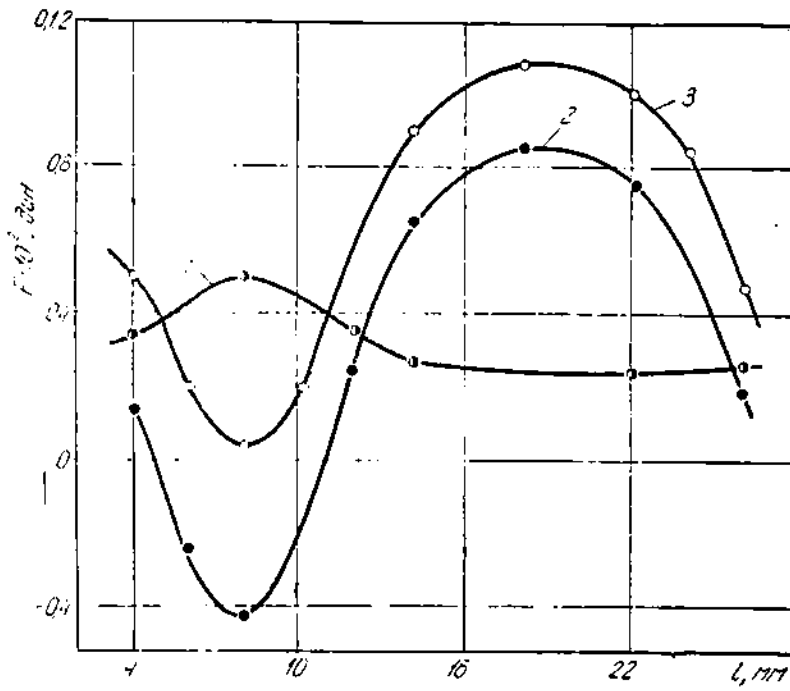


Рис. 8. Характеристика сил, действующих на резонатор и его элементы: 1 — на заднюю стенку, 2 — на переднюю стенку; 3 — на резонатор, $P = 40$ ат, $b_1 = b_2 = 1$, $f = 9175$ мц.

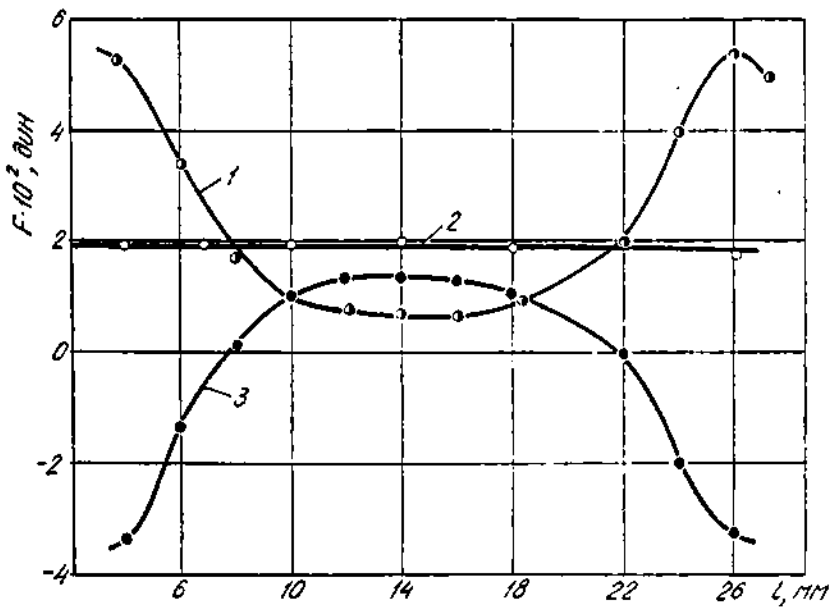


Рис. 9. Характеристика сил, действующих на резонатор и его элементы: 1 — на заднюю стенку, 2 — на резонатор, 3 — на переднюю стенку, $P = 40$ ат, $b = 1$, $f = 9175$ мц.

На рис. 9 приведены аналогичные зависимости для концевой резонатора. При измерении силы на короткозамкнутую стенку концевой резонатора вместо пластины в волноводе измерительного устройства размещалась прямоугольная резонансная рамка, КСВН которой был равен 145 ($\rho = 0,986$).

Результаты эксперимента количественно хорошо совпадают с выводами теоретического исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в настоящей работе, представляют не только познавательный интерес. Они могут быть положены в основу создания новых типов измерительных приборов на СВЧ. Например, явление значительного увеличения силы на элемент объемного резонатора может быть использовано при создании пондеромоторного ваттметра повышенной чувствительности; периодичность действия силы вдоль волновода, равная $\frac{\lambda}{2}$, может быть использована при создании волномера без применения детектора и т. д.

Авторы благодарны старшему научному сотруднику Г. Г. Половникову за полезные советы при создании экспериментальной установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Н. Лебедев. Избр. соч. под ред. проф. А. К. Тимирязева, Изд-во АН СССР, 1949.
2. Р. А. Валитов. Пондеромоторные силы электромагнитных волн в диапазоне СВЧ. «Тр. радиофизич. ф-та Харьковск. ун-та», т. I, 1959.
3. И. Е. Тамм. Основы теории электричества, М., ГИТТЛ, 1954.

О ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СТЕНКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА ПРИ НЕСОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

В. Г. Орлов, В. Д. Кукуш

Закономерности пондеромоторного действия электромагнитной волны на стенки волноводной линии передач изучались рядом авторов [1, 2, 3]. Однако ни в одной из указанных работ нет анализа тех изменений в распределении сил, которые связаны с работой линии передач на несогласованную нагрузку. Этот вопрос имеет, по-видимому, не только познавательный интерес; изучение распределения сил при несогласованной нагрузке позволит расширить область практического применения пондеромоторных эффектов электромагнитного поля.

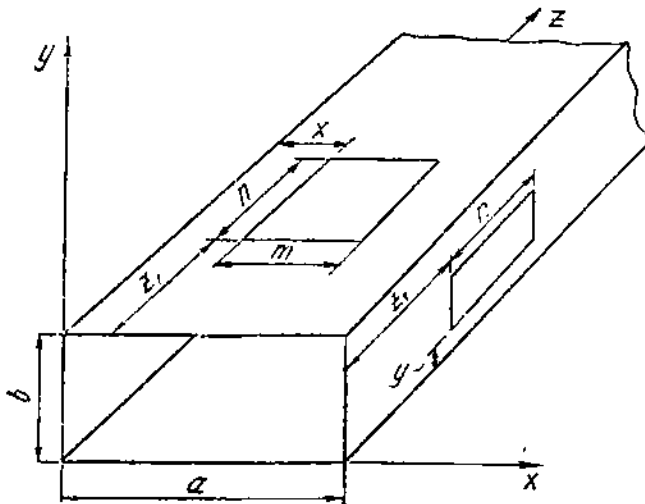


Рис. 1. Изображение рассматриваемой системы.

Настоящее исследование ограничим случаем волны H_{10} в прямоугольном волноводе (рис. 1), стенки которого обладают большой проводимостью. Сущность понятия «большая проводимость» заключается в том, что распределение поля не должно существенно отличаться от идеального при бесконечно большой проводимости стенок.

При этих условиях величина давления на стенки волновода будет численно равна плотности электромагнитной энергии у поверхности стенок. Необходимо только учитывать, что силы, обусловленные электрической и магнитной составляющей поля, действуют во взаимно противоположных направлениях.

Учитывая сказанное, среднее за период СВЧ колебаний давление на горизонтальную стенку волновода выразится так:

$$q_r = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\mu (H_x^2 + H_z^2)}{2} - \frac{\varepsilon E_y^2}{2} \right] dt = \frac{1}{4} \left[\mu (H_{x_0}^2 + H_{z_0}^2) - \varepsilon E_{y_0}^2 \right], \quad (1)$$

где H_x , H_z , E_y — мгновенные значения напряженности электрического и магнитного поля в точке горизонтальной стенки;

H_{x_0} , H_{z_0} , E_{y_0} — амплитудные значения составляющих поля;

μ , ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды.

Распределение амплитуды колебаний вдоль волновода при несогласованной нагрузке подчиняется закону [4]:

$$\begin{aligned} E_{y_0} &= E_{y_0}^+ (1 + |\rho|^2 - 2|\rho| \cos 2\beta z)^{1/2}; \\ H_{x_0} &= H_{x_0}^+ (1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos 2\beta z)^{1/2}; \\ H_{z_0} &= H_{z_0}^+ (1 + |\rho|^2 - 2|\rho| \cos 2\beta z)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $E_{y_0}^+$, $H_{x_0}^+$, $H_{z_0}^+$ — составляющие поля, связанные с падающей волной;

ρ — коэффициент отражения нагрузки;

z — расстояние от минимума электрического поля до рассматриваемой точки поля по оси oz ;

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}.$$

Учтем теперь распределение амплитуд составляющих поля, обусловленных падающей волной, в поперечном сечении волновода:

$$\begin{aligned} E_{y_0}^+ &= E \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \\ H_{x_0}^+ &= E \frac{\beta}{\mu \omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \\ H_{z_0}^+ &= E \frac{\pi}{\omega \mu a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$E = 2 \sqrt{\frac{P Z_0}{ab}};$$

P — мощность падающей волны,

Z_0 — характеристическое сопротивление волновода.

Подставляя в (1) выражения (2) с учетом (3), после очевидных преобразований имеем

$$\begin{aligned} q_r &= \frac{P}{c} \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab} \left\{ (1 + |\rho|^2) \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] + \right. \\ &\left. + 2|\rho| \cos 2\beta z \left[\left(2 \frac{\lambda_{кр}^2}{\lambda_0^2} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражение для давления на вертикальную стенку волновода:

$$q_s = \frac{P}{c} \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab} [1 + |\rho|^2 - 2|\rho| \cos 2\beta z]. \quad (5)$$

Для $|\rho| = 1$, т. е. при чисто стоячей волне, имеем:

$$q_r = \frac{2P}{c} \frac{\lambda_0 \lambda_B}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab} \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \cos 2\beta z \left(2 \frac{\lambda_{кр}^2}{\lambda_0^2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) - 1 \right) \right]; \quad (6)$$

$$q_B = \frac{4P}{c} \frac{\lambda_0 \lambda_B}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab} \sin^2 \beta z. \quad (7)$$

Для согласованной нагрузки

$$q_r = \frac{P}{c} \frac{\lambda_0 \lambda_B}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab} \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right); \quad (8)$$

$$q_B = \frac{P}{c} \frac{\lambda_0 \lambda_B}{\lambda_{кр}^2} \frac{1}{ab}. \quad (9)$$

Распределение давления на стенки волновода показано на рис. 2 (а, б, в); мощность генератора — 1 вт.

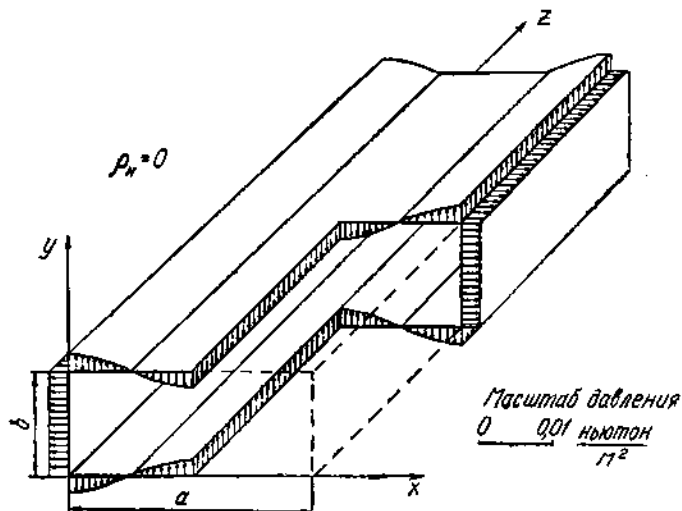


Рис. 2а. Распределение давления на стенки прямоугольного волновода при передаче энергии СВЧ от генератора в нагрузку: нагрузка согласована ($\rho_B = 0$).

Представляет интерес определить равнодействующую сил, действующих на прямоугольный участок горизонтальной стенки. Пусть координаты вершин углов будут $-x, z$; $x+m, z$; $x, z+n$; $x+m, z+n$.

Интегрируя по x (4) в пределах от x до $x+m$ и по z от z до $z+n$, получим:

$$F_r^{\square} = \int_x^{x+m} \int_z^{z+n} q_r dx \cdot dy = \\ = \frac{2P}{c} \frac{\lambda_0 \lambda_B}{\lambda_{кр}^2} \frac{mn}{ab} \left[\frac{|\rho| \lambda_B \psi(z)}{n} \left(\frac{\lambda_{кр}^2}{2\lambda_0^2} + \frac{\lambda_{кр}^2 \alpha \varphi(x)}{4\lambda_0^2 m \pi} - 1 \right) - \frac{a}{m} (1 + |\rho|^2) \varphi(x) \right]; \quad (10)$$

$$\varphi(x) = \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) - \sin \left[\frac{2\pi(x+m)}{a} \right];$$

$$\psi(z) = \sin [2\beta(z+n)] - \sin 2\beta z.$$

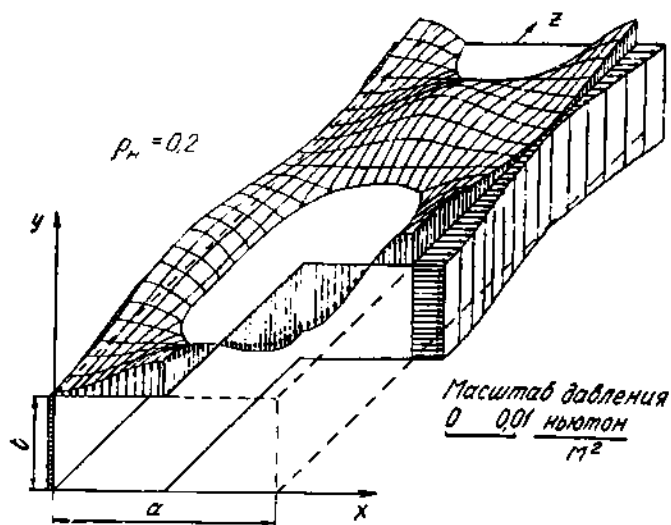


Рис. 2б:
нагрузка не согласована ($\rho_n \neq 0$);

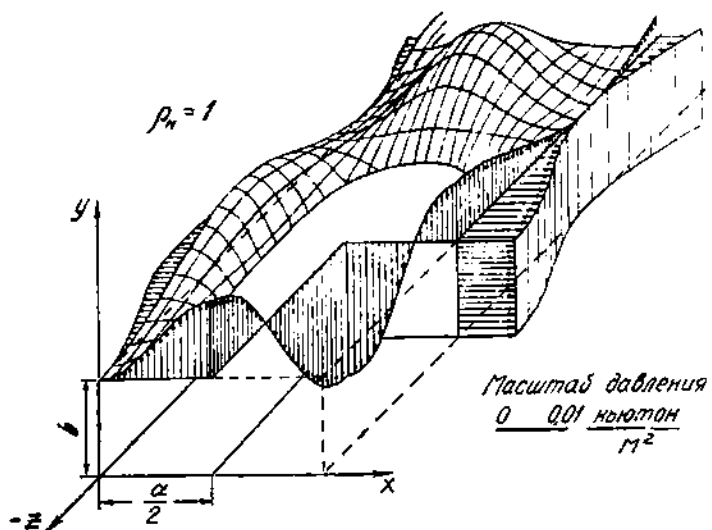


Рис. 2в:
короткое замыкание ($|\rho_n| = 1$).

Поступая аналогично, можно определить силу, действующую на прямоугольный участок вертикальной стенки с размерами $k \times n$:

$$F_{\nu}^{\square} = \int_{\nu}^{y+k} \int_z^{z+n} q_{\nu} d_y dz = \frac{4P}{c} \frac{\lambda_{\nu}^j}{\lambda_{\text{кр}}^2} \frac{kn}{ab} \left[1 + |\rho|^2 - |\rho| \frac{\lambda_{\nu}}{n} \psi(z) \right]. \quad (11)$$

Анализ (10) и (11) позволяет сделать следующие выводы:

1. Сила, действующая на прямоугольный участок горизонтальной стенки с размерами $m = a$, $n = \frac{\lambda_{\nu}}{2}$, при любом ρ равна нулю.

2. Сила, действующая на участок вертикальной стенки с размерами k и $n = \frac{\lambda_{\nu}}{2}$, не зависит от фазы коэффициента отражения нагрузки и равна

$$F_{\nu}^{\square} = \frac{4P}{c} \frac{\lambda_{\nu}^j}{\lambda_{\text{кр}}^2} \frac{kn}{2ab} (1 + |\rho|^2).$$

3. Максимальное значение давления имеет место при $|\rho| = 1$ на середине горизонтальной стенки в точках, соответствующих максимуму электрического поля.

4. Направление силы, действующей на какой-либо участок горизонтальной стенки, изменяется в зависимости от расположения и размеров участка.

5. Направление силы, действующей на какой-либо участок вертикальной стенки, неизменно.

6. При согласованной нагрузке ($\rho = 0$) сила, действующая на участок горизонтальной стенки с размерами a , n , всегда равна нулю.

Следует отметить, что участки горизонтальной стенки волновода при рассогласованной нагрузке испытывают сложные изгибающие усилия, величина и характер которых определяются модулем и фазой коэффициента отражения, размерами и местом расположения данного участка.

Характер и величина механической нагрузки на участки стенок волновода могут быть получены из выражений (4), (5), (10), (11).

В заключение укажем, что полученные результаты могут быть взяты за основу при разработке комплекта измерительной аппаратуры (измеритель проходящей мощности, измеритель к. с. в. длины волны и т. п.) для применения в волноводных трактах с большим уровнем мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Nott on. Broad — band power — measuring methods at microwave frequencies, Proc IRE, 1949, July, № 7.
2. В. Г. Пенякова. Ваттметры нового типа. «Радиотехника», 1954, № 5.
3. Б. Г. Билык, Р. А. Валитов. К вопросу об измерении высоких уровней мощности. «Тр. радиофизич. ф-та Харьковск. ун-та», 1959, т. 3.
4. Измерения на сверхвысоких частотах, под ред. В. Б. Штейншлейгера, М., изд-во «Сов. радио», 1962.

МНОГОПОЛЮСНИКИ КАК ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

А. Г. Руткас

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Совокупность точек X (вершин) и отрезков линий Γ (ребер), соединяющих эти точки, называется мультиграфом и обозначается $G = (X, \Gamma)$. В дальнейшем предполагается, что каждому ребру q приписано направление — и тогда оно считается дугой \vec{q} . Цепь — это последовательность ребер q_1, q_2, \dots, q_n , такая, что из вершины ребра q_1 можно, непрерывно двигаясь по ребрам цепи, попасть в вершину ребра q_n , пройдя по всем ребрам последовательности. Цикл Q — это цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной вершине. Цикл, при обходе которого каждая вершина встречается один раз (за исключением начала и конца обхода), называется элементарным. Мультиграф связан, если любые две вершины соединяются хотя бы одной цепью, и двусвязен — когда любые две вершины одновременно принадлежат некоторому элементарному виду. Ребра (дуги) мультиграфа можно перенумеровать: q_1, \dots, q_R .

Циклу Q ставится в соответствие вектор-цикл \vec{Q} , принадлежащий координатному R -мерному пространству H_R . Если при обходе Q дуга q_i проходится r_i раз в направлении ее ориентации и s_i раз — в противоположном, то $\vec{Q} = (c_1, \dots, c_R)$, где $c_i = r_i - s_i$. Для элементарного цикла $c_i = 0, 1$ или -1 . Циклы Q_1, \dots, Q_M считаются независимыми в случае линейной независимости соответствующих вектор-циклов. Цикломатическое число связного мультиграфа G — это величина $M = |\Gamma| - |X| + 1$, где $|X|$ — количество вершин, $|\Gamma|$ — количество дуг. Известно, что наибольшее число независимых циклов равно M [1]. Всякое M независимых циклов (соответственно вектор-циклов) называется базисом мультиграфа. Связный граф без циклов ($M = 0$) называется деревом.

Через H_M здесь обозначается линейная оболочка некоторых элементарных вектор-циклов $\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M = \{\vec{Q}_k\}_{k=1}^M$, составляющих базис мультиграфа G . Оболочка H_M является M -мерным подпространством координатного пространства H_R , $M < R$. Имеет место

Лемма 1. Если вектор $\vec{Q} = (c_1, c_2, \dots, c_R)$ принадлежит H_M и некоторые его компоненты $c_i = 0$ ($i = i_1, i_2, \dots, i_n$), то в G существует набор независимых элементарных циклов $\{\vec{Q}_k\}_{k=1}^r$ такой, что $\vec{Q} = \sum_{k=1}^r a_k \vec{Q}_k$, а у вектор-циклов $\vec{Q}_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_R^k)$ компоненты $c_i^k = 0$ при всех $i = i_1, i_2, \dots, i_n$; $k = 1, 2, \dots, r$.

При $M = 2$ утверждение леммы более или менее легко проверяется: общий результат устанавливается по индукции.

Электрическая цепь — это мультиграф $G = (X, \Gamma)$, у которого каждая дуга q_i заменена электрическим двухполюсником с током I_i и напряжением U_i . Часть цепи G называется передающим многополюсником (4 m -полюсником) Φ , если из G удалены $2m$ двухполюсников, а в Φ указаны внешние клеммы, откуда они удалялись (сх. 1). Исходная цепь G называется замкнутым многополюсником Φ . Предполагается, что внутренние ребра Φ суть индуктивности и емкости (сх. 2) с дифференциальными уравнениями:

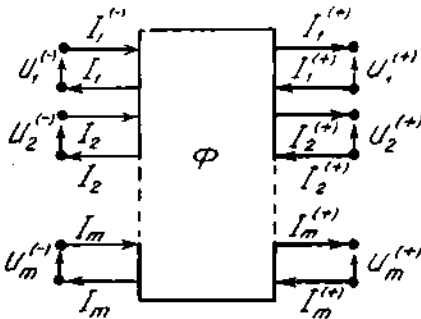


Схема 1.

$$U_{Lj} = L_j \frac{dI_{Lj}}{dt}; \quad I_{Ck} = C_k \frac{dU_{Ck}}{dt}. \quad (1)$$

Току I_i приписывается направление дуги $q_i \in G$; направление напряжения U_i совпадает с направлением I_i на половине внешних ребер (в сх. 1 это напряжение $U_k^{(-)}$) и противоположно на остальных ребрах

($U_k^{(+)}$ в сх. 2). В режиме гармонических колебаний можно перейти к амплитудным значениям токов и напряжений в G , сохранив для них обозначения U_i, I_i . Уравнения (1) переписутся так:

$$U_{Lj} = i\omega L_j I_{Lj}; \quad I_{Ck} = i\omega C_k U_{Ck}. \quad (2)$$

Постулируются также уравнения Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений по циклу Q равна нулю

$$\sum_i U_i = 0, \quad (3)$$

алгебраическая сумма токов в вершине $X_k \in G$ равна нулю

$$\sum_i I_i = 0. \quad (4)$$

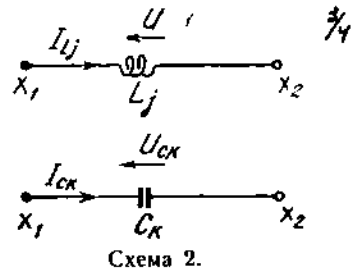


Схема 2.

§ 2. ОПЕРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС

Рассмотрим задачу определения всех токов и напряжений в $G = \Phi$ по заданным величинам $U_1^{(-)}, \dots, U_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \dots, I_1^{(-)}$. Введя векторы $\vec{\varphi}^{(-)} = (U_1^{(-)}, \dots, U_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \dots, I_1^{(-)})$, $\vec{\varphi}^{(+)} = (U_1^{(+)}, \dots, U_m^{(+)}; I_m^{(+)}, \dots, I_1^{(+)})$, $\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L_1}, \dots, \sqrt{L_m} I_{L_m}; \sqrt{C_{\mu+1}} U_{C_{\mu+1}}, \dots, \sqrt{C_N} U_{C_N})$, можно заменить указанную задачу равносильной: найти векторы $\vec{\varphi}^{(-)}$ и $\vec{\psi}$ по заданному $\vec{\varphi}^{(-)}$. Здесь μ — число всех индуктивностей в G , $N - \mu = \gamma$ — число емкостей. В силу линейности уравнений (2), (3), (4) при положительном исходе задачи векторы $\vec{\psi}$, $\vec{\varphi}^{(+)}$ связаны с $\vec{\varphi}^{(-)}$ линейными отображениями (матрицами) $R(\omega)$ и $S(\omega)$:

$$\vec{\psi} = R(\omega) \vec{\varphi}^{(-)}; \quad (5)$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = S(\omega) \vec{\varphi}^{(-)}. \quad (6)$$

Матрица $S(\omega)$ называется передаточной матрицей многополюсника.

Пусть T — квадратная матрица порядка N , элементы которой — комплексные постоянные t_{ik} ; в координатном N -мерном пространстве H матрица T задает линейный оператор T , действующий в H . Аналогично в n -мерном пространстве E с базисом $\vec{a}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{a}_n = (0, \dots, 0, 1)$ некоторая квадратная матрица $J = \|J_{\alpha\beta}\|$ задает оператор J . Согласно определению, $\vec{\psi}$ принадлежит H ($\vec{\psi} \in H$), а при $n = 2m$ $\vec{\varphi}^{(-)}, \vec{\varphi}^{(+)} \in E$. По отношению к многополюснику Φ вектор $\vec{\varphi}^{(-)}$ называется входным, $\vec{\varphi}^{(+)}$ — выходным, $\vec{\psi}$ — вектором внутренних состояний, H — пространством внутренних состояний, E — пространством входов и выходов.

Приведем три определения из теории открытых систем М. С. Лившица [6, 7]:

I. Открытой системой F называется совокупность двух линейных отображений $R(\omega)$ и $S(\omega)$, действующих в соответствии с (5), (6), что схематично можно изобразить так:

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{S(\omega)} E \\ \xleftarrow{R(\omega)} H \end{array}$$

II. Операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ — это совокупность оператора T , оператора J ($J = J^*$, $J^2 = I$) и векторов \vec{e}_α ($\vec{e}_\alpha \in H$), $\alpha = 1, 2, \dots, n$, для которой выполняется соотношение

$$\frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \tag{7}$$

Векторы \vec{e}_α называются каналовыми векторами оператора T .

III. Операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ принадлежит открытой системе F , если он связан с отображениями (5), (6) следующим образом:

$$(T - \omega I) \vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha; \tag{8}$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J \vec{a}_\alpha. \tag{9}$$

где $\varphi_\alpha^{(-)} = (\vec{\varphi}^{(-)}, \vec{a}_\alpha)$ — компоненты вектора $\vec{\varphi}^{(-)}$.

При наличии отображений (5), (6) многополюсник Φ является открытой системой. Всегда ли существует операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$, принадлежащий Φ , и как его записать — вот вопросы, которые следует выяснить в первую очередь. Правые части уравнений (2) выражены через компоненты вектора $\vec{\psi}$; если левые части тоже удастся выразить через компоненты $\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\psi}$ с помощью уравнений Кирхгофа (3), (4), то получается связь (8) между векторами $\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\psi}$. Чтобы одновременно обеспечить соотношение (9), надо иметь соответствующие зависимости между компонентами $\vec{\varphi}^{(+)}$, $\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\psi}$, вытекающие исключительно из (3), (4). Итак, для записи (8) и (9) необходимо из уравнений Кирхгофа (3), (4) получить выра-

жение величин $U_{Lj}, U_{\beta}^{(+)}, I_{ck}, I_{\beta}^{(-)}$ через $U_{ck}, U_{\alpha}^{(-)}, I_{Lj}, I_{\beta}^{(-)}$:

$$\left. \begin{aligned} U_{Lj} &= \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j U_{ck} + \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j U_{\alpha}^{(-)}, \\ U_{\beta}^{(+)} &= \dots, \\ I_{ck} &= \sum_{j=1}^{\mu} a_j^k I_{Lj} + \sum_{\beta=1}^m \hat{b}_{\beta}^k I_{\beta}^{(-)}, \\ I_{\beta}^{(+)} &= \dots, \end{aligned} \right\} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad (10)$$

($j = 1, \dots, \mu; k = \mu + 1, \dots, N; \alpha = 1, \dots, m; \beta = 1, \dots, m$).

Подставим (10) в (2), разделим на $i\sqrt{L_j}$ ($i\sqrt{C_k}$) и воспользуемся обозначением компонент вектора $\vec{\psi} = (\xi_1, \dots, \xi_N) = (\sqrt{L}, I_{L1}, \dots, \sqrt{C_N}U_{cN})$:

$$\sum_{k=\mu+1}^N -\frac{ia_k^j}{\sqrt{C_k L_j}} \xi_k - \omega \xi_j = \sum_{\alpha=1}^m \frac{ib_{\alpha}^j}{L_j} U_{\alpha}^{(-)}; \quad (j = 1, \dots, \mu) \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} -\frac{ia_j^k}{\sqrt{L_j C_k}} \xi_j - \omega \xi_k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{ib_{\alpha}^k}{\sqrt{C_k}} I_{\alpha}^{(-)}. \quad (k = \mu + 1, \dots, N)$$

Заметим, что $\varphi_{\alpha}^{(-)} = U_{\alpha}^{(-)}$ для $\alpha = 1, \dots, m$ и $\varphi_{\alpha}^{(-)} = I_{\alpha-\mu+1}^{(-)}$ для $\alpha = m+1, \dots, n = 2m$. Система (11) записывается в матричной форме (12), что равносильно операторной записи (8):

$$\vec{\psi}(T - \omega I) = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_{\alpha}^{(-)} \vec{e}_{\alpha}, \quad (12)$$

где

$$T = \begin{matrix} \mu & & & & \\ & 0 & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ T_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & & N \end{matrix}; \quad T_1 = \|t_{ki}\|, \quad T_2 = \|t_{jk}\|, \quad (13)$$

$$t_{ki} = -i \frac{a_k}{\sqrt{C_k L_j}}; \quad t_{jk} = -i \frac{a_j^k}{\sqrt{L_j C_k}};$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_{\alpha} &= \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}} b_{\alpha}^1; \frac{i}{\sqrt{L_2}} b_{\alpha}^2; \dots; \frac{i}{\sqrt{L_{\mu}}} b_{\alpha}^{\mu}; 0; 0; \dots; 0 \right); \quad \alpha = 1, \dots, m \\ \vec{e}_{\alpha} &= \left(0; 0; \dots; 0; \frac{i}{\sqrt{C_{\mu+1}}} b_{\alpha}^{\mu+1}; \dots; \frac{i}{\sqrt{C_N}} b_{\alpha}^N \right); \quad \alpha = m+1, \dots, n \end{aligned} \right\} (14)$$

Если найдется такая матрица $J = \|J_{\alpha\beta}\|$ со свойствами $J = J^*$, $J^2 = I$, что выполняются (7) и (9), то совокупность $[T, e_{\alpha}, J]$ является операторным комплексом, принадлежащим многополюснику Φ . Итак, алгебраически вопрос записи оператора T (13) и каналовых векторов \vec{e}_{α} (14) выяснен. В следующем разделе мы найдем необходимые и достаточные условия на конструкцию Φ , при которых возможно представление (10) для уравнений Кирхгофа и выполнение (7), (9).

Пример 1. Для замкнутого четырехполюсника $\bar{\Phi}$ (сх. 3) $|X| = 3$, $|\Gamma| = 4$, $\Gamma = q^{(-)}, q_{L1}, q_{c2}, q^{(+)}$. Цикломатическое число $M = |\Gamma| - |X| +$

+ 1 = 2. Максимальная система линейно независимых уравнений Кирхгофа (3), (4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U^{(-)} - U_{L1} &= 0; \\ U^{(-)} - U_{C2} - U^{(+)} &= 0; \end{aligned} \right\} (a) \quad \left. \begin{aligned} I^{(-)} - I_{L1} - I_{C2} &= 0; \\ I_{C2} - I^{(+)} &= 0. \end{aligned} \right\} (b)$$

Уравнения колебаний (2):

$$U_{L1} = i\omega L_1 I_{L1} (c); \quad I_{C2} = i\omega C_2 U_{C2} (d).$$

Входной вектор $\vec{\varphi}^{(-)} = (U^{(-)}, I^{(-)}) = (\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(-)})$, выходной $\vec{\varphi}^{(+)} = (U^{(+)}, I^{(+)}) = (\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(+)})$, вектор внутренних состояний $\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L1}, \sqrt{C_2} U_{C2}) = (\xi_1, \xi_2)$. Вычислим передаточную матрицу $S(\omega)$ непосредственно из уравнений (a) ÷ (d). Имеем:

$$\begin{cases} U^{(+)} = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}\right) U^{(-)} - \frac{1}{i\omega C_2} I^{(-)}; \\ I^{(+)} = -\frac{1}{i\omega L_1} U^{(-)} + I^{(-)}. \end{cases}$$

Последняя система переписывается в матричной форме $\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} S$, где

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2} & \frac{i}{\omega L_1} \\ \frac{i}{\omega C_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (f)$$

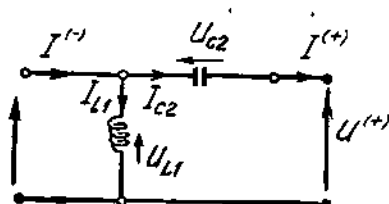


Схема 3.

Выражения (10) вытекают из (a), (b): $U_{L1} = U^{(-)}$;

$$U^{(+)} = U^{(-)} - U_{C2}; \quad I_{C2} = I^{(-)} - I_{L1}; \quad I^{(+)} = I_{C2}.$$

Подставляем их в (c) и (d) и получаем в итоге (11):

$$\left. \begin{aligned} U^{(-)} &= i\omega L_1 I_{L1} \\ -I_{L1} + I^{(+)} &= i\omega C_2 U_{C2} \end{aligned} \right\}; \quad \begin{aligned} -\omega \xi_1 &= \frac{i}{\sqrt{L_1}} \varphi_1^{(-)}; \\ \frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} \xi_1 - \omega \xi_2 &= \frac{i}{\sqrt{C_2}} \varphi_2^{(-)}. \end{aligned}$$

В матричной записи последние два уравнения имеют вид (12), где

$$n = 2; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}}, 0\right); \quad \vec{e}_2 = \left(0, \frac{i}{\sqrt{C_2}}\right).$$

Выберем $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; очевидно, $J = J^*$, $J^2 = I$. Прямым вычислением можно проверить, что (7) и (9) выполняются в нашем примере. Следовательно, построенный операторный комплекс $[T, e_i, J]$ принадлежит четырехполюснику Φ (сх. 3). При этом отображение $S(\omega)$, определяемое соотношением (9), совпадает с $S(\omega)$ в (f). Действительно, из (11)

$$\xi_1 = -\frac{i}{\omega \sqrt{L_1}} \varphi_1^{(-)}; \quad \xi_2 = \frac{i}{\omega^2 L_1 \sqrt{C_2}} \varphi_1^{(-)} - \frac{i}{\omega \sqrt{C_2}} \varphi_2^{(-)},$$

откуда

$$(\vec{\psi}, \vec{e}_1) = (\xi_1, \xi_2) \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}}, 0\right)^* = -\frac{1}{L_1 \omega} \varphi_1^{(-)};$$

$$(\vec{\psi}, \vec{e}_2) = (\xi_1, \xi_2) \left(-\frac{i}{\sqrt{C_2}}\right) = -\frac{i}{\omega^2 L_1 C_2} \varphi_1^{(-)} - \frac{1}{\omega C_2} \varphi_2^{(-)}.$$

Произведения $\vec{a}_i J$ равны соответственно

$$\vec{a}_1 J = (0, 1); \quad \vec{a}_2 J = (1, 0),$$

так что (9) по компонентам имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(+)} &= \varphi_2^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_2) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}\right) \varphi_1^{(-)} + \frac{i}{\omega C_2} \varphi_2^{(-)}; \\ \varphi_2^{(+)} &= \varphi_1^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_1) = \frac{i}{\omega L_1} \varphi_1^{(-)} + \varphi_2^{(-)}, \end{aligned}$$

что равносильно (f).

§ 3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОМПЛЕКСА $\{T, e_i, J\}$

Из предыдущего видно, что (8) и (10) существуют или не существуют одновременно для данного многополюсника $\bar{\Phi}$. Пусть для $\bar{\Phi}$ найдены все выражения (10). Соотношения (10, а) в количестве $\mu + m$ суть следствия уравнений (3). Поскольку наибольшее число линейно независимых уравнений (3) равно M (цикломатическому числу мультиграфа $G = \bar{\Phi}$), то получаем оценку

$$\mu + m \leq M = |\Gamma| - |X| + 1. \quad (15)$$

Аналогично выражениям (10, б) всего $\nu + m$; наибольшее количество линейно независимых уравнений (4) равно $|X| - 1$, откуда

$$\nu + m \leq |X| - 1. \quad (16)$$

Складывая неравенства (15) и (16) и замечая, что $\nu = N - \mu$, а $N + 2m = |\Gamma|$, имеем: $|\Gamma| \leq |\Gamma|$. Следовательно, в соотношениях (15) и (16) обязательны равенства:

$$\mu = M - m; \quad (17)$$

$$\nu = (X) - m - 1. \quad (18)$$

Это означает, что количества индуктивностей и емкостей однозначно определены задачей (10), если заданы топологические характеристики многополюсника (число ребер, вершин и полюсов). Заметим, что (17) и (18) зависимы — одно вытекает из другого.

Выражение для U_{L_i} (10, а) получено из уравнений Кирхгофа (3), поэтому соответствующий вектор коэффициентов \vec{Q} (после перенесения U_{L_i} в правую часть) принадлежит линейной оболочке H_M векторов \vec{Q}_k ($k = 1, \dots, M$), компонентами которых являются коэффициенты из уравнений (3). Вообще каждому вектору \vec{Q}_k из оболочки H_M отвечает уравнение для напряжений $\sum_{i=1}^R b_i U_i = 0$, где b_i суть i -ая компонента вектора \vec{Q}_k и наоборот.

На основании леммы 1 в $G = \bar{\Phi}$ существует хотя бы один элементарный цикл Q_{L_i} , состоящий из ребер типа q_{ik} , типа $q_{ij}^{(-)}$ (или одного из этих типов) и в точности одного ребра q_{L_i} . Такой цикл Q_{L_i} назовем стандартным для индуктивности q_{L_i} . Аналогично для каждого ребра $q_{ij}^{(+)}$ есть стандартный цикл Q_{ij} , состоящий из данного ребра $q_{ij}^{(+)}$ и ребер типа q_{ik} , $q_{ij}^{(-)}$ (либо одного из этих типов). На сх. 4 даны примеры

стандартных циклов. В замкнутом четырехполоснике $\bar{\Phi}$ (сх. 3) стандартный цикл Q_{L1} состоит из ребер $q_{11}, q^{(-)}$; стандартный цикл Q для $q^{(-)}$ — из $q^{(+)}, q_{c2}, q^{(-)}$.

Предположим, что q_{Lj} имеет два различных стандартных цикла: Q_{Lj} и Q'_{Lj} . Разность вектор-циклов $\vec{Q} = \vec{Q}_{Lj} - \vec{Q}'_{Lj}$ суть ненулевой вектор \vec{Q} из H_M , а соответствующая ребру q_{Lj} компонента этого вектора равна нулю. По лемме 1 в $G = \bar{\Phi}$ найдется элементарный цикл h из ребер типа $q_{ck}, q^{(-)}$. Если h сложен одними емкостями q_{ck} , то будем называть его C -циклом, если h имеет входные ребра $q^{(-)}$ — то $C^{(-)}$ -циклом.

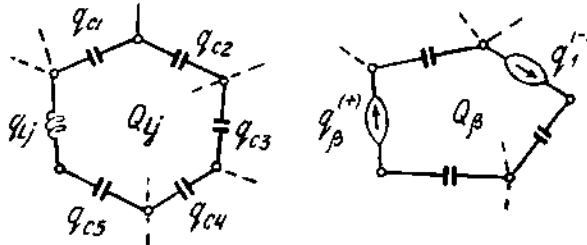


Схема 4.

Уравнение (3) вдоль цикла h , не содержащее напряжений $U_{Lj}, U^{(-)}$, можно внести в исходную систему M линейно независимых уравнений Кирхгофа, и тогда последнюю нельзя разрешить относительно M переменных $U_{Lj}, U^{(-)}$, т. е. нельзя получить (10, а). Противоречие показывает, что стандартные циклы единственны, а выражения (10, а) являются уравнениями Кирхгофа для напряжений вдоль стандартных циклов. Выделив в электрической цепи $G = \bar{\Phi}$ систему стандартных циклов $\{Q_{Lj}, Q_{\beta}\}$, мы одновременно получаем (10, а).

Удаление всех ребер $q_{Lj}, q^{(-)}$ из G размыкает все циклы, поскольку каждый оставшийся был бы C -, $C^{(-)}$ -циклом. В силу свойств дерева [1], совокупность ребер $q_{ck}, q^{(-)}$ суть дерево $G^{(-)}$, содержащее все вершины из G . Поскольку это условие G равносильно отсутствию C -, $C^{(-)}$ -циклов при выполнении (17), то оно является необходимым и достаточным для существования (10, а).

Покажем, что с учетом соотношения (17) можно получить (10, б) тогда и только тогда, когда G не имеет C -, $C^{(-)}$ -циклов (последний определяется как цикл, состоящий хотя бы из одного выходного ребра $q^{(+)}$ и еще, может быть, емкостей q_{ck}). Допустим, такой цикл Q_c есть, у него t ребер и t вершин. В смысле задачи (10, б) ток в каждом ребре на Q_c не известен. В уравнения (4) для остальных вершин мультиграфа G ни один из t отмеченных токов не входит.

В качестве максимальной линейно независимой системы уравнений Кирхгофа (4) можно взять уравнения (4) по любому множеству v вершин из $G = (X, \Gamma)$ в количестве $|X| - 1$. Вершину x_v , не вошедшую в v , выберем на Q_c ; в результате мы располагаем лишь $t - 1$ уравнением Кирхгофа для выражения токов I_1, \dots, I_t цикла Q_c через $I_{Lj}, I^{(-)}$, так что задача (10, б) не решается. С другой стороны, если C -, $C^{(-)}$ -циклов нет, то совокупность ребер $q_{ck}, q^{(-)}$ является деревом $G^{(-)}$, содержащим все вершины из G (по аналогии с $G^{(-)}$). \mathcal{U} дерева $G^{(-)}$ найдется

вершина x_1 , инцидентная только одному (висячему) ребру $q_i (q_i^{(+)})$. Ребра, дополняющие $G^{(+)}$ до G , несут известные токи $I_{L_i}, I_i^{(-)}$, поэтому из уравнения (4) вершины x_1 получается (10, 6) для одного тока $I_{L_i} (I_i^{(-)})$. Удалив из $G^{(+)}$ указанное ребро $q_i (q_i^{(+)})$, получим дерево $G_1^{(+)}$, к которому применимо предыдущее рассуждение. После повторения такой операции конечное число раз задача (10, 6) будет решена. Доказана

Лемма 2. Необходимые и достаточные условия существования выражений (10) допускают следующие две равносильные формулировки: I. Совокупность ребер $q_{ck}, q_{c'}^{(-)}$ электрической цепи G образует дерево $G^{(-)}$, совокупность ребер $q_{ck}, q_{c'}^{(+)}$ — дерево $G^{(+)}$, причем $G^{(-)}$ и $G^{(+)}$ содержат все вершины из G . II. Отсутствуют $C-, C^{(-)}, C^{(+)}$ -циклы, а количество индуктивностей μ связано с цикломатическим числом M мультиграфа G соотношением $\mu = M - m$ (17), где m — число входных (выходных) ребер.

Лемма 2 дает критерий справедливости равенства (8); предполагая (8) выполненным, обратимся к (9), которое в матричной форме имеет вид (19):

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}_\alpha, \vec{e}_\alpha) \vec{a}_\alpha J. \quad (19)$$

Из (12), т. е. (8), находим:

$$\vec{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}. \quad (20)$$

Подставляем $\vec{\psi}$ в (19):

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^{(+)} &= \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^n \varphi_\beta^{(-)} \vec{e}_\beta (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\alpha \right) \vec{a}_\alpha J = \vec{\varphi}^{(-)} - \\ &- i \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \varphi_\beta^{(-)} \vec{a}_\alpha J = \vec{\varphi}^{(-)} - \\ &- i \vec{\varphi}^{(-)} \| (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \| J. \end{aligned}$$

Для матрицы $S(\omega)$ получена основная формула:

$$S(\omega) = I - \| (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \| J. \quad (21)$$

Передаточная матрица $S(\omega)$ многополюсника Φ совпадает, таким образом, с характеристической матрицей — функцией оператора T , изученной в [2], если операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ принадлежит Φ . В этом случае $S(\infty) = I$.

Сделаем одно замечание о режиме электрической цепи G на бесконечной частоте ($\omega = \infty$). Если $\omega \rightarrow \infty$, то реактивные сопротивления индуктивности и емкости $Z_L = \frac{U_L}{I_L} = i\omega L$, $Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{i\omega C}$ стремятся соответственно к бесконечности и к нулю. Физически это означает, что на бесконечной частоте индуктивный двухполюсник q_L отсутствует (представляет для тока бесконечное сопротивление), а емкостной q_C пропускает ток I , как идеальный проводник, без потери энергии. В соответствии с этими нестрогими физическими замечаниями мы доопределим понятие электрической цепи G так: при частоте $\omega = \infty$ ток $I_L = 0$ (т. е. q_L от-

существует, «размыкается»), напряжение $U_c = 0$ («короткое замыкание»). Уравнения Кирхгофа (3), (4) по определению сохраняются для полученной цепи $G(\infty)$, уравнения колебаний (2) отбрасываются.

Если имеют место выражения (10), то многополюсник Φ — открытая система. Действительно, отображение $R(\omega)$ дается формулой (20), а $S(\omega)$ можно получить из выражений для $U_3^{(+)}$, $I_3^{(-)}$ в (10), правые части которых зависят лишь от $\vec{\varphi}^{(-)}$ и $\vec{\varphi}$.

Отсюда же вытекает, что $R(\omega)$, $S(\omega)$ — рациональные функции от ω ; в частности, передаточная матрица $S(\omega)$ существует для всех значений ω , за исключением конечного числа полюсов.

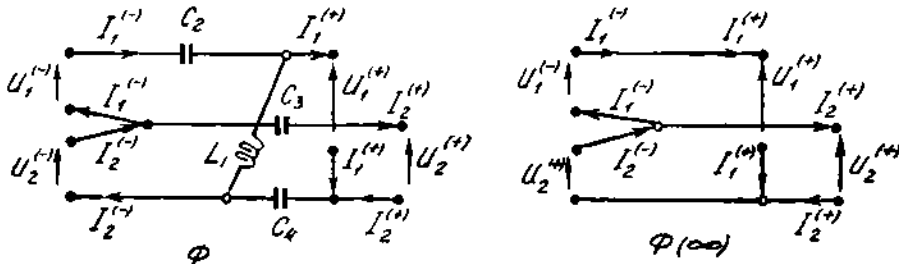


Схема 5.

Перепишав (12) в виде $\vec{\varphi} \left(\frac{1}{\omega} T - I \right) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^T \vec{e}_n$, получаем, что $\vec{\varphi} \rightarrow 0$

при $\omega \rightarrow \infty$, а уравнения (10) дают возможность выразить $U_3^{(+)}$, $I_3^{(-)}$ через $U_1^{(-)}$, $I_1^{(-)}$ ($\omega = \infty$). Следовательно, в предположении (10) существует $S(\cdot)$. Однако, как показывает пример сх. 5, условие $S(\infty) = I$ может не выполняться. Для $\Phi(\infty)$ из уравнений Кирхгофа вытекает: $U_1^{(+)} = U_1^{(-)} + U_2^{(-)}$, $U_2^{(+)} = U_2^{(-)}$, $I_2^{(+)} = I_2^{(-)} - I_1^{(-)}$, $I_1^{(+)} = I_1^{(-)}$, откуда

$$S(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Тем не менее в нашем примере небольшим изменением конструкции входа можно обеспечить единичную передачу на частоте $\omega = \infty$. Положим

$$U_{0,1}^{(-)} = U_1^{(-)} + U_2^{(-)}; \quad U_{0,2}^{(-)} = U_2^{(-)}; \quad I_{0,2}^{(-)} = I_2^{(-)} - I_1^{(-)}; \quad I_{0,1}^{(-)} = I_1^{(-)}.$$

Получится многополюсник Φ_0 (сх. 6), который отличается от Φ только входными ребрами и означает каскадное¹ соединение $\Phi^{-1}(\infty)$ с Φ , где $\Phi^{-1}(\infty)$ — зеркальное отражение $\Phi(\infty)$ относительно вертикальной оси с изменением направления внешних токов (сх. 6). Для Φ_0 (сх. 6) передаточная матрица

$$S_0(\omega) = S^{-1}(\infty) S(\omega) \tag{22}$$

и $S_0(\infty) = I$, что можно проверить и непосредственно по $\Phi_0(\infty)$.

¹ Каскадным называется такое соединение двух многополюсников, когда выход первого подается на вход второго; передаточная матрица результирующего многополюсника равна произведению исходных передаточных матриц.

В общем случае также надо провести нормировку $S(\omega)$ множителем $S^{-1}(\infty)$, как в (22), что соответствует присоединению ко входу Φ многополюсника Φ_1 , реализующего матрицу $S^{-1}(\infty)$. Покажем, что $\Phi_1 = \Phi^{-1}(\infty)$. На основании свойства передаточной матрицы реактивного многополюсника [9] имеем:

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad S^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$$

где A и B — невырожденные матрицы порядка m .

Если $S^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то зеркальный по отношению к Φ многополюсник Φ^{-1} имеет передаточную матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \neq S^{-1}(\omega)$ за счет изменения направления внешних токов. На бесконечной частоте благо-

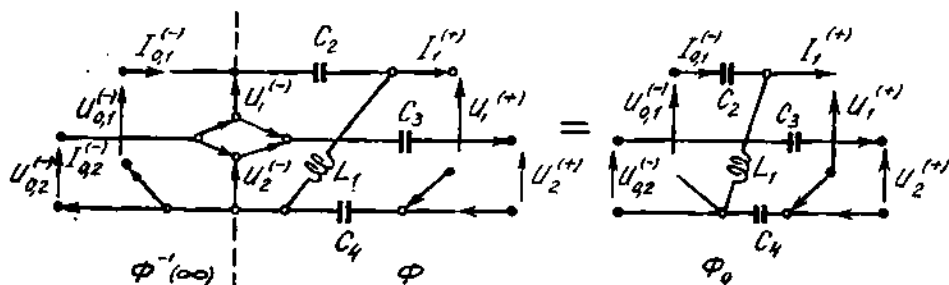


Схема 6.

даря указанной структуре $S^{-1}(\infty)$ является передаточной матрицей для $\Phi^{-1}(\infty)$. Таким образом, требование $S(\infty) = I$ в дополнение к (10) является мало существенным — в том смысле, что ему легко удовлетворить перестройкой входа Φ . Оказывается, что этих условий уже достаточно, чтобы (13) и (14) образовали вместе с некоторой матрицей J операторный комплекс, принадлежащий Φ . Справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы многополюснику Φ принадлежал операторный комплекс $[T, e_a, J]$, необходимо и достаточно, чтобы а) выполнялись условия леммы 2 и б) Φ имел единичную передачу на бесконечности: $S(\infty) = I$.

Необходимость доказана выше. Остается проверить, что из а) и б) вытекают (7) и (9), или в матричной записи (19) и (23):

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \quad (23)$$

Из энергетических соображений, которые здесь не приводятся, выбираем матрицу J в виде

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

1. На бесконечной частоте $U_1^{(-)} = U_1^{(+)}$ в силу $S(\infty) = I$; учитывая, что стандартный цикл Q_2 для ребра $q_u^{(-)}$ дает при $\omega = \infty$ зависимость

между выходным напряжением $U_a^{(-)}$ и входными, заключаем следующее: стандартный цикл Q_a содержит в точности два внешних ребра — $q_a^{(-)}$ и $q_a^{(+)}$. Уравнение (3) вдоль Q_a имеет вид:

$$U_a^{(+)} = U_a^{(-)} + \sum_{k=\mu+1}^N \delta_a^k U_{ck}, \quad (25)$$

где направления $q_a^{(-)}$, $q_a^{(+)}$ совпадают с направлением обхода Q_a (сх. 7); $\delta_a^k = 0$, если q_{ck} не принадлежит Q_a ; $\delta_a^k = -1$, если q_{ck} принадлежит Q_a и направления \vec{q}_{ck} и обхода Q_a совпадают; $\delta_a^k = 1$, если не совпадают. Соотношение (19) перепишем по компонентам:

$$\varphi_a^{(+)} = \varphi_a^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_{n-a+1}). \quad (26)$$

При $a \leq m$ $\varphi_a^{(+)} = U_a^{(+)}$, $\varphi_a^{(-)} = U_a^{(-)}$ и (26) с учетом (14) дает:

$$\begin{aligned} U_a^{(+)} &= U_a^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N b_{n-a+1}^k U_{ck} = \\ &= U_a^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N \hat{b}_a^k U_{ck}, \end{aligned} \quad (27)$$

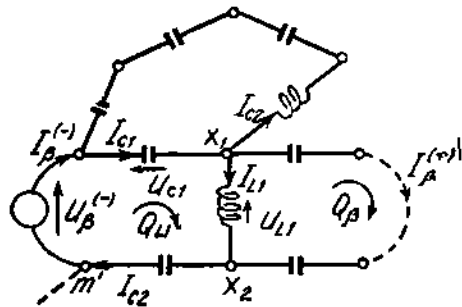


Схема 7.

где \hat{b}_a^k определяется из (10, 6).

Рассмотрим дерево $G^{(+)}$ с неизвестными токами. Если q_{ck} не входит в Q_a (например, q_{c6} на сх. 7), то $\hat{b}_a^k = 0$. Действительно, по лемме 2 можно определить ток I_{ck} с помощью дерева $G^{(-)}$ со стороны вершины x_1 или со стороны x_2 , двигаясь от периферии $G^{(-)}$, где $x_1, x_2 \in q_{ck}$. Хотя бы в одном из этих случаев мы не должны проходить через вершины m и m' ребра $q_a^{(-)}$, иначе G содержит C -, $C^{(-)}$ -циклы. Следовательно, ток $I_a^{(-)}$ не используется при нахождении I_{ck} . Когда q_{ck} входит в Q_a (например, q_{c3} на сх. 7), то для обеих вершин x_1, x_2 ребра q_{ck} существуют цепи Z_1 и Z_2 , проходящие через m и m' соответственно и принадлежащие $G^{(+)}$.

Сумма уравнений (4) для всех вершин цепи Z_1 показывает, что в выражении (10, 6) для I_{ck} коэффициент $\hat{b}_a^k = 1$ при совпадающих направлениях \vec{q}_{ck} и обхода Q_a , и $\hat{b}_a^k = -1$ в противном случае. Получаем $\hat{b}_a^k = -\delta_a^k$, формулы (25) и (27) одинаковы ($\beta = 1, \dots, m$). При $m < a \leq n = 2m$ $\varphi_a^{(-)} = I_{n-a+1}^{(-)} = I_{\beta}^{(-)}$, $\varphi_a^{(+)} = I_{\beta}^{(-)}$ ($\beta = n - a + 1$) и (26), (14) дают

$$I_{\beta}^{(+)} = I_{\beta}^{(-)} - \sum_{l=1}^n b_{\beta}^l I_{Ll}. \quad (28)$$

Здесь b_{β}^l взято из (10, а); считая направления дуги \vec{q}_{Ll} и обхода стандартного цикла Q_{Ll} одинаковыми, имеем: $b_{\beta}^l = 0$, если $q_{Ll}^{(-)}$ не входит в Q_{Ll} ; $b_{\beta}^l = 1$, если $q_{Ll}^{(-)}$ принадлежит Q_{Ll} , а направления обхода Q_{Ll} и дуги $\vec{q}_{Ll}^{(-)}$ совпадают; $b_{\beta}^l = -1$, если направления противоположны (сх. 8). Для получения (28) по многополюснику $\Phi = G$ удобно воспользоваться

деревом $G^{(-)}$ (см. лемму 2), выражая постепенно токи $I_{\beta}^{(-)}$, I_{ck} через $I_{\beta}^{(+)}$, I_{Lj} . В итоге

$$I_{\beta}^{(-)} = I_{\beta}^{(+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \delta_{\beta}^j I_{Lj}. \quad (29)$$

Действительно, $I_{\beta}^{(+)}$ ($\gamma \neq \beta$) не войдет в (29), ибо на бесконечной частоте соотношение (29) должно обеспечивать равенство $I_{\beta}^{(-)} = I_{\beta}^{(+)}$. Аналогично тому, как выше были вычислены коэффициенты b_{β}^k , получаем: $\delta_{\beta}^j = 0$, если $q_{\beta}^{(-)}$ не принадлежит Q_{Lj} (например, $\delta_{\beta}^2 = 0$ на сх. 8, так как $I_{\beta}^{(-)}$ можно определить со стороны вершины m'); $\delta_{\beta}^j = 1$, если Q_{Lj} содержит $q_{\beta}^{(-)}$, а направления обхода Q_{Lj} и дуги $q_{\beta}^{(-)}$ совпадают (на сх. 8 $\delta_{\beta}^1 = 1$); $\delta_{\beta}^j = -1$, если они противоположны. Доказано, что $b_{\beta}^j = \delta_{\beta}^j$, т. е. (19) справедливо.

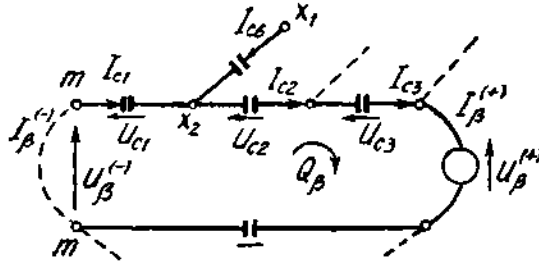


Схема 8.

2. Для элемента t_{kj} ($k > \mu$, $j < \mu$) матрицы T (13) имеет место правило (см. лемму 2): $t_{kj} = 0$, если q_{ck} не входит в стандартный цикл Q_{Lj} ; $t_{kj} = \frac{i}{\sqrt{C_k L_j}}$, если q_{ck} входит в Q_{Lj} , а направления \vec{q}_{ck} и \vec{q}_{Lj} одинаковы по отношению к направлению обхода Q_{Lj} ; $t_{kj} = -\frac{i}{\sqrt{C_k L_j}}$, если q_{ck} входит в Q_{Lj} , а направления \vec{q}_{ck} и \vec{q}_{Lj} противоположны при обходе Q_{Lj} .

Задачу выражения напряжений U_{Lj} , $U_{\beta}^{(-)}$ через U_{ck} , $U_{\beta}^{(+)}$ назовем сопряженной к задаче (10, а). Сопряженная задача, как видно из леммы 2, разрешима одновременно с (10). Каждое ребро q_{Lj} имеет сопряженный стандартный цикл Q_{Lj}^* , состоящий из ребер типа q_{ck} , $q_{\beta}^{(+)}$ и одного q_{Lj} . Для элемента t_{jk} ($j < \mu$, $k > \mu$) при определении тока I_{ck} с помощью дерева $G^{(+)}$ получается правило, формулируемое в терминах сопряженной задачи так: $t_{jk} = 0$, если q_{ck} не входит в сопряженный стандартный цикл Q_{Lj}^* ; $t_{jk} = -\frac{i}{\sqrt{L_j C_k}}$, если q_{ck} входит в Q_{Lj}^* , а направления \vec{q}_{ck} и \vec{q}_{Lj} совпадают при обходе Q_{Lj}^* ; $t_{jk} = \frac{i}{\sqrt{L_j C_k}}$, если q_{ck} входит в Q_{Lj}^* , а направления \vec{q}_{ck} и \vec{q}_{Lj} противоположны при обходе Q_{Lj}^* .

Используя структуру матрицы J (24), перепишем (23) в виде

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_{\alpha}) \vec{e}_{n-\alpha+1}. \quad (30)$$

Обозначим через \vec{f} правую часть равенства (30), которое нам предстоит доказать для многополюсника Φ . Выпишем подробнее:

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_N) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\mu} -i I_{L_j} b_{\alpha}^j - \sum_{k=\mu+1}^N i U_{C_k} b_{\alpha}^k \right) \vec{e}_{n-\alpha+1};$$

$$f_{\nu} = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{\sqrt{L_{\nu}}} b_{\alpha}^{\nu} b_{n-\alpha+1}^k U_{C_k}; & 1 \leq \nu \leq \mu \\ \sum_{\alpha=m+1}^n \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_{\nu}}} b_{\alpha}^{\nu} b_{n-\alpha+1}^j I_{L_j}. & \mu < \nu \leq N \end{cases} \quad (31)$$

Левую часть (30) обозначим через $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$. На основании (13)

$$g_j = \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{i} (t_{kj} - \bar{t}_{jk}) \zeta_k = \sum_{k=\mu+1}^N i \sqrt{C_k} (\bar{t}_{jk} - t_{kj}) U_{C_k}; \quad j = 1, \dots, \mu$$

$$g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{i} (t_{jk} - \bar{t}_{kj}) \xi_j = \sum_{j=1}^{\mu} i \sqrt{L_j} (\bar{t}_{kj} - t_{jk}) I_{L_j}. \quad k = \mu + 1, \dots, N$$

Выше показано, что (25) и (27) совпадают, поэтому

$$U_{\alpha}^{(-)} = U_{\alpha}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N b_{n-\alpha+1}^k U_{C_k}.$$

Исключаем $U_{\alpha}^{(-)}$ из (10, а):

$$-U_{L_j} + \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j U_{\alpha}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^k b_{n-\alpha+1}^j U_{C_k} + \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j U_{C_k} = 0. \quad (32)$$

Сопряженная к (10, а) задача имеет единственное решение, поэтому (32) является уравнением Кирхгофа (3) для сопряженного стандартного цикла $Q_{L_j}^*$. Соотношения для t_{jk} показывают, что величина $-a_j^k = \frac{t_{jk}}{i \sqrt{L_j C_k}}$

должна совпадать с коэффициентом при U_{C_k} в (32): $\sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k + a_k^j = -a_j^k$. Элемент $t_{jk} = -\frac{i}{\sqrt{L_j C_k}} a_j^k$, элемент $t_{kj} = -\frac{i}{\sqrt{C_k L_j}} a_k^j$, поэтому $t_{kj} + t_{jk} = t_{kj} - \bar{t}_{jk} = t_{jk} - \bar{t}_{kj} = \frac{i}{\sqrt{C_k L_j}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k$.

Теперь компоненты вектора g переписуются так:

$$g_i = \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{\sqrt{L_j}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^i b_{n-\alpha+1}^k U_{C_k}; \quad g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_k}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k I_{L_j}.$$

Это равносильно (31). Действительно, для g_k надо изменить индекс суммирования $\alpha = n - \beta + 1$:

$$g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_k}} \sum_{m=1}^n b_{\beta}^k b_{n-\beta+1}^j I_{L_j}.$$

Теорема доказана.

Из выражений для t_{ik} , t_{kj} следует, что мнимая часть оператора $T \left(\frac{T-T^*}{2i} \right)$ определяется емкостями q_{ck} на несовпадающих частях пары циклов Q_{L_j} и $Q_{L_j}^*$. Точнее, верно

Теорема 2. Самосопряженность оператора T из комплекса $[T, e_a, J]$ означает, что при каждом j ($j = 1, \dots, \mu$) оба стандартных цикла из пары Q_{L_j} , $Q_{L_j}^*$ имеют одинаковые емкостные ребра. Иначе, для того чтобы оператор T был самосопряженным ($T = T^*$), необходимо и достаточно, чтобы мультиграф

$$G_0 = \bigcup_{j=1}^{\mu} \{(Q_{L_j} \cup Q_{L_j}^*) \setminus (Q_{L_j} \cap Q_{L_j}^*)\}$$

содержал только внешние ребра многополюсника.

В конце предыдущего параграфа приведен пример операторного комплекса с несамосопряженным оператором T .

Если многополюсник Φ удовлетворяет условиям теоремы 1, то по стандартным циклам можно без вычислений записать операторный комплекс $[T, e_a, J]$, принадлежащий Φ . С помощью $[T, e_a, J]$ решается ряд задач [6, 7]: находится частотная характеристика цепи $S(\omega)$, эквивалентная цепочка простейших многополюсников (ср. [4, 5, 8, 11]), неустановившиеся колебания многополюсника Φ при произвольном входном сигнале $\vec{\varphi}^{(-)}(t)$ и другие задачи.

Многополюсники, не удовлетворяющие условиям теоремы 1, также можно включить в теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. Успехи матем. наук, 1958, 13, 1(79), 3.
3. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем, М., АН СССР, 1951.
4. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников. ДАН СССР, 1960, 1960, 135, 3, 542.
5. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Синтез передающей линии по заданным частотным характеристикам. «Зап. мех.-матем. ф-та Харьковск. ун-та и Харьковск. матем. об-ва», 1961, т. XXVIII, 4, 149—162.
6. М. С. Лившиц. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. Изв. АН СССР, серия матем. (1963), 27, 5, 993—1030.
7. М. С. Лившиц. Открытые системы как линейные автоматы. Изв. АН СССР, серия матем. (1963), 27, 6, 1215—1228.
8. А. Г. Руткас. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника. «Радиотехника и электроника», 1961, 11, 1889—1945.
9. А. Г. Руткас. Передаточная матрица пассивного многополюсника. «Тр. Харьковск. горного ин-та», 1962, XI, 89—94.
10. С. Сещу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей, М., Госэнергоиздат, 1963.
11. A. Talbot. New method of synthesis of reactance networks. Proc. I E. E., 1954, 101, pt. 4, Monograph 77, p. 73.

НЕКОТОРЫЕ САМОСOPЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА МАКСВЕЛЛА

В. А. Дикарев

ВВЕДЕНИЕ

Изучаемая в этой работе задача возникла в связи с применением М. С. Лившицем теории несамосопряженных операторов к вопросам распространения волн в радиоволноводах [1].

Рассмотрим волновод с осью OZ , однородный до некоторой точки на этой оси и заканчивающийся объемным резонатором.

Допустим, что нам заданы амплитуды A_1, A_2, \dots, A_n волн, идущих из бесконечности, а амплитуды A_{n+1}, A_{n+2}, \dots равны нулю. Требуется найти амплитуды B_v ($v = 1, 2, \dots$) отраженных волн и поле в области, расположенной правее сечения $z = 0$, включая объемный резонатор.

Если задана частота ω , то, как известно, вдоль волновода может распространяться конечное число поперечных электрических и магнитных волн, а все волны высшего порядка экспоненциально затухают.

Остановимся на случае, когда все отраженные волны затухающие, и выберем начало отсчета $z = 0$ достаточно удаленным от резонатора с тем, чтобы всеми затухающими колебаниями, кроме первых n (затухающих медленнее, чем остальные), можно было пренебречь при $z \leq 0$. Потерями также будем пренебрегать. Тогда поперечные составляющие поля при $z \leq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \sum_{v=1}^n (A_v e^{-i\beta_v z} - B_v e^{i\beta_v z}) V_{[\rho_v]} \vec{L}_v(x, y) e^{i\omega t}; \\ \vec{H}_t &= \sum_{v=1}^n (A_v e^{-i\beta_v z} + B_v e^{i\beta_v z}) \frac{V_{(\rho_v)}}{\rho_v} \vec{N}_v(x, y) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{L}_v, \vec{N}_v = \vec{k} \times \vec{L}_v$ — известные ортонормированные собственные функции волновода; ρ_v — волновые сопротивления, в случае затухающих колебаний ρ_v — мнимые; \vec{k} — орт вдоль оси OZ .

Как показано в работе [1], эта задача тесно связана с оператором Максвелла

$$Q \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\epsilon^{-1} \text{rot } \vec{H} \\ i\mu^{-1} \text{rot } \vec{E} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

действующим на шестимерных вектор-функциях $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$, заданных внутри части волновода Ω , лежащей правее плоскости $z = 0$.

Поверхность S , ограничивающая Ω , разбита на две части S_1 и S_2 , где S_2 — сечение волновода плоскостью $z = 0$.

В область определения данного оператора входят гладкие вектор-функции, удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tS_1} = 0, \quad \int_{S_1} \vec{H}_t \vec{G}_t^* d\tau = 0; \quad \nu > n \\ \rho_\nu \int_{S_2} \vec{H}_t \vec{G}_t^* d\tau = \int_{S_2} \vec{E}_t \vec{F}_t^* d\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{G}_t, \vec{F}_t — полные ортонормированные системы вектор-функций на S , причем \vec{G}_t, \vec{F}_t лежат в плоскости сечения S и

$$\vec{G}_t = \vec{k} \times \vec{F}_t; \quad (4)$$

\vec{k} — внутренний орт нормали к S .

Вектор $\vec{A}^* = A_x^* \vec{i} + A_y^* \vec{j} + A_z^* \vec{k}$,

где A_x^*, A_y^*, A_z^* — величины, комплексно сопряженные с A_x, A_y, A_z .

Оператор Максвелла с такой областью определения обозначим \tilde{Q}'_n .

Сделаем некоторые уточнения и замечания.

Будем считать, что область Ω односвязна и ограничивающая ее поверхность S дважды непрерывно дифференцируема. Таким образом, теперь не требуется, чтобы S было частью плоскости, но в то же время предполагается, что в точках раздела S_1 и S_2 поверхность также гладкая.

Вектор-функции \vec{G}_t, \vec{F}_t будем считать непрерывными с первыми производными на S ; кроме того, $G_t \cdot \vec{k} = F_t \cdot \vec{k} = 0$.

Для простоты записи в дальнейшем будем считать, что $\varepsilon = \mu = 1$, т. е.

$$Q \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \vec{H} \\ i \operatorname{rot} \vec{E} \end{pmatrix}.$$

Область определения оператора A , как это принято, обозначаем знаком D_A .

Очевидно, что множество вектор-функций $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$ с естественно вводимыми операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр:

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \vec{E}_2 \\ \vec{H}_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{pmatrix}; \quad \alpha \vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha \vec{E} \\ \alpha \vec{H} \end{pmatrix}$$

и скалярным произведением

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \int_{\Omega} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2^*) dv \quad (5)$$

является гильбертовским пространством, если \vec{E}, \vec{H} — вектор-функции, интегрируемые с квадратом по Лебегу.

Вектор-функцию $\vec{f} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$ будем называть гладкой в Ω , если \vec{E}, \vec{H}

имеют в Ω все частные производные первого порядка, \vec{E}, \vec{H} непрерывны в $\bar{\Omega}$ и $\text{rot } \vec{E}, \text{rot } \vec{H}$ интегрируемы с квадратом по Лебегу.

Для дальнейшего важно отличать замкнутый оператор от незамкнутого. То обстоятельство, что оператор не замкнут, будем отмечать знаком «штрих». Таким образом, например, оператор \tilde{Q}_n не замкнут, а оператор \tilde{Q}'_n замкнут.

Изложим кратко содержание работы.

В § 1 устанавливается связь между операторами \tilde{Q}'_n и Q'_0 , где Q'_0 — оператор Максвелла такой, что $\vec{f} \in D_{Q'_0}$, если $\vec{E}_{t|S} = 0, \vec{H}_{t|Z} = 0$.

В работе [2] показано, что оператор Q_n самосопряженный.

Выясняется, что область определения $D_{\tilde{Q}'_0}$ оператора \tilde{Q}'_0 получается из $D_{Q'_0}$ в результате расширения области определения $D_{Q'_0}$ и последующего ее сужения по определенному правилу.

Далее приводится доказательство вспомогательной теоремы, на основании которой и того, что оператор Q_0 самосопряженный [2], следует самосопряженность оператора \tilde{Q}_n .

В § 2 доказывается, что оператор, порождаемый оператором \tilde{Q}_n на ортогональном дополнении к его нулевому подпространству, имеет вполне непрерывный обратный.

§ 1. Докажем самосопряженность оператора \tilde{Q}_n . Рассмотрим n векторов $\{\vec{f}_\nu\}_{\nu=1}^n$, где вектор $\vec{f}_\nu = \begin{pmatrix} \vec{E}_\nu \\ \vec{H}_\nu \end{pmatrix}$ удовлетворяет следующим краевым условиям: \vec{E}_ν, \vec{H}_ν — гладкие в Ω вектор-функции:

$$\vec{E}_{\nu|S} = 0; \quad \vec{E}_{\nu|Z} = \rho_\nu \vec{F}_\nu; \quad \vec{H}_{\nu|Z} = \vec{G}_\nu. \tag{1,1}$$

(Задачу о нахождении векторов \vec{f}_ν см., например, в [3]).

Заметим, что условиями (1, 1) вектор \vec{f}_ν определяется неоднозначно.

Лемма 1. Рассмотрим линейал V'_n , образованный векторами из $D_{Q'_0}$ и из $\{\vec{f}_\nu\}_{\nu=1}^n$. Отберем из V'_n множество W'_n векторов $\vec{\psi}$ таких, что $\vec{\psi} \in W'_n$, если

$$(Q\vec{\psi}, \vec{f}_\nu) = (\vec{\psi}, Q\vec{f}_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, n \tag{2,1}$$

Тогда $D_{\tilde{Q}'_n} = W'_n$.

Доказательство. Очевидно, что W'_n является линейным многообразием.

Проверим прежде всего, что

$$(Q\vec{f}_\nu, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_\nu, Q\vec{f}_\mu) = 0. \tag{3,1}$$

Последнее означает, что $\vec{f}_\nu \in W'_n$:

$$\begin{aligned} (Q\vec{f}_\nu, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_\nu, Q\vec{f}_\mu) &= \iiint_{\Omega} (-i \text{rot } \vec{H}_\nu \vec{E}_\mu^* + i \text{rot } \vec{E}_\nu \vec{H}_\mu^* - i \vec{E}_\nu \cdot \text{rot } \vec{H}_\mu^* + \\ &\quad + i \vec{H}_\nu \cdot \text{rot } \vec{E}_\mu^*) dv = \\ &= i \iiint_{\Omega} \{(\text{rot } \vec{E}_\nu \vec{H}_\mu^* - \vec{E}_\nu \cdot \text{rot } \vec{H}_\mu^*) - (\text{rot } \vec{H}_\nu \vec{E}_\mu^* - \vec{H}_\nu \cdot \text{rot } \vec{E}_\mu^*)\} dv. \end{aligned}$$

Воспользовавшись известной из векторного анализа формулой

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$$

и свойствами дивергенции, имеем

$$(Q\vec{f}_v, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_v, Q\vec{f}_\mu) = i \int_{S_1 + S_2} \{(\vec{E}_v, \vec{H}_\mu^*, \vec{k}) + (\vec{E}_\mu^*, \vec{H}_v, \vec{k})\} d\sigma;$$

так как $\vec{E}_{v/S_2} = 0$, то

$$(Q\vec{f}_v, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_v, Q\vec{f}_\mu) = i \int_{S_2} \{(\vec{E}_{v,t}, \vec{H}_{\mu,t}^*, \vec{k}) + (\vec{E}_{\mu,t}^*, \vec{H}_{v,t}, \vec{k})\} d\sigma.$$

Учитывая краевые условия (1,1), получим

$$(Q\vec{f}_v, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_v, Q\vec{f}_\mu) = i \int_{\Sigma} \{(\rho_v \vec{F}_v, \vec{G}_\mu, \vec{k}) + (\rho_\mu^* \vec{F}_\mu^*, \vec{G}_v, \vec{k})\} d\sigma.$$

В силу соотношения (4) имеем

$$(Q\vec{f}_v, \vec{f}_\mu) - (\vec{f}_v, Q\vec{f}_\mu) = i \left\{ \rho_v \int_{\Sigma} \vec{G}_v \vec{G}_\mu^* d\sigma + \rho_\mu^* \int_{\Sigma} \vec{G}_\mu \vec{G}_v^* d\sigma \right\}.$$

Правая часть последнего равенства равна нулю, так как при $v \neq \mu$ каждый из интегралов обращается в нуль, а при $v = \mu$ $\rho_v + \rho_\mu^* = 0$, так как ρ_v — мнимое число.

Пусть далее $\vec{\varphi}$ — любой вектор из W'_n .

Тогда

$$\begin{aligned} (Q\vec{\varphi}, \vec{f}_v) - (\vec{\varphi}, Q\vec{f}_v) &= i \int_{\Omega} \{(\operatorname{rot} \vec{H} \vec{E}^* + \operatorname{rot} \vec{E} \vec{H}^* - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^* + \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}^*)\} d\nu = \\ &= i \int_{\Sigma} (\vec{E}, \vec{H}_v^*, \vec{k}) d\sigma - i \int_{\Sigma} (\vec{H}, \vec{E}_v^*, \vec{k}) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

или

$$\int_{\Sigma} (\vec{E}_t, \vec{H}_{v,t}^*, \vec{k}) d\sigma = \int_{\Sigma} (\vec{H}_t, \vec{E}_{v,t}^*, \vec{k}) d\sigma.$$

Принимая во внимание краевые условия (1,1) и то, что для компоненты H вектора φ , $\varphi \in V'_n$ справедливо соотношение

$$\vec{H}_{t,\Sigma} = \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu \vec{G}_\mu, \quad \alpha_\mu = \int_{\Sigma} \vec{H}_t \vec{G}_\mu^* d\sigma. \quad (4,1)$$

Получим

$$\int_{\Sigma} (\vec{E}_t, \vec{G}_\mu^*, \vec{k}) d\sigma = \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu \int_{\Sigma} (\vec{G}_\mu, \rho^* \vec{F}_\mu^*, \vec{k}) d\sigma$$

или, учитывая формулы (3), (4), попарную ортогональность \vec{G}_μ и значения α_μ из (4,1):

$$\int_{\Sigma} \vec{E}_t \vec{F}_\mu^* d\sigma = -\rho^* \int_{\Sigma} \vec{G}_\mu \vec{G}_\mu^* d\sigma \int_{\Sigma} \vec{H}_t \vec{G}_\mu^* d\sigma = \rho_v \int_{\Sigma} \vec{H}_t \vec{G}_v^* d\sigma, \quad (5,1)$$

т. е. действительно $\varphi \in D\vec{Q}_v$ и, значит, $D\vec{Q}_v \supseteq W'_n$; так как для любого вектора из $D\vec{Q}_v$ выполняются условия (3), то имеет место также обратное включение $D\vec{Q}_v \subset W'_n$.

Следовательно $D\vec{Q}_v = W''$

Лемма 2. Пусть A — самосопряженный оператор и векторы f_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$ таковы, что $f_\nu \in D_A$. Построим оператор $A_n \supset A$ следующим образом:

$$Af_\nu = g_\nu; \quad (g_\nu, f_\nu) = (f_\nu, g_\nu). \quad (6,1)$$

Отберем из D_{A_n} множество W_n векторов ψ таких, что $\psi \in W_n$, если

$$(A_n\psi, f_\nu) = (\psi, g_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (7,1)$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A}_n \subset A_n$, область определения которого $D_{\tilde{A}_n} = W_n$.

Оператор A_n самосопряженный.

Доказательство. Рассмотрим график оператора A_n , $M(A_n)$. Очевидно, что $M(A_n)$ является подпространством гильбертова пространства H .

Любой вектор $F \in M(A_n)$ имеет вид

$$F = \{f, A_n f\} = \left\{ \varphi + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu f_\nu, A\varphi + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu g_\nu \right\}, \quad (8,1)$$

где $\varphi \in D_A$. Перепишем формулу (7,1) в виде

$$(\{\psi, A_n \psi\}, \{g_\nu, -f_\nu\}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (9,1)$$

Последнее означает, что в график оператора \tilde{A}_n , $M(\tilde{A}_n)$ входят только те векторы $\Psi = \{\psi, A_n \psi\}$, $\Psi \in M(A_n)$, которые ортогональны векторам $\{g_\nu, -f_\nu\}$.

Из условий (6,1) следует, что

$$(\{f_\nu, g_\nu\}, \{g_\nu, -f_\nu\}) = 0. \quad (10,1)$$

Поэтому $\{f_\nu, g_\nu\} \in M(\tilde{A}_n)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$

Кроме того, в $M(\tilde{A}_n)$ войдут те векторы $\{\varphi, A_n \varphi\}$ из графика оператора A , $M(A)$, которые удовлетворяют соотношению (9,1).

Покажем, что $M(\tilde{A}_n) = M(\tilde{A}_n^*)$. С этой целью выясним, каким образом можно получить $M(\tilde{A}_n^*)$ из $M(A^*) = M(A)$.

Известно [4], что для любого замкнутого оператора T имеет место соотношение

$$H \ominus M(T) = UM(T^*), \quad (11,1)$$

где U — унитарный оператор $U\{f, g\} = \{ig, -if\}$.

В силу условий (9,1) $M(A_n)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $M(A)$ и векторов $\{f_\nu, g_\nu\}$.

Из формулы (11,1) имеем

$$UM(A) = UM(A^*) = H \ominus M(A)$$

и

$$UM(A_n^*) = H \ominus M(A_n).$$

Поэтому, чтобы получить $UM(A_n^*)$, надо в $UM(A)$ оставить только те векторы, которые ортогональны векторам $\{f_\nu, g_\nu\}$. Но

$$\{f_\nu, g_\nu\} = U\{ig_\nu, -if_\nu\} = iU\{g_\nu, -f_\nu\},$$

т. е. в $UM(A_n^*)$ войдут только те векторы из $UM(A)$, которые ортогональны векторам $U\{g_\nu, -f_\nu\}$.

Следовательно, в $M(A_n^*)$ войдут такие векторы из $M(A)$, которые ортогональны векторам $\{g_\nu, -f_\nu\}$, т. е. векторы, удовлетворяющие формуле (9,1).

Так как в $M(\tilde{A}_n)$ входят те векторы из $M(A_n)$, которые удовлетворяют (9,1) и так как из (11,1) имеем

$$H \ominus M(\tilde{A}_n) = UM(\tilde{A}_n^*),$$

то ясно, что $UM(\tilde{A}_n^*)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $UM(A_n^*)$ и векторов $\{g_\nu, -f_\nu\}$ $\nu = 1, 2, \dots, n$. Но

$$\{g_\nu, -f_\nu\} = U\{-if_\nu, -ig_\nu\} = -iU\{f_\nu, g_\nu\}.$$

Таким образом, $M(\tilde{A}_n^*)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $M(A_n^*)$ и векторов $\{f_\nu, g_\nu\}$.

В силу этого $M(\tilde{A}_n) = M(\tilde{A}_n^*)$, отсюда и следует самосопряженность оператора \tilde{A}_n .

Из только что доказанной леммы еще нельзя заключить, что оператор \tilde{Q}_n сопряженный, так как хотя $D\tilde{Q}_n$ получается из DQ_n принципиально тем же способом, что и $D\tilde{A}_n$ из D_A в последней лемме, но, в отличие от A , Q_n не замкнут.

В связи с этим рассмотрим оператор A' , замыкание которого $\bar{A}' = A$. Пусть далее $A_n \supset A_n' \supset A'$, $A_n' f_\nu = g_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$

$$D_{A_n'} \cap D_A = D_A$$

и оператор $\tilde{A}_n' \subset A_n'$ такой, что $\psi \in D_{\tilde{A}_n'}$, если $\psi \in D_{A_n'}$ и удовлетворяет (7,1).

Покажем, что замыкание оператора $\tilde{A}_n' \bar{A}_n' = \tilde{A}_n$. Для этого достаточно показать, что множество $M(\tilde{A}_n')$ плотно в $M(\tilde{A}_n)$. Очевидно, $M(A_n')$ плотно в $M(A_n)$. И остается проверить, что множество векторов из $M(A_n')$, удовлетворяющее формуле (9,1), плотно в $M(\tilde{A}_n)$. Последнее верно, так как имеет место

Лемма 3. Пусть D — плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие, H_1 — подпространство H , причем $H_2 = H \ominus H_1$ имеет конечную размерность. Тогда $H_1 \cap D$ плотно в H_1 .

Доказательство этой леммы см. в [5].

Таким образом, самосопряженность оператора \tilde{Q}_n установлена.

§ 2. В § 1 было показано, что в $D_{A_n^*}$ входят такие векторы $\varphi \in D_A$, которые удовлетворяют (7,1). Отсюда следует, что $A_n^* \subset A$. Ввиду того, что оператор A_n определен на всюду плотном в H множестве и оператор A_n^* сопряженный к нему, то $D_{A_n^*}$ также плотно в H и, следовательно, A_n^* — симметрический оператор.

Из изложенного ранее следует также, что если $\varphi \in D_A$ и $\varphi \in D_{\tilde{A}_n}$, то $\varphi \in D_{A_n^*}$. Это означает, что A_n^* — максимальная общая часть операторов A и \tilde{A}_n и что A и \tilde{A}_n — взаимно простые самосопряженные расширения оператора A_n^* . Ясно также, что индексы дефекта оператора A_n^* равны (n, n) .

Пусть λ — произвольная общая точка регулярности операторов A , \tilde{A}_n и R_λ , \tilde{R}_λ — их резольвенты. Формула Крейна для резольвент самосопряженных расширений оператора A_n^* [6] дает связь между R_λ и \tilde{R}_λ :

$$\tilde{R}_\lambda f = R_\lambda f + \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik}(\lambda) (f, \psi_i(\bar{\lambda})) \psi_k(\lambda). \quad (1,2)$$

Здесь $\psi_i(\bar{\lambda})$ — полная система линейно независимых векторов из подпространства $H_{n\lambda} = H \ominus (A_n^* - \lambda I) D_{A_n^*}$;

$\psi_k(\lambda)$ — полная система линейно независимых векторов из подпространства $H_{n\bar{\lambda}} = H \ominus (A_n^* - \bar{\lambda} I) D_{A_n^*}$;

n — размерность $H_{n\lambda}$ и $H_{n\bar{\lambda}}$.

Теорема. Оператор \tilde{A}_n на ортогональном дополнении к его нулевому подпространству имеет вполне непрерывный обратный.

Доказательство. Достаточно показать, что резольвента \tilde{R}_λ имеет точечный спектр с единственной предельной точкой в нуле и что любое собственное подпространство \tilde{R}_λ с собственным числом, отличным от $-\frac{1}{\lambda}$, конечномерно.

Пусть U_λ — нулевое подпространство оператора A , V — подпространство такое, что $V \subset U_\lambda$ и для любого вектора f из V выполняется условие

$$(f, \psi_i(\bar{\lambda})) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2,2)$$

Из (1,2) следует, что $V \subseteq U_{\tilde{A}_n}$, где $U_{\tilde{A}_n}$ — нулевое подпространство оператора \tilde{A}_n . Так как операторы A , \tilde{A}_n самосопряженные, то V и $H \ominus V$ являются инвариантными подпространствами для R_λ и \tilde{R}_λ . Поэтому каждый из этих операторов можно рассматривать в виде

$$\tilde{R}_\lambda = \tilde{R}_{1\lambda} + \tilde{R}_{2\lambda}; \quad R_\lambda = R_{1\lambda} + R_{2\lambda}, \quad (3,2)$$

где $R_{1\lambda}$, $\tilde{R}_{1\lambda}$ — операторы, порождаемые операторами R_λ , \tilde{R}_λ на подпространстве $H \ominus V$;

$R_{2\lambda}$, $\tilde{R}_{2\lambda}$ — операторы, порождаемые операторами R_λ , \tilde{R}_λ на подпространстве V .

Отсюда и из (1,2) имеем

$$\tilde{R}_{1\lambda} = R_{1\lambda} + \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik}(\lambda) (\cdot, \psi_i(\bar{\lambda})) \psi_k(\lambda).$$

Оператор $R_{1\lambda}$ имеет точечный спектр с единственной предельной точкой в нуле, и все его собственные подпространства конечномерны. Поэтому $R_{1\lambda}$ — вполне непрерывный оператор. Оператор

$$\sum_{i,k=1}^n \beta_{ik}(\lambda) (\cdot, \psi_i(\bar{\lambda})) \psi_k(\lambda)$$

также вполне непрерывный. Отсюда следует вполне непрерывность оператора $\tilde{R}_{1\lambda}$.

Оператор $\tilde{R}_{2\lambda}$ таков что $\tilde{R}_{2\lambda} f = -\frac{1}{\lambda} f$.

Из только что рассмотренного вытекают все утверждения о характере спектра оператора \tilde{R}_λ . Теорема доказана.

В силу самосопряженности оператора \tilde{Q}_n и последней теоремы следует, что \tilde{Q}_n имеет полную ортогональную систему собственных вектор-функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. Метод несамосопряженных операторов в теории волноводов. «Радиотехника и электроника», 1962, т. VII, 281 — 297.
 2. Э. Б. Быховский. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы. «Вестн. ЛГУ», 1957, № 13, 50—56.
 3. О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961, 30 — 33.
 4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959, 559 — 561.
 5. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963, 46 — 47.
 6. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Гостехиздат, 1950, 344 — 350.
-

**О ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЯ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ВЕЩЕСТВА
МЕТОДОМ СПИРАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА**

К. П. Яцук

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был описан резонаторный вариант метода спирального резонатора для измерения диэлектрических проницаемостей вещества на сверхвысоких частотах. Представляет интерес рассмотрение вопроса о погрешностях указанного метода. Можно сказать, что погрешности метода обусловлены двумя причинами: погрешностями измерений и приближениями, допущенными при выводе формул. Анализ формулы, по которой рассчитывается ϵ , позволит определить величину погрешностей измерений и указать пути уменьшения их. Правильность принятых предположений может быть оценена путем проверки формулы на образцах с известным значением диэлектрических проницаемостей вещества.

**§ 1. О погрешностях формулы для измерения ϵ
твердых образцов**

Как показано в работе [1], формула для определения ϵ образцов, выполненных в виде тонких стержней и расположенных по оси системы «спираль в резонаторе», имеет вид

$$\epsilon = \frac{A(z^2 - 1)}{z} + 1 = \frac{(\mu_1^b + \mu_0^b)(z^2 - 1)}{(\mu_0^b - \mu_0^k) - z(\mu_0^a - \mu_0^a)} + 1,$$

где

$$A = \mu_1^b - \mu_0^b; \tag{1}$$

$$z = (\mu_0^b - \mu_0^k) - z^2(\mu_0^a - \mu_0^a);$$

$$\mu_m^a = \frac{K_m^n}{I_m^n} = \frac{K_m\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} n\right)}{I_m\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} n\right)};$$

$$m = 0, 1;$$

$n = a, b, r$ — радиусы спирали, образца и резонатора соответственно;
 λ_g — длина замедленной волны на частоте f_0 ;

$I_m^n, I_1^n, K_0^n, K_1^n$ — модифицированные функции Бесселя от аргумента $\frac{2\pi}{\lambda_g} n$;

$a^2 = (f_0/f_1)^2$; f_0, f_1 — резонансные частоты резонатора без образца и с образцом соответственно.

порядка 16 мм абсолютная ошибка измерения его должна быть порядка 0,16 мм, что достигается легко при измерении с помощью штанген-циркуля.

Обеспечить $\frac{\Delta a}{a} = 10^{-3}$ и $\frac{\Delta b}{b} = 10^{-3}$ значительно сложнее. Например, если радиус спирали $a = 7 \div 10$ мм, а измерение с помощью штанген-циркуля обеспечивает относительную ошибку измерения в 0,1 мм, то $\frac{\Delta a}{a} = 10^{-2}$. Так как коэффициенты ошибок для a составляют порядок $1 \div 2,5$, то и слагаемое относительной ошибки измерения за счет неточности измерения радиуса a составит величину $x_a = 1 \div 2,5\%$. При

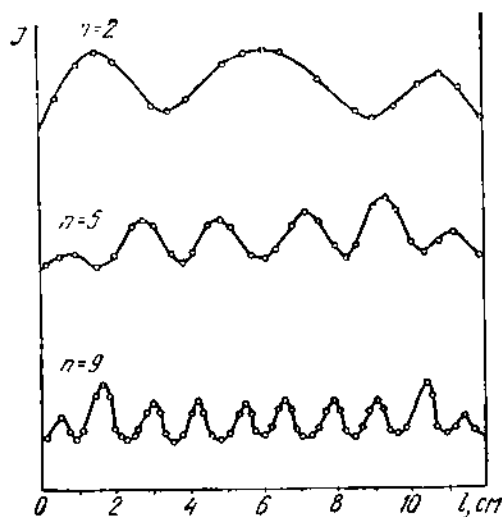


Рис. 3.

измерении диаметра образца с помощью микрометра можно обеспечить абсолютную ошибку измерений $\Delta b = 10^{-2}$ мм, а так как диаметры образцов составляют величину порядка 0,5—1 мм, то $\frac{\Delta b}{b} = 1 \div 2 \cdot 10^{-2}$ и слагаемое относительной ошибки измерения за счет неточности измерения диаметра образца даст величину порядка $1 \div 2\%$.

Можно увеличить точность измерения a и b путем использования микроскопа. С этой стороны задача оказывается разрешимой. Гораздо сложнее выполнить условия неизменности радиуса спирали за счет натяжения при сборке системы

и изготовление образца с допуском $\frac{\Delta b}{b} = 10^{-3}$ по всей длине образца.

Для обеспечения в нашем случае x_{λ_g} меньше 1% необходимо производить измерения длины замедленной волны в системе с абсолютной ошибкой порядка 1 мм в длинноволновой части диапазона, порядка нескольких миллиметров в средней части и порядка 0,1 мм в коротковолновой части диапазона частот. Измерять длину замедленной волны в системе можно по числу полуволн в системе и известной длине резонатора. При этом допускается определенная неточность в определении длины волны λ_g за счет наличия краевых эффектов. Как отметил еще Л. Н. Дерюгин [2], для спиральной системы не существует плоской зеркальной симметрии, необходимой для точного формирования поля в резонансном макете, и потому поля в системе будут несколько отличаться от полей в бесконечной спирали, для которой и получены все формулы.

На рис. 3 представлены зондограммы полей, снятые для случаев, когда в системе укладывается 2,5 и 9 полуволн. Из рисунка видно, что у торцов системы картины полей искажены. Измеренные по зондограммам длины волн λ_g без учета искажений у торцов отличаются от длин волн, определенных по числу полуволн в системе таким образом, что $\frac{\Delta \lambda_g}{\lambda_g}$ оказывается порядка 10%. Если считать, что именно это различие

в длинах волн и определяет величину относительной ошибки измерения λ_g , то с учетом величин коэффициентов ошибок $S(\lambda_g)$ слагаемое x_{λ_g} будет составлять величину порядка 1% в средней части диапазона и величины порядка 5—7% по краям диапазона частот.

Точность измерения резонансных частот определяется как прибором, примененным для измерений, так и добротностью резонатора. Применение волномеров высокой точности решает первую часть вопроса. Так, для описываемого резонатора в области от 200 до 800 мГц точность определения частоты была равна $\frac{\Delta f}{f} = 10^{-6}$, так как был применен волномер ВВТ-Д. И при этом слагаемое за счет измерения частоты x_f оказывалось порядка 0,8%.

Точность измерения частоты f_1 , соответствующая резонансу системы при наличии в ней испытуемого образца, уже не определяется только возможностями измерителя частоты, но и зависит в большой степени от точности установления резонанса, т. е. от добротности резонатора. При работе было обнаружено, что при внесении в резонатор одного и того же образца в разное время сдвиги частот могли отличаться на 5—6%, что говорит о том, что точность определения частоты

f_1 составляет величину $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 10^{-4}$ и это приводит к ошибке $x_{f_1} = 5—7\%$.

Как видно из сказанного, общая ошибка измерения ε в нашем случае составляла величину порядка 13—15% по краям диапазона частот и величину порядка 10% в средней его части.

Для примера на рис. 4 показаны результаты измерения и расчета ε стеклянного стержня диаметром $2b = 1,19$ мм в диапазоне частот и для сдвигов частот, указанных на графике 1, и для длин волн λ_g , определенных по числу полуволн в системе (см. кривую 2). Кривая 1 представляет собой рассчитанные значения ε для образца из полиэтилена диаметром $2b = 0,72$ мм. Из графика видно, что наибольшие отклонения значений диэлектрических проницаемостей вещества получаются по краям диапазона частот. Отмеченное завышение значений ε и для других образцов и материалов со стороны длинных волн позволяет сделать вывод о существовании систематической ошибки со стороны длинных волн. Вероятнее всего, это завышение обусловлено наибольшим искажением поля на этих частотах по сравнению с полем в бесконечной спирали, для которой выведены все соотношения.

Так как основная доля ошибки измерения ε определяется неточностью измерения частот и длин замедленных волн в системе, то для увеличения точности измерений нужно идти по пути устранения погрешностей, обусловленных указанными двумя параметрами. При этом следует идти в направлении увеличения жесткости конструкции для устранения разброса в значениях сдвигов частот и уменьшения ошибки

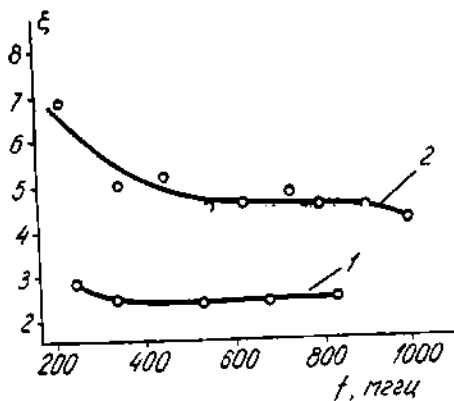


Рис. 4.

в определении радиуса спирали. Для уменьшения ошибки за счет не- точности измерения замедленной длины волны следует применять спи- рали с более густой намоткой, т. е. максимально приблизить реальный случай к условию анизотропно проводящего цилиндра. Можно ожи- дать, что указанным путем можно будет понизить общую ошибку из- мерения ϵ примерно до 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Яцук, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXII, № 1, 1962.
 2. Электромагнитные замедляющие системы. «Тр. МАИ им. С. Орджоникидзе», 125, М., Оборонгиз, 1960.
-

СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЯЗИ ИЗОГНУТОГО ВОЛНОВОДА, НАГРУЖЕННОГО ГРЕБЕНЧАТОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

Ю. А. Дейнека

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проявляется определенный интерес к равномерно изогнутым замедляющим системам в связи с возможным применением их в технике ускорения элементарных частиц, в различных типах генераторов СВЧ [1]. Так, в работе [2] исследуется распространение азимутальных электромагнитных волн между двумя неограниченными в аксиальном направлении цилиндрическими поверхностями, покрытыми слоем диэлектрика или нагруженными металлическими диафрагмами. В работе [3] рассмотрены изогнутые линии передач поверхностных волн, а именно: диэлектрический волновод, линия с диэлектрическим покрытием, ребристые структуры.

Результаты данной работы посвящены, в основном, применению таких систем в качестве линии передач. В статье [4] рассматриваются некоторые вопросы распространения азимутальных волн в диафрагмированном волноводе с фазовой скоростью, равной скорости света. Краткий перечень работ, посвященных исследованию изогнутых замедляющих систем, показывает, что в основном исследовались замедляющие системы как линии передач, либо их дисперсионные характеристики, либо возможности применения замедляющих систем в технике ускорения элементарных частиц. Однако, не меньший интерес представляет исследование влияния изгиба на энергетический параметр замедляющей системы — сопротивление связи $R_{св}$.

Сопротивление связи прямого волновода

Сопротивление связи будем определять для волны типа LE_{11} , так как синфазные волны типа LE и LM являются единственно возможными волнами для волновода, нагруженного периодическими структурами [5]. Схема и обозначение для такого волновода показаны на рис. 1. Представляя для синфазной волны магнитный вектор Герца в виде

$$\Pi_z = A \operatorname{sh} \rho x e^{j\eta y} \sin \gamma z, \quad (1)$$

можно с помощью уравнений Максвелла найти составляющие поля волны.

Сопротивление связи будем определять, используя выражение, данное в работе [7]:

$$R_{св} = \frac{E_y E_y^*}{2h^2 P}, \quad (2)$$

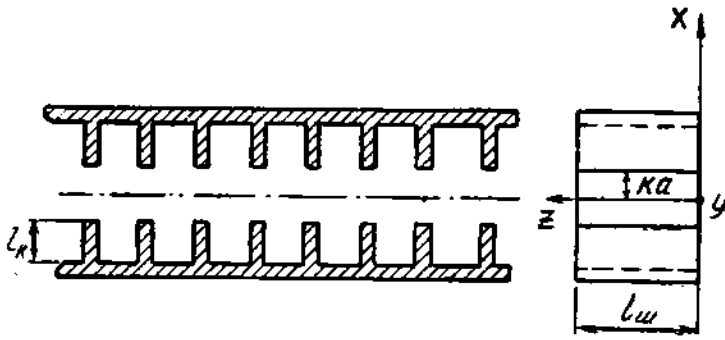


Рис. 1.

где P — средний за период поток энергии через поперечное сечение волновода, равный

$$P = \int_s \frac{E_x H_z^*}{2} ds.$$

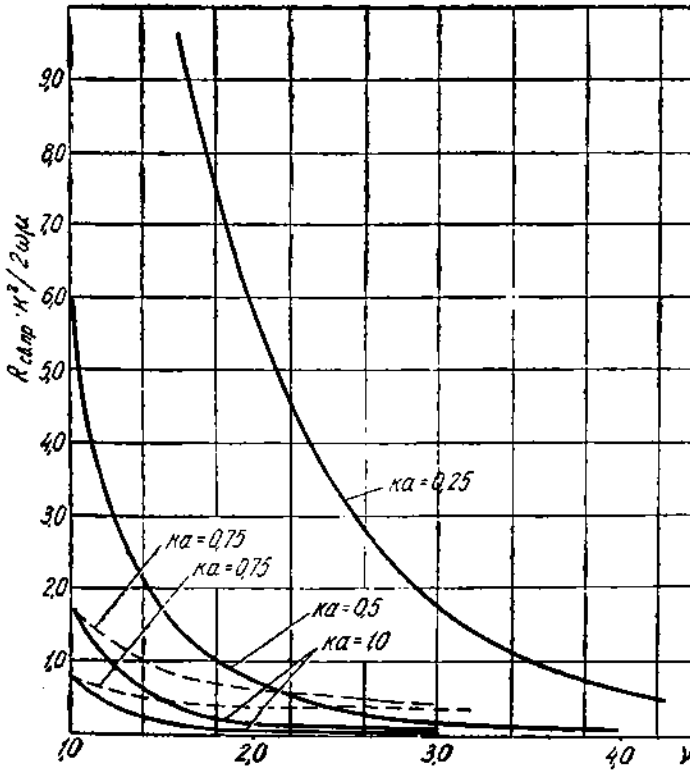


Рис. 2.

Коэффициент h — постоянная распространения вдоль оси y . Подставляя значения составляющих полей в формулу (2), получим выражение $R_{ср}$ для волновода, нагруженного однородной гребенкой:

$$R_{св} = \frac{2\omega\mu (\nu^2 - 1)^{3/2} \text{ch}^2 \alpha x \sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu^2 \alpha^2 \frac{l_{ш}}{2} [\text{sh} 2\alpha a \sqrt{\nu^2 - 1} - 2\alpha a \sqrt{\nu^2 - 1}]} \quad (3)$$

В формуле (3) даны следующие обозначения: $\nu = \frac{h}{x}$ — замедление фазовой скорости; $\alpha = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновой коэффициент, $\gamma = \frac{\pi}{l_{ш}}$ — коэффициент распространения между боковыми стенками.

Согласно формуле (3), на рис. 2 даны графики, показывающие изменение $R_{св}$ в зависимости от высоты волновода и величины замедления ν . Для упрощения расчетов здесь и в дальнейшем будем считать $l_{ш} = \infty$, а $\nu = \frac{h}{k}$, т. е. рассматривать волновод без боковых стенок. Как видно из графиков, с увеличением ν уменьшается $R_{св}$. При одинаковых ν $R_{св}$ больше у волноводов с меньшей высотой. $R_{св}$ определялось в центре волновода (сплошные кривые). У поверхности гребенки $R_{св}$ значительно больше (пунктирные кривые). Такой характер зависимости $R_{св}$ от ν и ka объясняется различной степенью прижатия поля при изменении этих параметров [3].

Сопrotивление связи изогнутого волновода

Схема такого волновода и связанные с ней обозначения даны на рис. 3. Сопrotивление связи n -ой гармоники можно определить как

$$R_{св} = \frac{E_{\theta n} E_{\theta n}^*}{2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 P_z} \quad (4)$$

где $E_{\theta n}$ — составляющая поля n -ой гармоники в азимутальном направлении;

P_z — суммарная мощность всех гармоник.

Для случая волновода, нагруженного периодическими структурами, магнитный вектор Π_z можно представить в виде

$$\Pi_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [A_n J_{\rho n}(xr) + B_n N_{\rho n}(xr)] e^{i\rho n z} \sin \gamma z \quad (5)$$

Находя составляющие поля с помощью (5) и подставляя их в формулу (4), получим

$$R_{св} = \frac{\omega\mu [A_n J_{\rho n}(xr) + B_n N_{\rho n}(xr)]^2 \sin^2 \gamma z}{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{l_{ш}}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \rho_n \int_{R_1}^{R_2} \frac{[A_n J_{\rho n}(xr) + B_n N_{\rho n}(xr)]^2}{r} dr} \quad (6)$$

Для того, чтобы подсчитать $R_{св}$, необходимо определить постоянные A_n и B_n и вычислить интеграл, входящий в формулу (6).

Методика определения постоянных A_n и B_n заключается в том, что находят комплексные мощности на границах I—II и III—IV.

Приравнявая эти мощности (метод «сшивания»), можно получить уравнения, определяющие искомые постоянные. В дальнейшем, ввиду большой сложности формулы (6), определим $R_{св}$ для случая волновода,

нагруженного однородной гребенкой. В этом случае достаточно определить только отношение постоянных $\frac{A}{B}$. Исходным выражением, полученным методом «сшивания», для определения постоянных будет

$$\frac{\frac{A}{B} \dot{I}_p(xR_1) + \dot{N}_p(xR_1)}{\frac{A}{B} \dot{I}_p(xR_2) + \dot{N}_p(xR_2)} = - \frac{\frac{A}{B} I_p(xR_1) + N_p(xR_1)}{\frac{A}{B} I_p(xR_2) + N_p(xR_2)}. \quad (7)$$

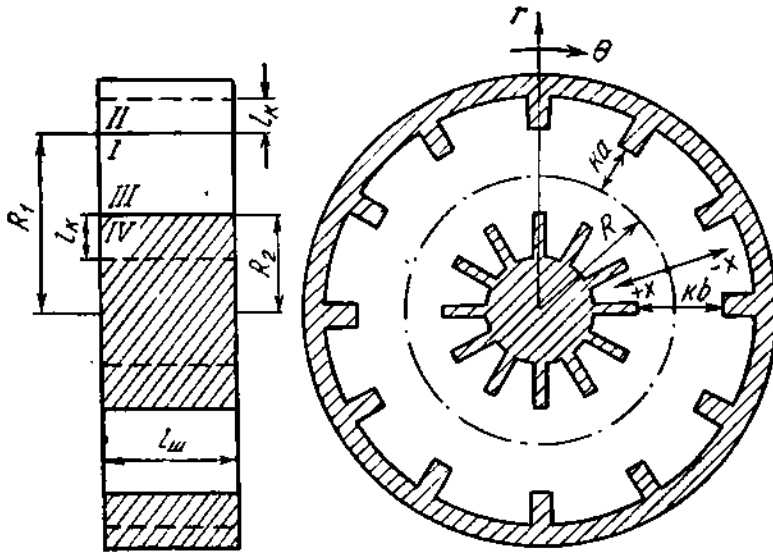


Рис. 3.

Поскольку $\frac{A}{B}$ зависит от цилиндрических функций, входящих в формулу (7), которые по-разному определяются с помощью асимптотических представлений в областях Фока и Дебая [6], величину $\frac{A}{B}$ и $R_{св}$ необходимо определить как для области Фока, так и для области Дебая.

Сопротивление связи в области Дебая

Заменяя в формуле (7) цилиндрические функции и их производные асимптотическими представлениями для области Дебая, получим

$$\frac{A}{B} = 2e^{2iR} \left[\pm \sqrt{\left(\frac{\alpha v^2}{R(\nu^2 - 1)} \operatorname{sh} 2\alpha a \sqrt{\nu^2 - 1} \right)^2 + 1} - \frac{\alpha v^2 \operatorname{sh} 2\alpha a \sqrt{\nu^2 - 1}}{R(\nu^2 - 1)} \right] \quad (8)$$

или в сокращенной записи

$$\frac{A}{B} = 2e^{iRF(\nu)}. \quad (9)$$

Данное приближенное выражение взято при соотношениях между ν , kR , ka , полученных ранее в работах [3, 8].

Вычислим интеграл формулы (6). Используя асимптотические представления цилиндрических функций и их производных, а также вспомогательные соотношения

$$\xi_r = \xi_R \pm \alpha x \sqrt{v^2 - 1}; \quad \text{th } \alpha_r = \text{th } \alpha_R \left[1 \pm \frac{x}{R\sqrt{v^2 - 1}} \right];$$

$$r = R - x; \quad \xi_R = \rho(\alpha_R - \text{th } \alpha_R); \quad \frac{\rho}{\alpha_R} = \text{ch } \alpha_R,$$

где ρ — азимутальный коэффициент распространения для случая $ka \ll kR$, можно получить следующее значение интеграла формулы (6):

$$\int_{R_2}^{R_1} \left(\frac{A}{B} \right)^2 \frac{I_p^2(\alpha r)}{r} dr = \left(\frac{A}{B} \right)^2 \frac{e^{-2\alpha R} \text{sh } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1}}{R 2\pi \rho \text{th } \alpha_R} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{x \sqrt{v^2 - 1}} + \frac{v^2 - 2}{2x^2 R (v^2 - 1)^2} \left[1 - 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \text{cth } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \right] \right\}; \quad (10)$$

$$\int_{R_2}^{R_1} 2 \frac{A}{B} \frac{I_p(\alpha r) N_p(\alpha r)}{r} dr = -\frac{4A}{B} \frac{a}{\pi \rho \text{th } \alpha_R}; \quad (11)$$

$$\int_{R_2}^{R_1} \frac{N_p^2(\alpha r)}{r} dr = \frac{2e^{2\alpha R} \text{sh } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1}}{\pi \rho \text{th } \alpha_R} \left\{ \frac{1}{x \sqrt{v^2 - 1}} + \frac{v^2 - 2}{2x^2 R (v^2 - 1)^2} \times \right.$$

$$\left. \times [2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \text{cth } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} - 1] \right\}. \quad (12)$$

Окончательное выражение для $R_{\text{св}}$:

$$R_{\text{св}} = \frac{\pi \alpha (v^2 - 1)^{3/2} [F(v) + 1]^2}{v^2 x^2 [F^2(v) f_1 - F(v) A \alpha a \sqrt{v^2 - 1} + f_2(v)] \frac{I_{\text{ин}}}{2}}. \quad (13)$$

В данной формуле

$$f_1(v) = \text{sh } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \left[1 + \frac{v^2 - 2}{2xR(v^2 - 1)^{3/2}} - \frac{(v^2 - 2)a}{R(v^2 - 1)} \text{cth } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \right]$$

$$f_2(v) = \text{sh } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1} \left[1 - \frac{(v^2 - 2)a \text{cth } 2\alpha a \sqrt{v^2 - 1}}{R(v^2 - 1)} - \frac{v^2 - 2}{2xR(v^2 - 1)^{3/2}} \right].$$

Сопrotивление связи в области Фока

Для данной области значений v и kR при определении $\frac{A}{B}$ из уравнения (7) необходимо заменить цилиндрические функции асимптотическими представлениями, соответствующими области Фока, тогда получим

$$\frac{A}{B} = \frac{u(t_0)}{4v(t_0)} F_1(v).$$

В свою очередь

$$F_1(v) = C \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{16D}{C}} \right],$$

где

$$C = \frac{2 \frac{v(t_0)}{u(t_0)} [u(t_{rp}) + \dot{u}(t_0) e^{-\alpha x b}] + 2[\dot{v}(t_{rp}) + \dot{v}(t_0) e^{-\frac{\beta x b}{2}}]}{\dot{v}(t_{rp}) + \dot{v}(t_0) e^{-\frac{\alpha x b}{2}}},$$

а

$$D = \frac{v(t_0)}{u(t_0)} \left[\frac{\dot{u}(t_{rp}) + \dot{u}(t_0) e^{\frac{\beta \times b}{2}}}{\dot{v}(t_{rp}) + \dot{v}(t_0) e^{\frac{-\alpha \times b}{2}}} \right].$$

В данных выражениях $u(t)$ и $v(t)$, $\dot{u}(t)$ и $\dot{v}(t)$ — функции Эйри и ее производные от аргументов t_0 и t_{rp} , соответствующих значению функции

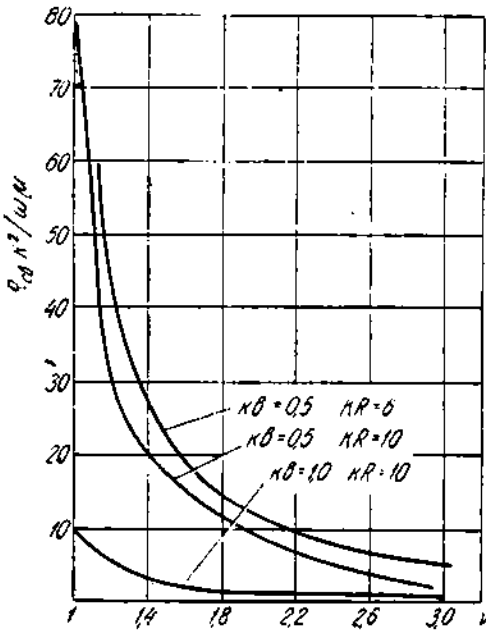


Рис. 4.

на верхней и нижней гребенках (рис. 2). В отличие от области Дебая, начало отсчета x находится на расстоянии R_1 , т. е. на границе вогнутой гребенки. Коэффициенты α и β определяются так же, как в работе [8]. Значение их можно найти по формулам

$$\alpha = \frac{2 \ln \left[\frac{v(t_{rp})}{v(t_0)} \right]}{\kappa b};$$

$$\beta = \frac{2 \ln \left[\frac{u(t_{rp})}{u(t_0)} \right]}{\kappa b}.$$

При вычислении интегралов функции Эйри аппроксимируем в виде экспонент, причем требуем, чтобы аппроксимирующая экспонента была равна функции Эйри в двух точках на расстояниях R_1 и R_2 . При данных условиях $R_{св}$ в области Фока имеет вид

$$R_{св} = \frac{\omega \mu \left[\frac{\dot{u}(t_x)}{u(t_0)} - \frac{1}{4} F_1(\nu) \frac{\dot{v}(t_x)}{v(t_0)} \right]^2 \left(1 - \frac{x}{R_1} \right)^{2/3}}{\sqrt{3} x^2 \frac{I_{ш}}{2} \left(\frac{x R_1}{2} \right)^{2/3} \left[\frac{F_1(\nu)}{16} P_1 - \frac{1}{2} F_1(\nu) P_2 + P_3 \right]}, \quad (14)$$

где t_x — значение аргумента функции Эйри на расстоянии x от начала координат.

Таким образом, можно согласно формуле (14) вычислить сопротивление связи в любой точке. Коэффициенты P_1 , P_2 , P_3 имеют вид

$$P_1 = \frac{1 - e^{-\alpha \times b}}{\alpha} + \frac{5}{3\alpha^2 x R_1} [1 - (\alpha \times b + 1) e^{-\alpha \times b}];$$

$$P_2 = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha \times b}{2}(\alpha - \beta)}}{\frac{\alpha - \beta}{2}} + \frac{5}{3\alpha R_1 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^3} \left[1 - e^{-\frac{\alpha \times b}{2}(\alpha - \beta)} \left[1 + \frac{\alpha \times b (\alpha - \beta)}{2} \right] \right];$$

$$P_3 = \frac{e^{\beta \times b} - 1}{\beta} + \frac{5}{3\beta^2 x R_1} [e^{\beta \times b} (\beta \times b - 1) + 1];$$

$$\nu = \frac{P}{x R_1}.$$

По формулам (13), (14) построен ряд кривых для различных ν , kb , позволяющих выяснить зависимость $R_{св}$ от этих величин. Для упрощения расчетов при построении графиков рассматривался волновод без боковых стенок. При наличии боковых стенок формулы останутся без изменения, но k необходимо заменить на κ , а

$$\kappa = k \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2l_{ш}}\right)^2}.$$

На рис. 4 даны графики, характеризующие зависимость $R_{св}$ от величины ν . На рис. 5 показана зависимость изменения $R_{св}$ от радиуса изгиба kb . Для сравнения с прямым волноводом по оси ординат отложено отношение сопротивлений прямого и изогнутого волноводов. Из графиков можно сделать также вывод о характере влияния на величину $R_{св}$ высоты волновода. Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. По формулам (3), (13), (14) можно рассчитать $R_{св}$ при заданных ν , kb , ka в областях Фока и Дебая с точностью, достаточной для инженерных расчетов.
2. Изгиб волновода (рисунки 4, 5) приводит к вредному эффекту — уменьшает $R_{св}$.
3. Изгиб волновода сильно сказывается при $kb \sim 1,0$. При малых высотах волновода — $kb < 0,5 - 1,0$ изгиб практически не влияет на $R_{св}$.
4. Сопrotивление связи сильно зависит от величины замедления системы. Чем меньше ν , тем больше сказывается влияние изгиба, и наоборот.

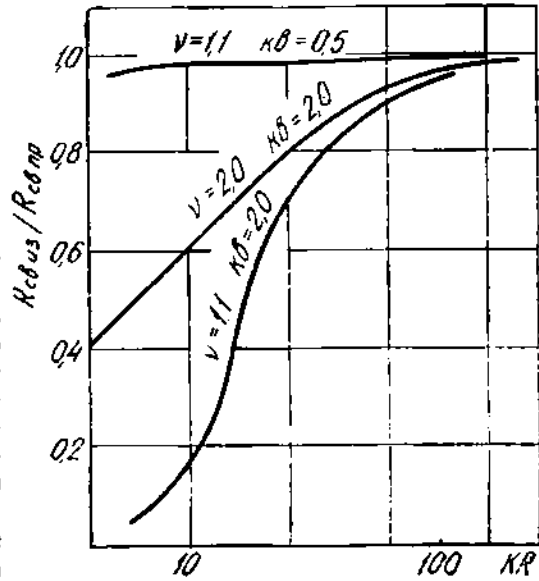


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воробьев. Некоторые вопросы теории циклических ускорителей. Изв. вузов СССР, «Электромеханика», 1952, 2, № 5, 106; 1958, 2, № 11, 18.
2. А. Н. Диденко. Распространение электромагнитных волн в изогнутых нагруженных волноводах. «Радиотехника и электроника», 1955, 4, № 2, 172.
3. П. Р. Череп. Изгибы волноводов с поверхностной волной. Автореф. канд. дисс., Киев, 1958.
4. Б. Н. Морозов. Некоторые вопросы распространения электромагнитных волн в изогнутых волноводах, нагруженных периодическими структурами. Изв. вузов СССР, «Радиотехника», 1960, 3, № 4, 493.
5. Е. С. Коваленко, В. И. Шиманский. Сифазные волны в диафрагмированном волноводе. Изв. вузов СССР, «Радиотехника», 1960, № 2, 153.
6. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, М., Изд. АН СССР, 1964.
7. Дж. Пирс. Лампа с бегущей волной, М., изд-во «Сов. радио», 1952.
8. Ю. А. Дейнека. Сопrotивление связи равномерно изогнутых замедляющих систем. Изв. вузов СССР, «Радиотехника», 1964, 7, № 4, 532.

О ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Д. Д. Литвинов

Выбор варианта измерительной схемы или создание измерительного прибора, отвечающего заранее поставленным требованиям, не представляется возможным без предварительного детального анализа источников погрешностей и оценки влияния их на точность измерения.

Анализу погрешностей измерительной линии посвящен ряд работ [1—2]. Анализ погрешностей устройства, состоящего из зондовой головки и сдвигателя фазы стоячей волны, в достаточно полном виде в литературе не приведен. Следует также отметить, что в указанной литературе описан анализ погрешностей методом эквивалентных схем, который имеет ряд недостатков. Он очень громоздкий, так как часто требует эквивалентного представления каждой отдельной неоднородности тракта [1—2, 5, 6]. Последнее является причиной малой общности этого метода, ибо требует учета особенностей каждой данной конструкции. Кроме того, некоторые факторы, влияющие на точность измерения, невозможно отобразить на эквивалентной схеме (например, наличие щелевой волны).

В данной работе для сравнения точности измерения КСВН этими двумя приборами приводится анализ присущих им погрешностей. Вывод выражений для максимальных или предельных значений парциальных погрешностей измерения КСВН этими приборами произведен с единой точки зрения с помощью матриц рассеяния. Взят самый общий случай, т. е. рассмотрены многополюсники с потерями. Благодаря этому результаты анализа могут быть использованы для оценки погрешностей измерительных линий и зондовых головок с фазосдвигателем как сантиметрового, так и миллиметрового диапазона радиоволн, где потери в волноводном тракте значительны.

* * *

В отличие от прямопоказывающих приборов (вольтметры, гальванометры и т. п.) устройства, применяющиеся для измерения КСВН, обычно используются в комплекте с другими приборами: генератором, индикатором и т. д. Поэтому, очевидно, в погрешность измерения КСВН неизбежно войдут также погрешности, обусловленные генератором, индикатором и др. Далеко не всегда данные генератор и индикаторная схема являются неотъемлемой частью определенного измерителя КСВН. Погрешность измерения КСВН нагрузки тем или иным измерителем, очевидно, можно разбить на три части:

1. Погрешность, обусловленную генератором.
2. Погрешность собственно измерителя.
3. Погрешность, обусловленную индикатором.

В статье полностью рассмотрены погрешности второй группы, а из погрешностей первой и третьей группы — только погрешности, обуслов-

ленные рассогласованием генератора и индикатора с высокочастотным трактом. Погрешности, вызванные непостоянством уровня высокочастотных колебаний и неквадратичностью характеристики детектора, довольно полно рассмотрены в литературе [3] и в данной статье не анализируются. Для обоих измерительных устройств рассмотрены погрешности измерения КСВН высокочастотных нагрузок методом «максимума — минимума».

1. Измерительная линия, как показано на рис. 1, может быть представлена в виде шестиполосника. Как известно, в шестиполоснике связь между амплитудами падающих a_i и отраженных b_i волн может быть записана с помощью матрицы рассеяния третьего порядка, т. е.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

или $\hat{b} = \hat{S} \cdot \hat{a}$.

Если к зажимам 1—1 присоединить измерительный генератор, к зажимам 3—3 — измеряемую нагрузку, а к зажимам 2—2 — детекторную головку, то можно показать, что амплитуду волны, падающей на детекторную головку, можно представить как (9)

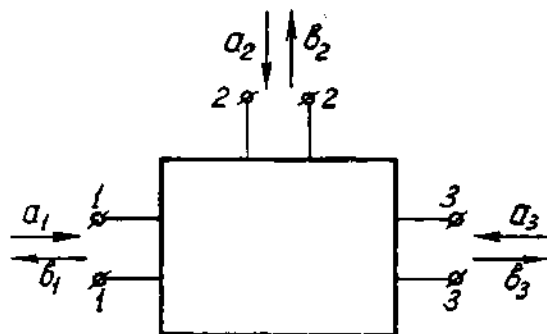


Рис. 1.

$$b_2 = - \frac{\Delta_{12} \cdot a_1^0}{\Gamma_1 \cdot \Delta}, \quad (2)$$

где Δ_{12} — алгебраическое дополнение определителя Δ ;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma_1 S_{11} - \Gamma_2 S_{12} \Gamma_3 S_{13} \\ \Gamma_1 S_{21} \Gamma_2 S_{22} - \Gamma_3 S_{23} \\ \Gamma_1 S_{31} \Gamma_2 S_{32} \Gamma_3 S_{33} - 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

— определитель матрицы нагруженного шестиполосника;

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — коэффициенты отражения соответственно генератора, детекторной головки и измеряемой нагрузки;

$$a_1^0 = a_1 - \Gamma_1 b_1.$$

Определитель системы (Δ) не равен нулю, так как при неработающем СВЧ генераторе рассматриваемая система является пассивной. Пусть $b_{2\text{мин}}$ и $b_{2\text{макс}}$ соответствуют положению зонда измерительной линии в минимуме и максимуме стоячей волны. Если предположить, что собственно измерительная линия описывается исходной матрицей \hat{S} , когда зонд линии находится в максимуме стоячей волны, то при перемещении его в минимум стоячей волны, как показано в [5], \hat{S} изменится на \hat{S}' таким образом:

$$\hat{S}' = \hat{P} \hat{S} \hat{P},$$

где \hat{P} — диагональная матрица, k -тый диагональный член которой определяется выражением:

$$P_{kk} = e^{j2\pi \frac{l_k}{\lambda_k}}, \quad (4)$$

где λ_k — длина волны в k -той ветви шестиполюсника;

l_k — длина, на которую изменилось расстояние от места соединения шестиполюсника до зажимов $k-k$.

В общем случае это преобразование справедливо для систем без потерь, но оно может быть применено и для систем с потерями при малых смещениях плоскости зажимов, когда потерями на участке смещения можно пренебречь.

В соответствии с (2), (3), (4) запишем измеренный КСВН:

$$k_{\text{изм}} = \left| \frac{b_{2\text{макс}}}{b_{2\text{мин}}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} S_{21}\Gamma_3 S_{23} & -\Gamma_1 S_{11} - 1 - j\Gamma_2 S'_{12} \Gamma_3 S_{13} \\ S_{31}\Gamma_2 S_{33} - 1 & -j\Gamma_1 S'_{21} \Gamma_2 S_{22} - 1 \quad j\Gamma_3 S'_{23} \\ \Gamma_1 S_{31} j\Gamma_2 S'_{32} - \Gamma_3 S_{32} - 1 & \Gamma_1 S_{11} - 1 \quad \Gamma_2 S_{12} \quad \Gamma_3 S_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -jS'_{21} j\Gamma_3 S'_{23} & \Gamma_1 S_{11} - 1 \quad \Gamma_2 S_{12} \quad \Gamma_3 S_{13} \\ S_{21} - \Gamma_3 S_{33} - 1 & \Gamma_1 S_{21} \quad \Gamma_2 S_{22} - 1 \quad \Gamma_3 S_{23} \\ \Gamma_1 S_{31} \quad \Gamma_2 S_{32} \quad \Gamma_3 S_{33} - 1 & \Gamma_1 S_{31} \quad \Gamma_2 S_{32} \quad \Gamma_3 S_{33} - 1 \end{vmatrix}} \right|. \quad (5)$$

Последнее справедливо, когда зонд незначительно искажает формулу поля стоячей волны, т. е. когда расстояние между соседними максимумом и минимумом стоячей волны равно четверти длины волны в волноводе, что без особого труда удовлетворяется на практике [6]. Штрихами обозначены коэффициенты передачи, модуль которых может изменяться при перемещении зонда линии из максимума в минимум. Уравнение (5) является исходным для определения предельных значений парциальных погрешностей измерительной линии. Метод поэлементного анализа погрешностей устройства весьма удобен при разработке измерительных устройств, так как при этом важно знать влияние того или иного источника погрешностей.

Из (5) видно, что измеренный КСВН ($k_{\text{изм}}$) равен истинному ($k_{\text{ист}}$) при следующих предположениях:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = S_{33} = 0; \quad |S_{21}| = |S'_{21}| \quad \text{и} \quad \Gamma_3 \frac{S_{23} S_{31}}{S_{21}} = |\Gamma_3|.$$

Отсюда видно, что существует пять источников погрешности измерения КСВН. Для оценки влияния этих источников на погрешность измерения определим относительные парциальные погрешности. Максимально возможные значения этих парциальных погрешностей будут иметь следующий вид:

1. Погрешность, обусловленная отражениями со стороны генератора ($\Gamma_1 \neq 0$):

$$\delta_1 = \frac{+2j\Gamma_1 S_{11}}{1 - |\Gamma_1 S_{11}| - |\Gamma_1 \Gamma_3|^2 |S'_{13}|^2}. \quad (6)$$

2. Погрешность, обусловленная отражением от детекторной головки ($\Gamma_2 \neq 0$):

$$\delta_2 = \frac{+2j\Gamma_2 \Gamma_3 j \cdot S_{21}^2}{1 - |\Gamma_2 S_{22}| - |\Gamma_2 \Gamma_3|^2 |S'_{13}|^2}. \quad (7)$$

3. Погрешность за счет отражения от измерительной линии в сторону нагрузки ($S_{33} \neq 0$):

$$\delta_3 = \frac{\pm 2|\Gamma_3^2 S_{33}|(1 + |S_{33}|)}{(1 - |\Gamma_3| - |\Gamma_3 S_{33}|)(1 + |\Gamma_3 S_{33}|)(1 + |\Gamma_3|)} \quad (8)$$

4. Погрешность, обусловленная потерями в тракте ИЛ на участке зонд — нагрузочный фланец ($|\frac{S_{22} S_{31}}{S_{21}}| \neq 1$):

$$\delta_4 = -\frac{2|\Gamma_3| \left(1 - \frac{S_{22} S_{31}}{S_{21}}\right)}{\left(1 - \frac{|\Gamma_3 S_{22} S_{31}}{S_{21}}\right)(1 + |\Gamma_3|)} \quad (9)$$

5. Погрешность за счет непостоянства связи зонда линии с измерительным волноводом при перемещении каретки ($|S_{21}| \neq |S'_{21}|$):

$$\delta_5 = \pm 2\delta |S_{21}| \quad (10)$$

Формулы (6), (9) и (10) совпадают с аналогичными выражениями [2 и 5]. Погрешность δ_2 в литературе ранее не рассматривалась. Погреш-

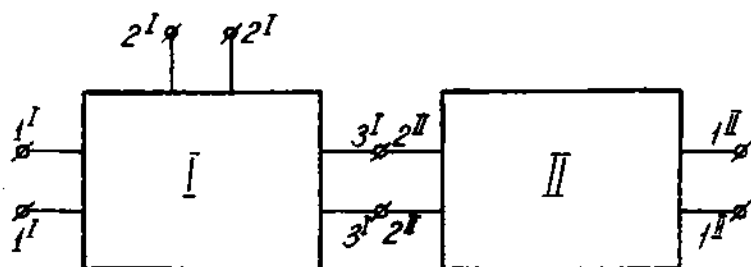


Рис. 2.

ность δ_2 учитывалась в виде погрешностей, обусловленных шунтирующим действием зонда и скачкообразным изменением поперечных размеров волновода измерительной линии в сечении фланца.

II. Измеритель КСВН с фазосдвигателем может быть представлен в виде последовательно соединенных шести- и четырехполюсника (рис. 2).

Выражение общего члена матрицы рассеяния такого соединения нами было получено по методике, приведенной в [7]. Рассматриваемое соединение можно представить в виде результирующего шестиполюсника, матрица рассеяния которого записывается так:

$$\begin{pmatrix} S_{11}^I - \frac{S_{13}^I S_{22}^{II} S_{31}^I}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & S_{12}^I - \frac{S_{13}^I S_{22}^{II} S_{32}^I}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & -\frac{S_{13}^I S_{21}^{II}}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} \\ S_{21}^I - \frac{S_{23}^I S_{22}^{II} S_{31}^I}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & S_{22}^I - \frac{S_{23}^I S_{22}^{II} S_{32}^I}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & -\frac{S_{23}^I S_{21}^{II}}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} \\ -\frac{S_{31}^I S_{12}^{II}}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & -\frac{S_{32}^I S_{12}^{II}}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} & S_{11}^{II} - \frac{S_{12}^I S_{33}^I S_{21}^{II}}{S_{23}^I S_{22}^{II} - 1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Используя (2), (3), (11) и методику, подобную описанной выше, получим выражения для максимальных значений парциальных погрешностей измерения КСВН этим устройством:

1. Погрешность, обусловленная отражениями со стороны генератора ($\Gamma_1 \neq 0$):

$$\delta_1 = \frac{\pm 2 |\Gamma_1 \Gamma_3| |S_{13}^I|^2}{1 - |\Gamma_1 \Gamma_{11}^I| - |\Gamma_1 \Gamma_3| |S_{13}^I|^2}. \quad (12)$$

2. Погрешность, обусловленная отражением от детекторной головки ($\Gamma_2 \neq 0$):

$$\delta_2 = \frac{\pm 2 |\Gamma_2 \Gamma_3| |S_{23}^I|^2}{1 - |\Gamma_2 S_{22}^I| - |\Gamma_2 \Gamma_3| |S_{23}^I|^2}. \quad (13)$$

3. Погрешность за счет отражения от зондовой головки в сторону фазосдвигателя ($S_{33}^I \neq 0$):

$$\delta_3 = \frac{\pm 2 |\Gamma_3 S_{33}^I| (1 + |S_{33}^I|)}{(1 + |\Gamma_3 S_{33}^I|) (1 - |\Gamma_3| - |\Gamma_3 S_{33}^I|) (1 + |\Gamma_3|)}. \quad (14)$$

4. Погрешность, обусловленная отражением от фазосдвигателя в сторону зондовой головки ($S_{22}^{II} \neq 0$):

$$\delta_4 = \frac{\pm 2 |\Gamma_3 S_{22}^{II}|}{(1 - |S_{22}^{II}| - |\Gamma_3|) (1 + |\Gamma_3|)}. \quad (15)$$

5. Погрешность, обусловленная отражением от фазосдвигателя в сторону измеряемой нагрузки ($S_{11}^{II} \neq 0$):

$$\delta_5 = \frac{\pm 2 |\Gamma_3 S_{11}^{II}| (1 + |S_{11}^{II}|)}{(1 + |\Gamma_3 S_{11}^{II}|) (1 - |\Gamma_3 S_{11}^{II}| - |\Gamma_3|) (1 + |\Gamma_3|)}. \quad (16)$$

6. Погрешность, обусловленная потерями на участке волноводного тракта от зонда до нагрузки ($\left| \frac{S_{21}^I S_{23}^I}{S_{21}^I} \right| \neq 1$ и $|S_{12}^{II}| \neq 1$):

$$\delta_6 = \frac{2 |\Gamma_3| \left(1 - \left| S_{21}^I S_{12}^{II} \frac{S_{23}^I}{S_{21}^I} \right| \right)}{\left(1 - \left| \Gamma_3 S_{21}^I S_{12}^{II} \frac{S_{23}^I}{S_{21}^I} \right| \right) (1 + |\Gamma_3|)}. \quad (17)$$

(При выводе выражений (15), (16) полагалось, что отражения от фазосдвигателя в положении индикации минимума и максимума стоячей волны равны по модулю).

Проанализируем выражения для погрешностей измерения КСВН с помощью ИЛ и с помощью зондовой головки и фазосдвигателя. Сравнивая выражения (6) и (12), видим, что в последнем к генератору СВЧ колебаний предъявляются более жесткие требования по согласованию с волноводным трактом. При этом согласование генератора должно быть тем лучше, чем больший КСВН необходимо измерять, в то время как в случае измерительной линии при измерении различных КСВН δ_1 (6) изменяется незначительно. На рис. 3 показана зависимость δ_1 от КСВН измеряемой нагрузки, рассчитанная по формуле (12) для случаев $|S_{11}^I| = 0,025$; $|\Gamma_1| = 0,05$ и $|\Gamma_1| = 0,09$. Для этих же двух случаев погрешность δ_1 , рассчитанная по формуле (6), при КСВН от 1 до 5 соответственно равна, примерно, $\pm 0,2\%$ и $\pm 0,5\%$.

Эти результаты объясняются тем, что при работе с измерительной линией нагрузка генератора в процессе одного измерения очень мало

изменяется вследствие перемещения слабо отражающего зонда, а при изменении электрической длины между генератором и нагрузкой на $\lambda_g/4$ это изменение весьма значительно. Последнее обстоятельство и приводит в случае устройства с фазосдвигателем к значительной погрешности за счет рассогласования генератора. Следует заметить, что при этом рассмотрении явление затягивания генератора не учитывалось.

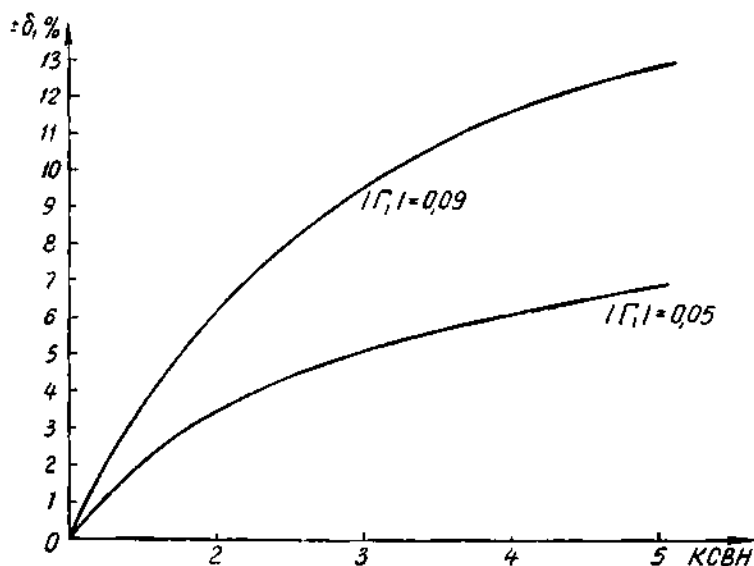


Рис. 3.

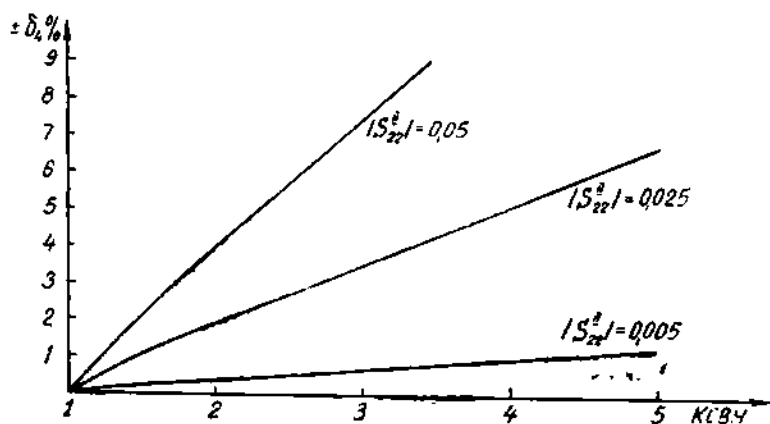


Рис. 4.

Выражения (7) и (13), (8) и (14) попарно внешне совершенно одинаковы, но величины соответствующих коэффициентов S_{ik} могут в основном в зависимости от конструктивного и технологического выполнения приборов несколько отличаться друг от друга. Однако величины погрешностей δ_2 и δ_4 вообще весьма малы (десятые доли процента), и небольшое отличие в S_{ik} не может существенно сказаться на них и тем более на

величине результирующей погрешности. Эти частные погрешности для обоих измерительных устройств можно считать попарно равными.

Погрешности, описанные выражениями (15) и (16), присущи только измерителю, состоящему из зондовой головки и фазовращателя. Величины этих погрешностей могут быть существенными особенно при измерении больших КСВН (рис. 4 и рис. 5). Так, при КСВН измеряемой нагрузки, равном 3, и $|S_{22}^{11}| = |S_{11}^{11}| = 0,025$ эти погрешности равны следующим величинам: $\delta_z \approx \pm 3,5\%$; $\delta_s \approx \pm 0,9\%$.

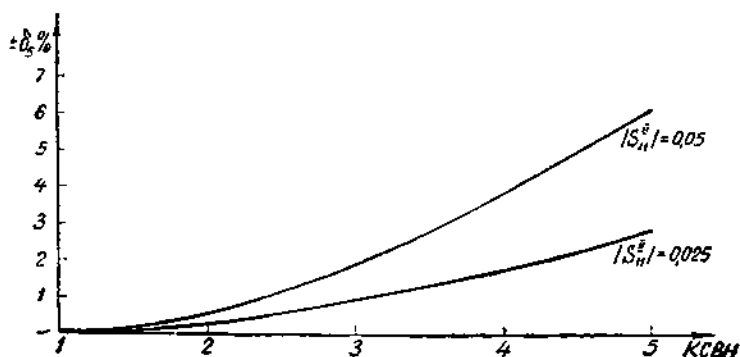


Рис. 5.

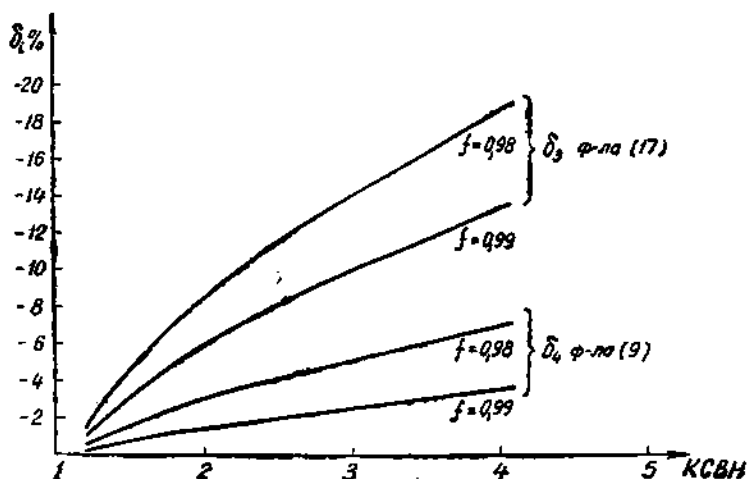


Рис. 6.

Погрешности, обусловленные потерями в волноводном тракте на участке зонд — нагрузочный фланец (9) и (17), присущи обоим измерителям. Однако величины их могут существенно различаться, если потери в фазосдвигателе значительны. Особенно велика разность между величинами этих двух погрешностей в коротковолновой части миллиметрового диапазона, где потери в диэлектрике велики. Если предположить, что

$$\frac{|S_{22}S_{21}|}{|S_{11}|} = \frac{|S_{22}^1 S_{21}^1|}{|S_{11}^1|} = f^2 \text{ и } |S_{12}^{11}| f = f^2$$

(случай, близкий к встречающимся на практике), то зависимости $\delta_s = \delta_s(f)$ (КСВН), рассчитанные по формулам (9) и (17), могут быть представлены графиками, изображенными на рис. 6.

Погрешность (10), обусловленная непостоянством связи зонда с измерительным волноводом при перемещении каретки, присуща только ИЛ. Величина этой погрешности, согласно проекту ГОСТа, на линии измерения для ИЛ третьего класса должна быть не более $\pm 3\%$.

Из сравнительного анализа частных погрешностей следует, что хотя погрешности того или иного конкретного измерителя рассмотренных двух типов существенно зависят от его конструктивного и технологического выполнения, измерительная линия является более точным прибором, а также что устройство с фазосдвигателем пригодно для измерения (с приемлемой точностью) только нагрузок с КСВН порядка 1,2 и менее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. И. Перс. Измерение импедансов в диапазоне сантиметровых волн, М., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Техника измерений на сантиметровых волнах. т. 1, под ред. Г. А. Ремеза, М., Изд-во «Сов. радио», 1951.
3. И. А. Коваленко. «Радиоэлектроника», 1957, № 15.
4. Теория линий передачи сверхвысоких частот. т. 1, под ред. А. И. Шпунтова, М., изд-во «Сов. радио», 1951.
5. М. Е. Герценштейн. «Измерительная техника», 1956, № 4, 37.
6. W. Altar, E. V. Marshall, L. Hunter. PIRE, v. 34, № 1, 1946.
7. Б. М. Машковцев. «Радиотехника», 1952, № 6.
8. Б. М. Машковцев. «Радиотехника», 1964, № 8.

ОБ ИЗМЕРЕНИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВЯЗИ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

В. Г. Шульга, А. Г. Шеник

В электронных приборах СВЧ с длительным взаимодействием связь между электронным потоком и полем бегущей волны характеризуется величиной сопротивления связи [1]:

$$R_{св} = \frac{E_{rk}^2}{2\beta_k^2 P}, \quad (1)$$

где E_{rk} — амплитуда продольной составляющей электрического поля для k -ой пространственной гармоники;

β_k — фазовая постоянная распространения k -ой пространственной гармоники.

P — поток мощности, переносимый в замедляющей системе бегущей волной.

Поскольку теоретическое определение сопротивления связи в большинстве случаев является трудной задачей из-за сложных граничных поверхностей замедляющих систем, то, как правило, прибегают к экспериментальному определению его величины.

Одним из наиболее приемлемых способов экспериментального определения величины сопротивления связи является метод малых возмущений частоты. Сущность этого метода состоит в определении продольной составляющей электрического поля посредством измерения абсолютных сдвигов частоты макета замедляющей системы при введении в него малого возмущающего тела [2].

Используя теорему возмущений Слэттера [2], можно показать, что

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\int_V (\mu H^2 - \epsilon E^2) dV}{\int_V (\mu H^2 + \epsilon E^2) dV}, \quad (2)$$

где $\Delta\lambda$ — объем возмущающего тела;

V — объем резонатора.

Из (2) легко заметить, что при введении малого диэлектрического возмущающего тела происходит изменение резонансной частоты резонатора, пропорциональное величине электрической составляющей поля, т. е.

$$E_{отн} \sim \sqrt{\Delta\lambda}. \quad (3)$$

Учитывая, что поток мощности, проходящей вдоль системы, определяется как

$$P = v_{гp} W, \quad (4)$$

где $v_{гр}$ — скорость распространения энергии вдоль системы;

W — запас энергии на единицу длины системы, и подставляя (4) в (1), получаем

$$R_{св} = \frac{E_{rk}^2}{2\beta_k^2 v_{гр} W} = \frac{1}{2\beta_k^2 v_{гр}} \frac{E_{rk}^2}{W}. \quad (5)$$

Величины $\beta_k = \frac{\omega}{v_k}$ и $v_{гр}$ находятся из дисперсионной характеристики. Следовательно, для вычисления величины сопротивления связи необходимо найти отношение $\frac{E_{rk}^2}{W}$. Это отношение определяется с помощью введения малого возмущающего тела в замедляющую систему. Действительно, используя теорему Слэттера (2), можно показать, что [2]

$$\frac{E_{rk}^2}{W} = 480\pi \frac{c}{l} D \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\tau} \right)_{\Delta\tau \rightarrow 0}, \quad (6)$$

где D — общая длина макета.

λ — длина волны соответствующего резонанса;

$\Delta\lambda$ — смещение резонансной длины волны.

Соотношение (6) справедливо при $\Delta\tau \rightarrow 0$, т. е. при внесении возмущающего тела существенно не изменяется распределение поля в замедляющей системе.

Учитывая вышесказанное и в соответствии с (5) и (6), получаем окончательное выражение для экспериментального определения величины сопротивления связи:

$$R_{св} = \frac{30}{\pi} \left(\frac{E_r}{E_f} \right) \frac{c}{v_{гр}} \left(\frac{v_{ф}}{c} \right)^2 \lambda D \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\tau} \right)_{\Delta\tau \rightarrow 0}, \quad (7)$$

где E_f — величина возмущенного электрического поля;

E_r определяется из разложения функции в ряд Фурье для соответствующего вида колебаний [2].

В основе предлагаемого метода тоже лежит способ малых возмущений частоты. Но в этом случае объемный резонатор используется как частотный дискриминатор, что исключает необходимость измерения абсолютных сдвигов частоты [3].

В самом деле, вследствие того, что короткозамкнутый отрезок замедляющей системы обладает резонансными свойствами, изменение его собственной частоты (частота возбуждающего поля остается неизменной) вызывает изменение амплитуды высокочастотного поля на выходе.

Предположим, что в системе существует только E_z , составляющая поля. Тогда из (2) при $H = 0$ получаем

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{\int_V \dot{E}_z^2 dV}{\int_V E_z^2 dV}. \quad (8)$$

При $\Delta\tau \rightarrow 0$ можно считать, что поле E неизменно в этом объеме, т. е.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\tau}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{|\dot{E}_z|^2}{\int_V |E|^2 dV}. \quad (9)$$

Поскольку относительное изменение длины волны пропорционально изменению частоты, то это выражение можно переписать в виде [3]

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta \varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{|\bar{E}|^2}{\int |\bar{E}|^2 dV}. \quad (10)$$

В линейном приближении считаем, что приращение энергии резонатора при изменении частоты

$$\Delta W = \frac{dW}{d\omega} \Delta \omega, \quad (11)$$

где $\Delta W = \frac{W}{W_{\max}}$ — относительная энергия в системе;

W_{\max} — максимальная энергия в системе.

Тогда, с учетом частотной характеристики системы, приращение сигнала после детектора можно представить как

$$\Delta \omega = \frac{d\omega}{d\varepsilon} \frac{\Delta \omega}{\omega}, \quad (12)$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\omega}$ — относительное смещение частоты. Из соотношения (10) и (12) получаем

$$\bar{E} = \sqrt{2\Delta \omega \frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{\int |\bar{E}|^2 dV}{\Delta \varepsilon}}. \quad (13)$$

Как известно [4],

$$R_{\text{св}} = \frac{\frac{1}{S} \int_S E^2 dS}{2\eta^2 P} = \frac{1}{2\eta^2 v_{\text{гp}} \frac{1}{2\eta c D} \int_V |\bar{E}|^2 dV}. \quad (14)$$

где η — волновое сопротивление;

D — длина системы.

Здесь учтено, что [5]

$$W_n = \frac{1}{2\eta c} \frac{1}{T} \int_0^T \int_V |\bar{E}|^2 dV dt,$$

где W_n — полная энергия в системе;

$P = v_{\text{гp}} W_p$; $W_p = \frac{W_n}{D}$ — энергия, запасенная на единицу длины системы.

Подставляя (13) в (14) и производя несложные преобразования, получаем

$$R_{\text{св}} = 2\eta \left(\frac{c}{v_{\text{гp}}} \right) \left(\frac{v_{\text{ф}}}{c} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{\Delta \varepsilon} \frac{d\omega}{d\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{1}{S} \int_S \Delta \omega dS, \quad (15)$$

$\frac{1}{S} \int_S \Delta \omega dS$ — функция, нормированная по площади поперечного сечения пространства взаимодействия.

Таким образом, для определения величины сопротивления связи, как и в предыдущем случае, необходимо наличие дисперсионной характеристики, по которой определяется v_{ϕ} и v_{gr} . Величина, пропорциональная E^2/W (1), по данному методу

определяется членом $\int_s \frac{\Delta w dS}{dw/de}$, характеризующим изменение сигнала на выходе системы при перемещении малого возмущающего тела; $\int_s \Delta w dS$ —

площадь фигуры, ограниченная огибающей сигнала при расстройке равной уровню $0,5P_{max}$; dw/de — крутизна резонансной характеристики на линейном участке. Следовательно, в данном случае измерение малых сдвигов частоты, необходимое для опре-

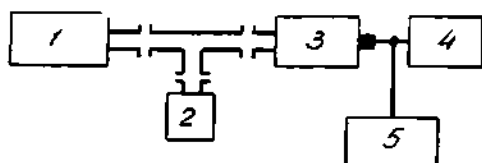


Рис. 1. Блок-схема измерений:

1 — генератор; 2 — волномер; 3 — исследуемая заедляющая система; 4 — индикатор резонанса; 5 — самописец.

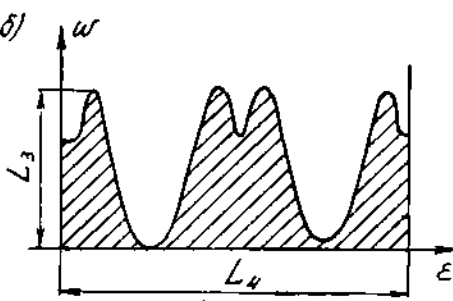
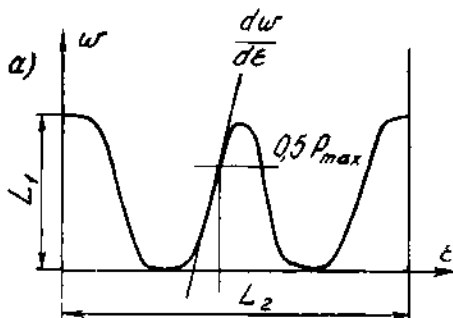


Рис. 2. Распределение поля вдоль заедляющей системы:

а) при расстройке в резонанс; б) при расстройке, соответствующей $0,75 E_{res}$.

деления E^2/W по соотношению (7), заменяется измерением амплитудной характеристики заедляющей системы.

Для того, чтобы определить величину сопротивления связи по предлагаемому методу, необходимо произвести следующие измерения:

1. Установить частоту, соответствующую настройке системы в резонанс. Перемещая возмущающее тело, записать распределение продольной составляющей электрического поля на ленту самописца (рис. 1). По полученной кривой определить крутизну частотной характеристики, т. е. $\frac{dw}{de}$ (рис. 2, а). Произвести нормировку приращения энергии w и относительной расстройки e на единицу длины записи, т. е. $\frac{d(w/L_1)}{d(e/L_2)}$, где L_1 — максимальная величина записи изменения сигнала, а L_2 — полная длина ленты самописца, соответствующая относительной расстройке.

2. Установить частоту возбуждения, при которой уровень сигнала равен $0,75$ от максимального, и записать распределение амплитуды сигнала вдоль оси системы на самописец. Произвести численное интегрирование площади фигуры, ограниченной кривой (рис. 2, б).

После проведенных выше преобразований и измерений получаем окончательное выражение для расчета сопротивления связи:

$$R_{св} = 2\pi \left(\frac{c}{v_{гp}}\right) \left(\frac{v_{\phi}}{c}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3 \frac{D}{\delta z} \frac{\left[\frac{\int \Delta w dS}{S_{ан}} \right]}{\frac{d(w/L_1)}{d(\epsilon/L_2)} \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_0} - 1\right)}. \quad (16)$$

Предложенным способом была измерена величина сопротивления связи ряда замедляющих систем на диафрагмированных волноводах. На рис. 3 приведены экспериментальные (кривые 1 и 2) и теоретические (кривая 3) зависимости изменения $R_{св}$ от длины волны. Кривые 1 со-

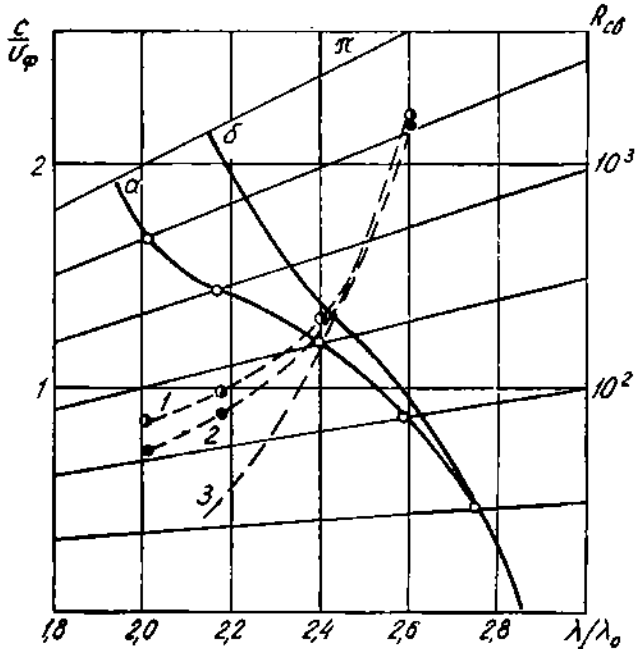


Рис. 3. Дисперсионные кривые и величины сопротивления связи для крестообразного диафрагмированного волновода:
а — экспериментальная; б — теоретическая.

ответствуют величинам $R_{св}$, определенным по методу [2], а кривые 2 — предлагаемым методом. Как видно из рисунков, теоретические и экспериментальные данные достаточно хорошо совпадают при малых сдвигах фазы на период.

$R_{св}$, измеренное по методу [2], отличается от расчетного на 19—23%, что находится в пределах погрешности этого метода. $R_{св}$, измеренное по предлагаемому методу, отличается от теоретических данных на 10—12%. С ростом величины сдвига фазы на период расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами увеличивается. Это объясняется неточностью теоретического расчета, при котором учитывалась только одна нулевая пространственная гармоника.

В результате экспериментального исследования и анализа погрешностей методов установлено, что предлагаемый метод обеспечивает большую точность измерений (погрешность не превышает 12%). Кроме того, существенным преимуществом метода является его использование для измерения малых величин сопротивления связи замедляющих систем, где метод [2] дает большие ошибки и практически не применим.

ВОЛНОВОДНЫЙ ПОРШЕНЬ С ПРУЖИНАМИ, ОБРЕЗАННЫМИ ВДОЛЬ ЛИНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ

А. П. Дорохов

ВВЕДЕНИЕ

В технике сантиметровых волн широко применяются волноводные настроенные поршни приведенной на рис. 1, *а* конструкции.

С целью повышения надежности электрического контакта механический контакт этих поршней с волноводом осуществляется в поперечном сечении волновода, проходящем через узел продольных поверхност-

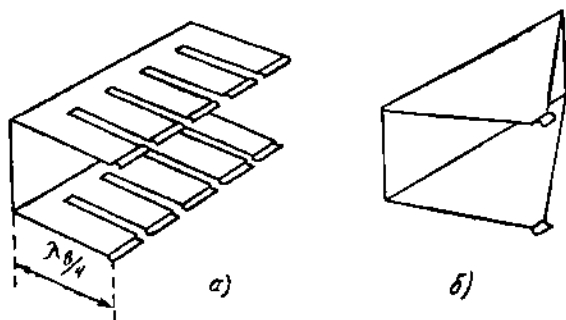


Рис. 1.

ных токов (линия *ЛК* на рис. 2). При этом продольные токи не пересекают линии ненадежного механического контакта пружины со стенками волновода. Благодаря этому должны снижаться требования к качеству этого контакта.

При разработке поршней указанной конструкции не было учтено действие поперечных поверхностных токов волновода, плотность которых близка к плотности продольных токов. На внутренней поверхности контактной пружины поршня (рис. 1, *а*) устанавливается такое же распределение поверхностных токов, как и в короткозамкнутом волноводе на участке $\lambda/4$ от его торца (рис. 2). Как видно из рис. 1, *а* и рис. 2, на линии контакта *ЛК* находится пучность поперечных токов. Так как вдоль этой линии токи несколько раз переходят из лепестков пружины на стенки волновода, качество переходных контактов в этом месте имеет существенное значение.

Встречаясь со щелями между лепестками и между крайними лепестками и боковой стенкой волновода, поперечные токи возбуждают электромагнитное поле между контактной пружиной и стенками волновода. Это

поле просачивается за поршень. Оно может служить источником помех в высокочувствительных приемных устройствах.

Частотные свойства поршня неудовлетворительны. Если длина волны в волноводе изменится, то узел тока переместится относительно линии механического контакта вперед или назад. При этом вдоль всей линии контакта появятся токи, имеющие продольную составляющую, и надежность контакта еще больше ухудшится.

Поршень чувствителен к вибрациям. При вибрациях лепестки отходят от поверхности волновода и поперечные токи переходят от лепестка к лепестку не через контакт с волноводом, а огибая разрез и при посредстве токов смещения. В результате этого изменяется реактивность поршня и нарушается согласование настраиваемого элемента.

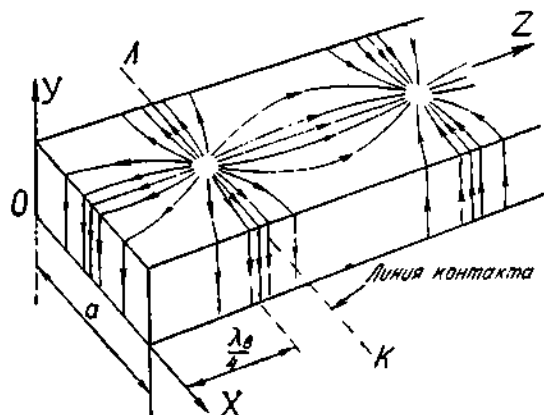


Рис. 2.

В производстве такой поршень капризен. Для обеспечения надежного контакта по всей линии $ЛК$ необходимо добиваться одинакового отжатия всех лепестков поршня, хорошего прилегания к волноводу каждого лепестка по всей его ширине.

Указанных недостатков можно избежать, применив поршень, обрез контактной пружины которого выполнен вдоль линии поверхностных токов (рис. 1, б). Как видно из рис. 2, такой обрез можно сделать или вдоль прямой $ЛК$, или вдоль линий тока, идущих с узла токов к торцевым граням волновода в точки $x = 0$ и $x = a$.

В первом варианте поршень целесообразно выполнить в форме сплошного четвертьволнового короткозамкнутого отрезка волновода, внешние размеры которого близки к внутренним размерам настраиваемого волновода.

Для исследований был выбран поршень второго варианта (рис. 1, б) из-за следующих его преимуществ по сравнению с первым: большей технологичности и простоты, меньшей просачивающейся за поршень мощности (поскольку передний срез этого поршня находится в области минимальных поверхностных токов и не максимального электрического поля, лучших частотных свойств (в первом варианте из-за уменьшения внутренних размеров поршня по сравнению с размерами волновода частотное изменение длины волны в поршне будет большим).

Расчет формы переднего среза поршня

Найдем уравнение линий поверхностных токов на стенках волновода для случая возбуждения в прямоугольном волноводе колебаний основного типа H_{10} .

Согласно [1], составляющие магнитного поля падающей волны этого типа выражаются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} H'_x &= j\alpha \frac{a}{\pi} A_{10} \sin \pi \frac{x}{a} e^{-j\alpha z} = M e^{-j\alpha z} \\ H'_z &= A_{10} \cos \pi \frac{x}{a} e^{-j\alpha z} = N e^{-j\alpha z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь A_{10} — множитель, зависящий от амплитуды возбуждающего поля;

a — размер широкой стенки волновода;

α — постоянная распространения;

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_b}; \quad \lambda_b = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}; \quad (2)$$

λ_b, λ — длины волн соответственно в волноводе и в неограниченной среде.

Поле стоячей волны получим, сложив поля падающей (H'_x, H'_z) и отраженной (H''_x, H''_z) волн:

$$H_x = H'_x + H''_x; \quad H_z = H'_z + H''_z \quad (3)$$

Здесь

$$H''_x = M e^{j\alpha z}, \quad H''_z = -N e^{j\alpha z} \quad (4)$$

Поверхностные токи перпендикулярны силовым линиям магнитного поля. Траектории токов можно построить, найдя уравнения кривых, ортогональных этим силовым линиям:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{H_z}{H_x} \quad (5)$$

Сделав подстановку (4), (1), (3) в (5) и проведя очевидные преобразования, получим

$$\frac{aa}{\pi} \frac{\sin \pi \frac{x}{a}}{\cos \pi \frac{x}{a}} dx = \frac{\sin \alpha z}{\cos \alpha z} dz \quad (6)$$

После интегрирования и подстановки значений α имеем в интервале

$$\begin{aligned} 0 < z < \frac{\lambda_b}{4} \quad \text{и} \quad 0 < x < \frac{a}{2}: \\ z &= \frac{\lambda_b}{2\pi} \arccos \left\{ \cos \left[C \cos \left(\frac{2a}{\lambda_b} \right)^2 \pi \frac{x}{a} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем линию тока, проходящего через начало координатной системы (рис. 2). Постоянную C определим из начальных условий: при $z = 0$ для данной линии тока $x = 0$; следовательно, из (7) получаем $C = 1$.

Пронормируем относительно a уравнение (7) и подставим в него значения λ_0 и $C = 1$:

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{\pi \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1}} \operatorname{arc} \left\{ \cos \left[\cos \left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1 \right] \frac{x}{a} \right\}. \quad (8)$$

Результаты расчета по уравнению (8) для соотношений между длиной волны и размером широкой стенки волновода $\frac{\lambda}{a}$, равном 1,22, 1,3, 1,39, 1,48, 1,51 (что соответствует длинам волн $\lambda = 28, 30, 32, 34, 36$ мм в волноводе сечением 10×23 мм²), приведены в табл. 1 и на рис. 3.

Таблица 1

Значения $\frac{z}{a}$ в функции от $\frac{x}{a}$ и $\frac{\lambda}{a}$

$\frac{x}{a} \backslash \frac{\lambda}{a}$	1,22	1,30	1,39	1,48	1,51
0,10	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,15	0,148	0,150	0,151	0,151	0,152
0,20	0,195	0,189	0,200	0,202	0,203
0,25	0,240	0,245	0,249	0,253	0,255
0,30	0,282	0,291	0,298	0,305	0,310
0,35	0,310	0,325	0,337	0,347	0,352
0,40	0,350	0,374	0,395	0,413	0,430
0,45	0,373	0,408	0,442	0,473	0,503
0,50	0,383	0,430	0,485	0,550	0,630

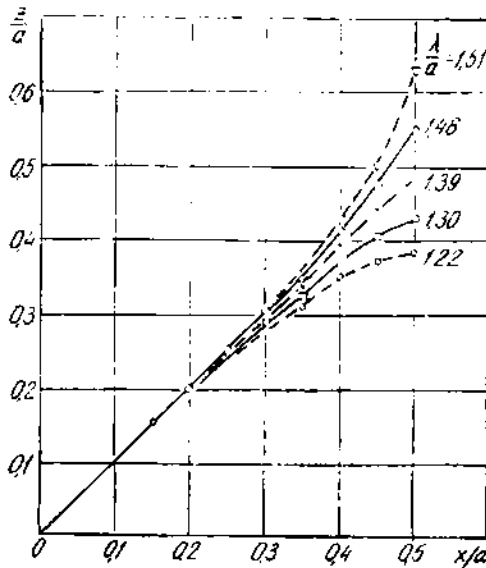


Рис. 3

В широком диапазоне волн токи протекают по близким траекториям (рис. 3) до расстояния $0,4 a$ от узкой стенки волновода. По мере приближения к середине волновода траектории расходятся, однако плотность тока в этом месте быстро снижается. Например, при $x = 0,4 a$ она составляет 0,31 плотности тока у боковых стенок.

Поэтому целесообразно контактные пружины поршня вырезать по траекториям токов средней волны рабочего диапазона. Изгиб пружин должен быть таким, чтобы механический контакт осуществлялся в узле поперечных и продольных токов волновода.

С учетом этих соображений были изготовлены и исследованы поршни, развертки пружин которых показаны на рис. 4, I и 4, II.

Экспериментальное исследование поршней

1. Проверка уровня просачивающейся мощности. Опыт производился при помощи установки, собранной по блок-схеме рис. 5.

Волновод, соединяющий генератор 1 и приемную детекторную секцию 7, перекрывался поршнем 5. Чтобы избежать резонансов в отрезке волновода между поршнем и детекторной секцией 7, сюда вводился аттенюатор 6 с затуханием около 25 дБ. Аттенюатор 2 служил для относительного отсчета уровня просачивающейся мощности. При помощи трансформатора сопротивлений 4 замкнутый поршнем участок волновода согласовывался с питающим волноводом. Согласование контролировалось по максимуму сигнала в детекторной секции и коэффициенту бегущей волны в питающем волноводом. При настройке удавалось получить к. б. в пределах 0,5 ÷ 0,625.

Уровень просачивающейся за поршни II, III и IV мощности оказался в сравнении с поршнем I соответственно равным — 1,5 дБ, 14 дБ и 8 дБ.

2. Проверка частотных свойств поршня. В общем случае устройство, в состав которого входит поршень, является более широкополосным, если реактивность поршня слабее изменяется с изменением длины волны. Изменение реактивности, вносимой поршнем, определялось по смещению первого от поршня узла напряженности электрического поля Δz_{\min} с изменением длины волны (рис. 6). За начальное принималось положение узла при $\lambda = 33$ мм.

Более резкое изменение реактивности поршня III можно объяснить увеличивающимся с удлинением волны искривлением путей поверхностных токов, огибающих разрезы многолепестковой пружины.

При поршне II наблюдалось примерно такое же смещение узла напряженности электрического поля, как и при поршне I, а при поршне IV, как при поршне III, что свидетельствует о слабом влиянии боковых лепестков пружин на распределение поверхностных токов.

3. Проверка виброустойчивости поршней. Виброустойчивость проверялась по смещению первого узла напряженности электрического поля $\Delta z'_{\min}$ при нарушении механического контакта между пружинами поршня и стенками волновода (табл. 2). Чем меньше это смещение, тем менее чувствителен поршень к вибрациям. Разрыв контакта производился путем ввода полоски писчей бумаги между контактной пружиной и стенками волновода при фиксированном положении поршня.

Таблица 2.

Частота, Мгц	8250	8000	7750
	Смещение первого узла напряженности электрического поля $\Delta z'_{\min}$, мм	При поршне I 0,6	0,7
	При поршне III 0,7	1,0	1,3

Как видно из табл. 2, нарушение контакта приводило к большим смещениям $\Delta z'_{\min}$ в случае поршня с прямоугольными контактными лепестками. Разброс этих данных также больше в случае поршня III, что свидетельствует о меньшей его надежности.

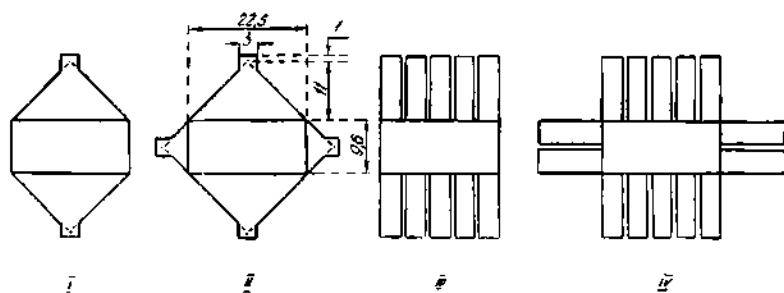


Рис. 4.

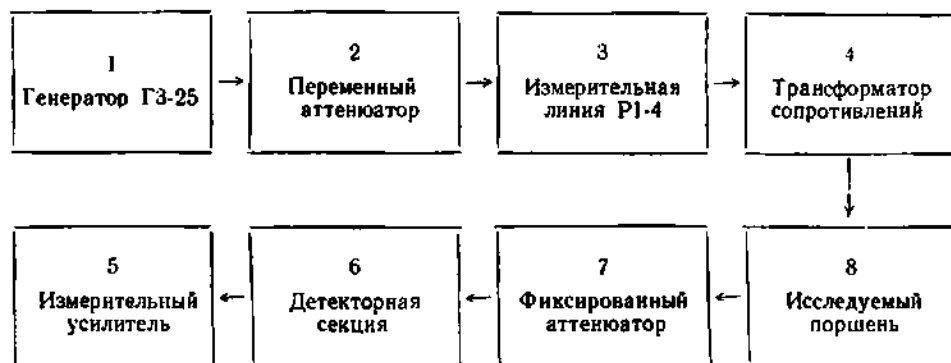


Рис. 5.

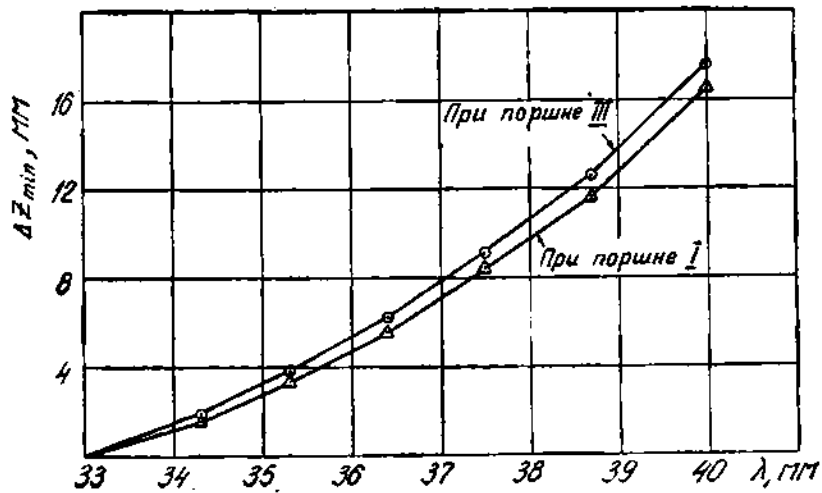


Рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из данных опыта следует, что поршню с контактной пружиной предлагаемой формы (рис. 4, I) присущи следующие преимущества по сравнению с поршнем, получившим в настоящее время наиболее широкое распространение (рис. 4, III):

- 1) меньший уровень просачивающейся за поршень мощности;
- 2) лучшие частотные свойства;
- 3) лучшая виброустойчивость и надежность электрического контакта при более простом раскрое контактной пружины.

Из результатов опыта также следует, что введение в поршень I боковых контактных лепестков не изменяет существенно его свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. Электромагнитные поля и волны
Изд-во «Сов. радио», 1956.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. В. Щербак. Дифракция электромагнитных волн на ленточной волноводной диафрагме с многослойным магнетодиэлектриком	3
В. В. Щербак. Дифракция электромагнитных волн на двойной равнощелевой диафрагме с многослойным магнетодиэлектриком	18
Ю. В. Шубарин, Л. П. Яцук. Параметры нерезонансных щелей в прямоугольном волноводе	30
Ю. В. Шубарин, Н. Н. Горобец. Поляризационная структура поля некоторых типов облучателей	37
А. Ф. Зоркин, А. И. Терещенко. Параметры кольцевых резонаторов на H - и крестообразных волноводах, изогнутых в плоскости E	48
Н. В. Ляпунов, Ю. М. Бородавко, А. Е. Зайцев, А. Г. Шейн. Индуктивный штырь в H - и P -волноводе	55
Н. В. Ляпунов, Б. Ф. Заяц. Сочленение H - и прямоугольного волнопроводов	64
С. С. Третьякова. К теории возбуждения кольцевых волнопроводов с диэлектрической средой	71
В. А. Барегамян. Распространение электромагнитных волн в кольцевом волноводе с анизотропной средой	82
С. А. Масалов. Расчет постоянных распространения H_{01} -волны в кольцевом волноводе с конечной толщиной колец	88
А. И. Терещенко, В. М. Бондаренко. Влияние кривизны граничной поверхности на структуру электромагнитного поля	93
И. П. Якименко. Флуктуационное излучение ферритового цилиндра	100
И. П. Якименко, Л. А. Назаренко, А. А. Шадрин. Электромагнитные флуктуации в спиральном волноводе с гиротропной средой	109
В. Г. Орлов, В. Д. Кукуш. Пондеромоторное действие электромагнитных волн на волноводные резонаторы	117
В. Г. Орлов, В. Д. Кукуш. О пондеромоторных силах, действующих на стенки прямоугольного волновода при несогласованной нагрузке	128
А. Г. Руткас. Многополюсники как открытые системы	133
В. А. Дикарев. Некоторые самосопряженные задачи для оператора Максвелла	147
К. П. Яцук. О погрешностях измерения диэлектрических проницаемостей вещества методом спирального волновода	155
Ю. А. Дейнека. Сопротивление связи изогнутого волновода, нагруженного гребенчатой замедляющей структурой	161
Д. Д. Литвинов. О погрешностях измерения коэффициента стоячей волны	168
В. Г. Шульга, А. Г. Шейн. Об измерении сопротивления связи замедляющих систем	176
А. П. Дорохов. Волноводный поршень с пружинами, обрзанными вдоль линий поверхностных токов	181

Редактор *З. Г. Савиных*

Техредактор *Г. П. Александрова*

Корректор *Е. Т. Поступай*

Сдано в набор 1.XII 1965 г. Подписано к печати 29.VIII 1966 г. БЦ 34912. Формат 70×108¹/₁₆. Объем 11,75 физ. печ. л., 16,4 усл. печ. л., 12,7 уч.-изд. л. Зак. 5-683. КРИ — вып. 10 (135) 65 г. л. 6. БЗ № 11 (423) 65 г. п. 18. Тираж 1200. Цена 85 коп.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управления по печати. Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 3900.