

# РАДИОТЕХНИКА

ВЫПУСК I

БИБЛИОТЕКА  
ХИГ МАВТ'а  
Инв. № 369528

КС

83



2711

S2

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО  
Харьков 1965

Настоящий выпуск сборника «Радиотехника» содержит результаты теоретических и экспериментальных работ, выполненных в вузах и научно-исследовательских институтах УССР, по исследованию распространения и дифракции электромагнитных волн.

Материалы выпуска предназначены для широкого круга специалистов по радиофизике и электронике, занимающихся решением современных граничных электродинамических задач, связанных с генерацией, излучением, передачей и дифракцией электромагнитных волн. Опубликованные работы могут быть полезны для аспирантов и студентов старших курсов радиофизических и радиотехнических факультетов вузов.

Сборник издается Харьковским институтом горного машиностроения, автоматики и вычислительной техники Министерства высшего и среднего специального образования УССР.

Редакционная коллегия:

Проф. В. П. Шестопалов (отв. редактор), доц. В. Д. Кукуш (зам. отв. редактора), старший преп. Г. И. Сидоров (отв. секретарь), проф. Б. Л. Кащеев, доц. И. П. Якименко, канд. техн. наук В. В. Толстов, доц. Е. Г. Пришкин, доц. А. И. Игравков, доц. Н. А. Хижняк, инж. Г. Н. Винников, старший преп. А. В. Провапов, доц. К. Б. Круковский, доц. В. С. Кириченко.

Адрес редакционной коллегии: г. Харьков, пр. Ленина 14, Институт горного машиностроения, автоматики и вычислительной техники.

8—4—1  
46—65

Редактор *И. Л. Базиланская*  
Техредактор *Л. Т. Момот*  
Корректор *Т. С. Перепелица*

---

Сдано в набор 13/V 1965 г. Подписано в печать 2/X 1965 г. БЦ 35239. Формат 70×108<sup>1/4</sup>. Объем: 11,75 физ. печ. л. 15,0 усл. печ. л. 11,7 уч.-изд. л. Зак. 5-275. Цена 82 коп. Тираж 3300. КРИ вып. 17(123). 1964 г. п. 9 БЗ—17, п. 30.

---

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе в типографии № 16  
Областного управления по печати. Харьков-3, Университетская ул., 16.

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО ВОЛНОВОДА ДИПОЛЕМ

В. А. Марченко, В. Г. Сологуб

1. Бесконечная периодическая последовательность одинаковых металлических колец, стенки которых предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими, образует кольцевой волновод (рис. 1).

Рассмотрим задачу о возбуждении такого волновода электрическим или магнитным диполем, расположенным на оси волновода. Моменты диполей считаем направленными по оси волновода и по величине равными единице.

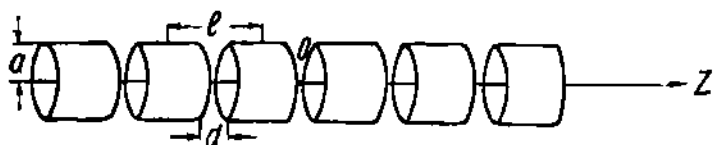


Рис. 1.

Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  так, чтобы диполь попал в начало координат и ось  $Oz$  совпала с общей осью всех колец, образующих волновод.

Разберем подробно случай электрического диполя, а затем кратко остановимся на магнитном диполе.

Как известно, электрический диполь в свободном пространстве возбуждает поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  со следующими комплексными амплитудами (временной множитель  $e^{i\omega t}$  для краткости всюду опускаем):

$$E_r^0 = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \Pi_0, \quad E_\varphi^0 = 0, \quad E_z = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_0; \quad (1)$$

$$H_r^0 = 0, \quad H_\varphi^0 = ik \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_0, \quad H_z^0 = 0,$$

где функция

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

$z$  — составляющая электрического вектора Герца, две другие составляющие которого равны нулю.

Будем искать поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , возбуждаемое диполем в присутствии кольцевого волновода, тоже с помощью электрического вектора Герца с единственной отличной от нуля составляющей по оси  $Oz$ , которую представим в таком виде:

$$\Pi(\rho, z) = \Pi_0(\rho, z) - \Pi_1(\rho, z). \quad (2)$$

Функцию  $\Pi_0(\rho, z)$  можно разложить в интеграл Фурье

$$\Pi_0(\rho, z) = \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (3)$$

где  $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$  определен в плоскости  $\lambda$ , разрезанной вдоль прямых, идущих из  $k$  вертикально вверх, а из  $-k$  вертикально вниз, следующим условием: при  $|\lambda| \rightarrow \infty$   $\text{Im} \sqrt{k^2 - \lambda^2} > 0$ .

Функцию  $\Pi_1(\rho, z)$  удобно искать в таком виде:

$$\Pi_1(\rho, z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \lambda^2) H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda^2}) u(\lambda; \rho, z) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (4)$$

где функция  $u(\lambda; \rho, z)$  периодична по  $z$  с периодом  $l$ , равным периоду волновода.

Чтобы поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , построенное из функции  $\Pi(\rho, z)$  по формулам (1), удовлетворяло уравнениям Максвелла и имело нужную особенность в начале координат (в диполе), нужно, чтобы функция  $\Pi_1(\rho, z)$  всюду, кроме металлических колец волновода, удовлетворяла уравнению Гельмгольца  $\Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0$ . Отсюда следует, что при любом  $\lambda$  этому уравнению должна удовлетворять функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$ .

Для удовлетворения граничных условий на металлических кольцах нужно, чтобы на них  $E_z = 0$  ( $E_r$  равно нулю тождественно в силу (1)), что приводит к такому краевому условию для функции  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$ :

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z) = e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}). \quad (5)$$

Разлагая периодическую по  $z$  функцию  $u(\lambda, \rho, z)$  в ряд Фурье и учитывая при этом, что функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, а искомое поле не должно содержать волн, распространяющихся из бесконечности ( $\rho = \infty$ ) к волноводу, получим

$$e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z) = \begin{cases} e^{i\lambda z} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n J_0(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z} & \rho < a, \\ e^{i\lambda z} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_n H_0^{(1)'}(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z} & \rho > a, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\rho_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}; \quad h_n = \lambda + \frac{2\pi}{l} n \quad (6')$$

и корень выбирается таким образом, что  $\text{Im} \rho_n > 0$ , а при  $\text{Im} \rho_n = 0$  —  $-\text{Re} \rho_n > 0$ .

Так как функция  $\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  должна оставаться непрерывной при  $\rho = a \pm 0$  (на кольцах в силу (5), в щелях между ними — в силу того, что функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  удовлетворяет там уравнению Гельмгольца), то

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{J_0(\rho_n a)}{H_0^{(1)'}(\rho_n a)}. \quad (7)$$

Используя граничное условие (5), соотношение (7), непрерывность  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$  и  $\frac{\partial}{\partial \rho} e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$  в щелях, а также тождество

$$J_0'(x) H_0^{(1)'}(x) - J_0(x) H_0^{(1)''}(x) = \frac{2}{\pi i x},$$

придем к следующим уравнениям:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{e^{ihn^2}}{H_0^{(1)}(\rho_n a)} = 0 \quad (\text{в щелях}), \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a) e^{ihn^2} = e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}),$$

из которых нужно определить коэффициенты  $\alpha_n = \alpha_n(\lambda)$ .

2. Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= ka; \quad \Delta = \frac{l}{2\pi a}; \quad \frac{\lambda l}{2\pi} = m_0 + \mu; \quad h_n = \frac{2\pi}{l}(m_0 + n + \mu); \\ \varphi &= \frac{2\pi}{l} z; \quad x_{m_0+n} = \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $m_0$  — ближайшее к  $\frac{\lambda l}{2\pi}$  целое число, так что  $-\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{1}{2}$ .

В этих обозначениях (принимая без потери общности, что начало координат лежит в середине одной из щелей) система (8) принимает такой вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{i(n+\mu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) e^{i(n+\mu)\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i(n+\mu)\varphi} = e^{i(m_0+\mu)\varphi}, \quad \frac{\pi d}{l} < |\varphi| \leq \pi, \quad (10')$$

где величины  $\varepsilon_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) определяются равенствами

$$\frac{1}{\rho_n^2 J_0(\rho_n a) H_0^{(1)}(\rho_n a)} = \frac{\pi a^2 \Delta}{i(m_0 + n + \mu)} \frac{|m_0 + n|}{m_0 + n} (1 - \varepsilon_{m_0+n})$$

и по определению  $\frac{|0|}{0} = 1$ .

Существенно при этом, что  $\varepsilon_n = O(n^{-2})$  при  $|n| \rightarrow \infty$ . Точнее говоря, при  $|n + \mu| > x\Delta$  имеет место неравенство

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{\Delta^2(x^2 + c)}{2(n + \mu)^2} \left(1 - \frac{x^2 \Delta^2}{(n + \mu)^2}\right)^{-1/2}, \quad (11)$$

в котором  $c$  — абсолютная постоянная, следующее из асимптотических формул для функций Бесселя.

Уравнение (10) можно заменить двумя эквивалентными ему уравнениями, одно из которых получается из него дифференцированием, а другое — подстановкой  $\varphi = 0$ . Проведя такую замену и деля затем все равенства на  $e^{i\mu\varphi}$ , получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n - \delta_n^{m_0}) e^{in\varphi} = 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\varphi| \leq \pi;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n - \delta_n^{m_0}) \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = -\frac{|m_0|}{m_0} e^{im_0\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (12)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{n + \mu} \frac{|n|}{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{n + \mu} \frac{|n|}{n} \varepsilon_n,$$

где  $\delta_n^{m_0}$  — символ Кронекера,  $\delta_n^m = 0$  ( $m \neq n$ ) и  $\delta_n^n = 1$ .

Согласно результатам работы [1], два первых уравнения системы эквивалентны такой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_m - \delta_m^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0} V_m^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_m^n(u) + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u), \quad (13)$$

где  $m$  принимает все целочисленные значения от  $-\infty$  до  $\infty$  (кроме  $m = -1$ , при котором соответствующее уравнение превращается в тождество) и коэффициенты выражаются через полиномы Лежандра  $P_k(u)$  от  $u = \cos \frac{\pi d}{l}$  по формуле

$$V_m^n(u) = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)]. \quad (14)$$

Выразим теперь  $x_m$  через правые части равенств (13) и полученные значения подставим в левую часть последнего из уравнений (12). В результате получим

$$-\frac{|m_0|}{m_0} V_\mu^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_\mu^n(u) + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) R_\mu(u) = 0, \quad (15)$$

где для краткости приняты такие обозначения:

$$V_\mu^n(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n(u) - \delta_m^{n_0} \frac{|n|}{n}}{m + \mu} \frac{|m|}{m}; \quad R_\mu(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{P_m(u) \frac{|m|}{m}}{m + \mu} \frac{|m|}{m}.$$

Величины  $V_\mu^n$  и  $R_\mu$  выражаются через функции Лежандра следующим образом:

$$V_\mu^n(u) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi} \left\{ P_{\mu-1}(-u) V_0^n(u) - \frac{1}{2} \mu [P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u) V^n(u)] \right\}, \quad (16)$$

где  $V_0^n(u)$  определена формулой (14), а

$$V^n(u) = \frac{1}{n + \mu} \left\{ P_n(u) - \frac{P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)] \right\}$$

и  $P_s(x)$  — функции Лежандра.

Подставляя правые части формул (16) в уравнение (15) и используя при этом уравнение (13) с  $m = 0$ , будем иметь

$$\frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} (x_0 - \delta_0^{m_0}) - \mu \left[ -\frac{|m_0|}{m_0} V_\mu^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_\mu^n(u) \right] = 0. \quad (17)$$

Это уравнение совместно с уравнениями (13) эквивалентно исходной системе.

3. Переходя к приближенному решению полученной системы, заметим прежде всего, что когда  $\mu$  пробегает весь интервал  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , некоторые  $\varepsilon_n$  обращаются в бесконечность. Это происходит тогда, когда  $p_{n-m_0} a$  оказывается равным нулю или какому-нибудь корню функции Бесселя  $J_0(x)$ . Частично можно избавиться от этого усложнения следующим обра-

зом: разобьем интервал  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  на части так, чтобы на каждой из них в бесконечность могло обратиться только одно  $\epsilon_n$ . Рассматривая каждый из этих интервалов отдельно, можем во всех уравнениях (13) исключить член, содержащий соответствующее  $\epsilon_n$ , с помощью уравнения (17). После этого будет уже сравнительно просто получить приближенное решение и оценить его погрешность.

Проведем все необходимые выкладки в случае, когда  $2\kappa\Delta < 1$ . В общем случае изменения несущественны.

Итак, пусть

$$2\kappa\Delta < 1.$$

Из формулы (6') видно, что тогда  $\rho_{n-m}a$  при всех  $n \neq 0$  принимает чисто мнимые значения, если  $|\mu| \leq \frac{1}{2}$ . Следовательно, в рассматриваемом случае нужно исключить из уравнений члены, содержащие  $\epsilon_0$ . Из формулы (16') следует, что  $V^0 = \frac{1}{\mu}$ . Поэтому, умножая равенство (17) на  $V_m^0(u)$  и складывая его затем с уравнением (13), получим

$$\begin{aligned} x_m - \delta_m^{m_0} = & -\frac{|m_0|}{m_0} [V_m^{m_0}(u) - \mu V^{m_0}(u)V_m^0(u)] + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n [V_m^n(u) - \\ & - \mu V^n(u)V_m^0(u)] + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u) + \\ & + \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u) + P_\mu(-u)} V_m^0(u) (x_0 - \delta_0^{m_0}). \end{aligned} \quad (18)$$

Решим полученную систему уравнений (18) относительно  $x_m$ , считая  $x_0$  известным. С этой целью вычтем из каждого уравнения системы с  $m \neq 0$  уравнение с  $m = 0$ , умножив его предварительно на  $P_m(u)$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} x_m - \delta_m^{m_0} = & -\frac{|m_0|}{m_0} W_m^{m_0}(u) + (x_0 - \delta_0^{m_0}) \left\{ \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u) + P_\mu(-u)} [V_m^0(u) - \right. \\ & \left. - V_0^0(u)P_m(u)] + P_m(u) \right\} + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n W_m^n(u), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} W_m^n(u) = V_m^n(u) = & \mu V^n(u)V_m^1(u) - V_0^n(u)P_m(u) + \mu V^n(u)V_0^0(u)P_m(u) = \\ = & V_{m-1}^{n-1}(u) - \mu V^n(u)V_{m-1}^{-1}(u). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если в равенстве (19) взять  $m = -1$ , то получим уравнение (18) при  $m = 0$ .

Таким образом, система уравнений (19,17), в которых  $m$  принимает все целочисленные значения, эквивалентна системе (18,17).

Положим

$$q = \max_m \sum_{n=0}^{\infty} |\epsilon_n W_m^n(u)|.$$

Используя оценку (11) и оценку для функций Лежандра, можно показать, что

$$q < C_1 \frac{\Delta^2 \sqrt{1-u}(x^2+1)}{(1-4\kappa^2\Delta^2)^{3/2}},$$

где  $C_1$  — некоторая константа, не зависящая от параметров задачи.

Величина  $q$  будет малой, когда мало  $\Delta$  (кольца располагаются достаточно густо), либо когда  $u$  близко к единице (щели между кольцами достаточно узки).

Будем считать, что  $q < 1$ . В этом случае приближенное решение с оценкой погрешности можно получить методом последовательных приближений.

Ограничиваясь первым приближением, получим ( $m \neq 0$ )

$$x_m = (x_0 - \delta_0^{m_0}) [(m + \mu) V^m(u) + \theta_m(u)] + \delta_m^{m_0} - \frac{|m_0|}{m_0} W_{m_0}^{m_0}(u) + \theta_{m_0}^{m_0}(u),$$

где

$$|\theta_m(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} |(m + \mu) V^m(u)| < 3 \sqrt{2\pi} \sqrt{1+u} \frac{q}{1-q},$$

$$|\theta_{m_0}^{m_0}(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} \left| \delta_m^{m_0} - \frac{|m_0|}{m_0} W_{m_0}^{m_0}(u) \right| < C_2 [1 + \ln(|m_0| + 1)] \frac{q}{1-q},$$

причем  $\theta_m(u)$  не зависит от  $m_0$ , а  $\theta_{m_0}^{m_0}(u) \equiv 0$ , так же, как и  $W_{m_0}^{m_0}(u) \equiv 0$ .

Подставляя найденные значения  $x_m$  в уравнение (17) и решая его затем относительно  $x_0 - \delta_0^{m_0}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} & x_0 - \delta_0^{m_0} = \\ & \frac{(1 - \varepsilon_{m_0}) \frac{|m_0|}{m_0} V^{m_0}(u) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V^n(u) \left[ \theta_n^{m_0}(u) - \frac{|m_0|}{m_0} W_n^{m_0}(u) \right]}{\frac{P_{-\mu}(-u) - P_{\mu}(-u)}{P_{-\mu}(-u) + P_{\mu}(-u)} + 1 - \varepsilon_0 - \mu \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V^n(u) [(n + \mu) V^n(u) + \theta_n(u)]}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (9) следует

$$\alpha_n = \frac{x_{m_0+n}}{\rho_n^2 J_0(\rho_n a)}.$$

Подставим определяемые этой формулой значения  $\alpha_n$  в (6). Учитывая, что при  $m \neq 0$  и  $2\kappa\Delta < 1$

$\rho_{n-m_0} a$  принимает чисто мнимые значения, причем

$$|\rho_{n-m_0} a| = \left| \sqrt{k^2 - \frac{(m+\mu)^2}{\Delta^2}} \right| > \frac{|m+\mu|}{\Delta} \sqrt{1 - 4\kappa^2 \Delta^2}$$

и, следовательно, для  $0 \leq \rho \leq a(1 - \theta)$  и  $\rho \geq a(1 + \theta)$  при  $m \neq 0$  равномерно по  $\rho$  в соответствующих областях выполняются неравенства ( $\theta > 0$ ):

$$\frac{J_0(P_{m-m_0} \rho)}{J_0(P_{m-m_0} a)} > C_3 e^{-\frac{\sqrt{1-4\kappa^2 \Delta^2}}{\Delta} \left( |m| - \frac{1}{2} \right) \rho}, \quad 0 \leq \rho \leq a(1 - \theta);$$

$$\frac{H_0^{(1)}(P_{m-m_0} \rho)}{H_0^{(1)}(P_{m-m_0} a)} < C_3 e^{-\frac{\sqrt{1-4\kappa^2 \Delta^2}}{\Delta} \left( |m| - \frac{1}{2} \right) \rho}, \quad \rho \geq a(1 + \theta),$$

получим

$$e^{\lambda z} u(\lambda; \rho, z) = \begin{cases} x_0 \frac{J_0(P_{-m_0} \rho)}{J_0(P_{-m_0} a) \rho^2} e^{i \frac{2\pi}{T} \mu z} + u_1(\lambda; \rho, z), & 0 \leq \rho \leq a(1 - \theta) \\ x_0 \frac{H_0^{(1)}(P_{-m_0} \rho)}{H_0^{(1)}(P_{-m_0} a) \rho^2} e^{i \frac{2\pi}{T} \mu z} + \tilde{u}_2(\lambda; \rho, z), & \rho \geq a(1 + \theta), \end{cases} \quad (21)$$



где для функций  $\bar{u}_1(\lambda; \rho, z)$  и  $\bar{u}_2(\lambda; \rho, z)$  справедлива оценка

$$|\bar{u}_i(\lambda; \rho, z)| < C_4 \Delta^2 \frac{\ln \left( 1 + \left| \frac{\lambda l}{2\pi} \right| \right)}{\text{sh} \frac{\sqrt{1 - 4x^2 \Delta^2}}{\Delta}}, \quad (i = 1, 2).$$

Формулы (21) дают приближенное решение задачи, точность которого тем выше, чем меньше  $\Delta$ .

4. Исследуем подробно случай густого расположения колец, т. е. случай, когда  $\frac{l}{2\pi a} \ll 1$ ;  $\frac{2\pi}{k} > 2l$ . Для этого вычислим предел, к которому

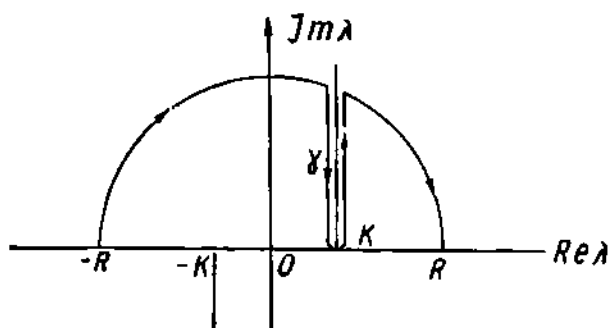


Рис. 2.

стремится функция  $\Pi_1(\rho, z)$ , когда  $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$  стремится к нулю. Из формулы (20) следует, что если  $\Delta \rightarrow 0$ , то  $x_0 = \Delta 0(1)$  при  $m_0 \neq 0$ , а при  $m_0 = 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x_0 = \frac{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1},$$

где

$$Q = \lim_{\Delta \rightarrow 0} -\Delta \ln \frac{1-u}{2} = -\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \frac{l}{\pi a} \ln \sin \frac{\pi d}{2l},$$

причем предполагается, что последний предел существует.

Отсюда и из формул (4), (21) следует, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1(\rho, z) = \begin{cases} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a) J_0(\rho_0 a) + 1} J_0(\rho_0 \rho) H_0^{(1)}(\rho_0 a) e^{i\lambda |z|} d\lambda, \rho < a; \\ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|} d\lambda, \rho > a. \end{cases} \quad (22)$$

Полученное выражение удобно записать в другом виде. Интеграл по отрезку  $(-R, R)$  можно заменить на сумму интеграла по дуге полуокружности радиуса  $R$  с петлей  $\gamma$ , охватывающей верхний разрез (рис. 2), и вычетов относительно полюсов подынтегральной функции, попадающих в соответствующую область.

При  $R \rightarrow \infty$  интеграл по полуокружности стремится к нулю, а интеграл по петле  $\gamma$  можно свести к интегралу по вертикальной прямой от  $k + i0$  до  $k + i\infty$  — от разности значений подынтегральной функции на правом и левом берегах разреза.

Заметим теперь, что на обоих берегах разреза, охватываемого петлей  $\gamma$ , все функции, кроме  $H_0^{(1)}(\rho_0 a)$  и  $H_0^{(1)}(\rho_0 \rho)$ , принимают одинаковые значения, и так как аргумент  $\rho_0 = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$  при переходе с левого берега разреза на правый увеличивается на  $\pi$ , то при таком переходе функции  $H_0^{(1)}(\rho_0 a)$  и  $H_0^{(1)}(\rho_0 \rho)$  приобретают добавку, равную  $-2J_0(\rho_0 a)$  и  $-2J_0(\rho_0 \rho)$  соответственно. Учитывая это, получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1(\rho, z) = \begin{cases} 2\pi i \sum \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho_0 \rho) \left\{ -1 + \frac{1}{[-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \times} \right. \\ \left. \times [-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(\lambda)} \right\} e^{i\lambda |z|} d\lambda; & \rho < a; \\ 2\pi i \sum' \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} \left\{ -J_0(\rho_0 \rho) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1} + 1 \right\}^{(n)} e^{i\lambda |z|} d\lambda, & \rho > a. \end{cases}$$

где  $f^{(n)}$  и  $f^{(\lambda)}$  означают соответственно значения функции  $f$  на правом и левом берегах разреза,  $f_{(n)}^{(1)} = f^{(n)} - f^{(\lambda)}$  и вычеты берутся по всем полюсам функций

$$\frac{1}{2} \frac{\pi Q \rho_0^2 a^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1} \begin{cases} J_0(\rho_0 \rho) H_0^{(1)}(\rho_0 a), & \rho < a, \\ H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) J_0(\rho_0 a), & \rho > a, \end{cases}$$

лежащим в верхней полуплоскости.

Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  корни функций

$$-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1, \quad (23)$$

лежащие в верхней полуплоскости. Учитывая вид подынтегральных функций в формуле (22), получим

$$2\pi i \sum \text{Res} = - \sum_{\nu} A_{\nu}^{-1} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu} |z|},$$

$$2\pi i \sum' \text{Res} = - \sum_{\nu} A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu} |z|},$$

причем  $A_{\nu}^{-1} J_0(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) = A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2})$ . Используя эти выражения и представление

$$\frac{e^{i\lambda \sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda |z|} d\lambda,$$

окончательно получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Pi(\rho, z) = \begin{cases} \sum_{\nu} A_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 + \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu} |z|} - \\ - i \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|} d\lambda}{[-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(1)} \times} & \rho < a; \\ \times [-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(2)} \\ \sum_{\nu} A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu} |z|} + \\ + \frac{i}{2} \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|}}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1} \Big|_{(n)}^{(n)} e^{i\lambda |z|} d\lambda & \rho > a \end{cases} \quad (24)$$

5. Перейдем к рассмотрению задачи о возбуждении кольцевого волновода магнитным диполем. Поле в этом случае будет определяться магнитным вектором Герца, имеющим только одну, отличную от нуля составляющую  $\Pi^*(\rho, z)$  — вдоль оси  $Oz$ , по формулам

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= 0; \quad E_{\varphi} = -ik \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi^*; \quad E_z = 0; \\ H_{\rho} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \Pi^*; \quad H_{\varphi} = 0; \quad H_z = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Pi^*. \end{aligned} \quad (25)$$

Функцию  $\Pi^*(\rho, z)$  удобно искать в виде

$$\begin{aligned} \Pi^*(\rho, z) &= \Pi_0(\rho, z) - \Pi_1^*(\rho, z) = \Pi_0(\rho, z) + \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \lambda^2} H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda^2}) u^*(\lambda; \rho, z) e^{i\lambda z} d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$e^{i\lambda z} u^*(\lambda; \rho, z) = \begin{cases} e^{i\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_0(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z}, & \rho < a \\ e^{i\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n H_0^{(1)}(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z}, & \rho > a. \end{cases}$$

Функция  $\Pi_1^*(\rho, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца во всем пространстве, кроме металлических колец, на которых должно выполняться граничное условие  $E_{\varphi} = 0$ . Это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n &= \frac{J_1(\rho_n a)}{H_1^{(1)}(\rho_n a)} \beta_n; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{\rho_n}{H_1^{(1)}(\rho_n a)} e^{i h_n z} &= 0 \quad (\text{в щелях}); \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \rho_n J_1(\rho_n a) e^{i h_n z} &= -e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}), \end{aligned}$$

из которых должны быть определены неизвестные коэффициенты  $\beta_n(\lambda)$ .

Исследование полученных уравнений ничем не отличается от исследования уравнений (8).

Поэтому мы приведем лишь окончательный результат сразу для предельного случая, когда  $\Delta = \frac{i}{2\pi a} \rightarrow 0$ , причем существует

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} -\Delta \ln \frac{1+u}{2} = -\lim_{\substack{i \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow i}} \frac{i}{\pi a} \ln \cos \frac{\pi a}{2i} = \frac{1}{Q^*}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi^*(\rho, z) = \begin{cases} \sum_{\nu} B_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) e^{\lambda_{\nu}^{\prime} |z|} - \\ - i \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(\rho_0 \rho) e^{\lambda |z|} d\lambda}{[-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \times} \times [-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \cdot \rho < a \\ \sum_{\nu} B_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) e^{\lambda_{\nu}^{\prime} |z|} + \\ + \frac{i}{2} \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{[-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)}} e^{\lambda |z|} d\lambda, \rho > a \end{cases} \quad (26)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots$  — корни функции

$$-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1, \quad (27)$$

лежащие в верхней полуплоскости,  $B_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$  и  $B_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$  — вычеты в этих корнях функций

$$\pi^2 i \frac{H_1^{(1)}(\rho_0 a) J_0(\rho_0 \rho)}{-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1} H_1^{(1)}(\rho_0 a) \text{ и } \pi^2 i \frac{H_1^{(1)}(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) J_1(\rho_0 a)}{-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1}$$

соответственно, причем  $B_{\nu}^{-} J_1(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) = B_{\nu}^{+} H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$ .

Замечание. Мы показали, что при  $\Delta \rightarrow 0$  существуют пределы функций  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$  и нашли эти пределы. Нетрудно убедиться, что существуют также пределы определяемых функциями  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$  полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , и эти пределы находятся по формулам (2) или (25) из соответствующих пределов для функций  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$ .

б. Полученные представления (24), (26) удобны для выяснения того, как убывают функции  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$ , а, следовательно, и соответствующие поля при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Первые слагаемые в формулах (24), (26) убывают экспоненциально, зато вторые — алгебраически. Поэтому на бесконечности ( $|z| \rightarrow \infty$ ) главную роль будут играть вторые слагаемые. Однако их роль будет заметна тем позже (т. е. начиная с больших  $|z|$ ), чем больше  $Q$  (соответственно  $Q^*$ ), так как величина интегральных членов убывает с ростом  $Q(Q^*)$ , как  $Q^{-2}(Q^{*-2})$  при  $\rho < a$  и  $Q^{-1}(Q^{*-1})$  при  $\rho > a$ .

Например, если  $ka$  лежит между первым и вторым корнями функции Бесселя  $J_0(x)$  (соответственно  $J_1(x)$ ), то корень с наименьшей мнимой частью при  $Q \rightarrow \infty$  ( $Q^* \rightarrow \infty$ ) стремится к корню  $J_0(\sqrt{k^2 - \lambda^2 a})$   $J_1(\sqrt{k^2 - \lambda^2 a})$ , который вещественен. При этом оказывается, что  $\text{Im} \lambda_1 = 0(Q^{-2})$ ,  $\text{Im} \lambda_1^* = 0(Q^{*-2})$ . Мнимые части всех других корней функций (23) и (27) стремятся к конечным пределам, отличным от нуля. Отсюда и из оценок интегральных членов следует, что при больших  $Q$  в области

$$1 \ll |z| \ll Q^2 (\ln Q |z| - k\rho) \quad (28)$$

в случае электрического диполя существенную роль будет играть только одно слагаемое, так что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi(\rho, z) \approx \begin{cases} A_1^- J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho < a \\ A_1^+ H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho > a, \end{cases} \quad (29)$$

а в случае магнитного диполя при больших  $Q^*$  в области

$$1 \ll |z| \ll Q^{*2} (\ln Q^* |z| - k\rho) \quad (28')$$

будем иметь

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi^*(\rho, z) \approx \begin{cases} B_1^- J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1'^2}) e^{\lambda_1' |z|}, & \rho < a \\ B_1^+ H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1'^2}) e^{\lambda_1' |z|}, & \rho > a, \end{cases} \quad (29')$$

причем соответствующие поля в этих областях с хорошим приближением получаются из правых частей равенств (29), (29') по формулам (2) и (25).

Заметим, однако, что приближенные формулы (29) и (29') совершенно непригодны вне указанных областей, так как вне этих областей существенную роль играет сумма других слагаемых в представлениях (24) и (26). При этом поле, соответствующее отдельным слагаемым, теряет физический смысл. Это особенно наглядно видно из того, что поле, отвечающее каждому слагаемому (члену соответствующего ряда или интегральному члену), взятому в отдельности, экспоненциально растет при  $\rho \rightarrow \infty$ , хотя суммарное поле, конечно, убывает.

Для определения скорости затухания при  $|z| \rightarrow \infty$  электрических и магнитных волн в кольцевом волноводе Н. Н. Смирнов [2] искал решения в виде (29), (29') и определял скорость затухания по мнимой части  $\lambda_1$  (соответственно  $\lambda_1'$ ).

Полученные им решения в точности совпадают с правыми частями выражений (29) и (29'). Метод Н. Н. Смирнова должен давать очень хорошие результаты при малых  $\Delta$  и больших  $Q$  ( $Q^*$ ) в областях, определяемых неравенствами (28), (28'), хотя вне этих областей принятые им приближенные выражения для поля совершенно непригодны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.

2. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1494, 1958.

## ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ СПИРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

З. С. Агранович, В. П. Шестопалов

1. Рассмотрим спиральный волновод, образованный металлической спиральной лентой с шириной зазора, равной  $d$ , периодом (шагом)  $l$ . Радиус волновода  $r = a$ ;  $\theta$  — угол намотки (рис. 1). Лента металла спирали предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей.

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , приняв ось волновода за ось  $Oz$ , и будем искать электромагнитные волны, которые могут распространяться в такой системе в направлении оси  $z$  без затухания и с затуханием.



Рис. 1.

В обоих случаях задача сводится к отысканию решений однородных уравнений Максвелла, которые внутри спирального волновода описывают бегущие волны (возможно, затухающие), а вне волновода — либо затухающие, либо расходящиеся волны.

Пусть  $\vec{E}(r, \varphi, z)$ ,  $\vec{H}(r, \varphi, z)$  — такое решение (временной множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и далее опущен). При замене в этом решении  $z$  на  $z + l$  мы, очевидно, снова получим решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям, так как при смещении на период  $l$  вдоль оси волновода система переходит сама в себя. Естественно поэтому считать, что при такой замене искомое решение приобретает только числовой множитель, который мы запишем в виде  $e^{i\alpha l}$ , и что

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = e^{i\alpha l} \vec{E}(r, \varphi, z); \quad \vec{H}(r, \varphi, z) = e^{i\alpha l} \vec{H}(r, \varphi, z),$$

где  $\vec{E}(r, \varphi, z)$ ,  $\vec{H}(r, \varphi, z)$  периодичны относительно  $z$  с периодом  $l$ . Очевидно также, что эти вектор-функции периодичны относительно  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , так как они однозначны, а координаты  $(r, \varphi, z)$  и  $(r, \varphi + 2\pi, z)$  определяют одну и ту же точку в пространстве. Заметим, наконец, что спираль переходит сама в себя, если ее одновременно сместить по оси  $z$  на величину  $\Delta z$  и повернуть вокруг оси  $z$  на угол  $\Delta\varphi$  так, чтобы  $\Delta\varphi + \frac{2\pi\Delta z}{l} = 0$ . Отсюда вытекает, что  $\vec{E}(r, \varphi, z)$ ,  $\vec{H}(r, \varphi, z)$  зависят не отдельно от  $\varphi$  и  $z$ , а от их комбинации

$$\zeta = \varphi + \frac{2\pi z}{l}, \quad (1)$$

причем из указанной выше периодичности этих вектор-функций относительно  $\varphi$  и  $z$  следует, очевидно, их периодичность относительно  $\zeta$  с пе-

ромом 2а. Поэтому их можно разложить в ряд Фурье, в результате чего получим

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \varphi, z) &= e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(r) e^{in(\varphi + \frac{2\pi z}{T})}; \\ \vec{H}(r, \varphi, z) &= e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(r) e^{in(\varphi + \frac{2\pi z}{T})}.\end{aligned}\quad (2)$$

Составляющие  $\vec{E}_n(r)$  и  $\vec{H}_n(r)$  внутри волновода ( $r < a$ ) запишутся в виде

$$\begin{aligned}E_{nr} &= \alpha_n \rho_n^2 J_n(\rho_n r), \\ E_{n\varphi} &= \alpha_n i k_n \rho_n J_n'(\rho_n r) + \beta_n \frac{k_n}{r} J_n(\rho_n r), \\ E_{nz} &= -\alpha_n \frac{n}{r} J_n J_n(\rho_n r) + \beta_n i k_n J_n J_n'(\rho_n r), \\ H_{nr} &= \beta_n \rho_n^2 J_n(\rho_n r), \\ H_{n\varphi} &= -\alpha_n \frac{k_n}{r} J_n(\rho_n r) + \beta_n i k_n \rho_n J_n'(\rho_n r), \\ H_{nz} &= -\alpha_n i k_n J_n J_n'(\rho_n r) - \beta_n \frac{n}{r} J_n J_n(\rho_n r),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\alpha_n, \beta_n$  — числовые коэффициенты,

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{T}; \quad \rho_n = i \sqrt{h_n^2 - k^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}.\quad (4)$$

Здесь и дальше под  $\sqrt{A}$  понимаем то значение квадратного корня, которое имеет положительную вещественную часть ( $\text{Re } \sqrt{A} > 0$ ), а если  $\text{Re } \sqrt{A} = 0$ , — то отрицательную мнимую часть ( $\text{Im } \sqrt{A} < 0$ ).

Чтобы удовлетворить уравнениям Максвелла вне волновода ( $r > a$ ) и получить при этом только расходящиеся или затухающие волны, нужно взять составляющие вектор-функций  $\vec{E}_n(r), \vec{H}_n(r)$  равными выражениям, которые получаются из правых частей формул (3) при замене коэффициентов  $\alpha_n, \beta_n$  на  $\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n$  и функций  $J_n(\rho_n r), J_n'(\rho_n r)$  — соответственно на  $H_n^{(1)}(\rho_n r), H_n^{(1)'}(\rho_n r)$ .

Распорядившись неопределенными коэффициентами  $\alpha_n, \beta_n, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n$ , мы должны удовлетворить граничным условиям при  $r = a$ , т. е. обеспечить равенство нулю тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}(r, \varphi, z)$  и непрерывность  $r$ -составляющей вектора  $\vec{H}(r, \varphi, z)$  на металлической ленте, а также непрерывность всего поля на щели между витками ленты.

Из условий для  $E_r$  и  $E_\varphi$  следует, что

$$\bar{\alpha}_n = \frac{J_n(\rho_n a)}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} \alpha_n, \quad \bar{\beta}_n = \frac{J_n'(\rho_n a)}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} \beta_n\quad (5)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \rho_n^2 J_n(\rho_n a) e^{in\varphi} e^{in\omega t} = 0 \quad (\text{на металле}),\quad (6)$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n n h_n J_n(\rho_n a) e^{in\varphi} e^{in\omega t} + i k a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \rho_n J_n'(\rho_n a) e^{in\varphi} e^{in\omega t} = 0 \quad (\text{на металле}).\quad (7)$$

Граничное условие для  $H_n$  выполняется автоматически в силу (5). Используя (5), а также известное равенство

$$J'_n(x) H_n^{(1)}(x) - J_n(x) H_n^{(1)'}(x) = \frac{\cos x}{x},$$

из условий для  $H_n$ ,  $H_n$  и  $E_n$  находим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\rho_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (8)$$

$$i \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\lambda_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (9)$$

$$i \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{\lambda_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (10)$$

Покажем, что уравнение (10) является следствием уравнений (8) и (9). В силу (4)

$$n \lambda_n = \frac{i}{2\pi} (h_n - h_n) h_n = \frac{i}{2\pi} (k^2 - \rho_n^2) = \frac{i}{2\pi} h_n \rho_n^2. \quad (11)$$

и потому, используя (8), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\lambda_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_n \rho_n^2}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x}.$$

Следовательно, уравнение (9) можно записать в виде

$$i \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} - \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_n \rho_n^2}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (9')$$

Дифференцируя это равенство по  $x$  (что, как легко видеть, законно) и учитывая, что согласно (4)

$$\frac{i}{2\pi} (k^2 - h_n \rho_n^2) h_n = \frac{i}{2\pi} (k^2 h_n - h_n k^2 + h_n \rho_n^2) = k^2 n + \frac{i h_n}{2\pi} \rho_n^2.$$

получим

$$\begin{aligned} & -k \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} - i k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} - \\ & - \frac{i h_n}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\rho_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{i n \pi \rho_n x} = 0 \quad (\text{на щели}), \end{aligned}$$

и это уравнение в силу (8) отличается от уравнения (10) лишь множителем  $i \lambda$ .



Заметим еще, что в силу (11) и (6) уравнение (7) можно записать в виде

$$-\frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (k^2 - h_n^2) J_n(\rho_n a) e^{in\varphi} e^{i\alpha z} + ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \rho_n J_n'(\rho_n a) e^{in\varphi} e^{i\alpha z} = 0 \quad (\text{на металле}). \quad (7')$$

Таким образом, для определения коэффициентов  $a_n$  и  $\beta_n$  имеем систему четырех однородных уравнений (6), (7'), (8) и (9'). Параметр  $h_n$  (волновое число) находится из условия существования у этой системы ненулевого решения.

2. Для дальнейшего исследования этой системы целесообразно ввести безразмерные параметры:

$$x = \frac{h_n^2}{2\alpha}, \quad \chi = \frac{ka}{2\alpha}, \quad \text{tg } \theta = \frac{i}{2\alpha} \quad (12)$$

(здесь  $\theta$  — угол намотки), так что

$$h_n = \frac{2\alpha}{\chi} (n + \nu), \quad \rho_n a = i \text{ctg } \theta \sqrt{(n + \nu)^2 - \chi^2}. \quad (13)$$

Положим еще

$$a_n = a \alpha_n \rho_n^{\nu} J_n(\rho_n a), \quad b_n = \frac{\beta_n \rho_n}{\chi H_n^{(1)\prime}(\rho_n a)}$$

и введем «спиральную координату» по формуле (1).

Тогда уравнения (6), (7'), (8) и (9') после умножения каждого из них на  $e^{-in\varphi}$  запишутся в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n+\nu)\varphi} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (14)$$

$$- \text{tg } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\chi^2 - \nu(n+\nu)}{\chi^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\varphi} + ika\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n'(\rho_n a) H_n^{(1)\prime}(\rho_n a) e^{i(n+\nu)\varphi} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (14a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n+\nu)\varphi} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (14b)$$

$$\frac{ika}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\rho_n^{\nu} \alpha^{\nu} J_n(\rho_n a) H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{i(n+\nu)\varphi} - \text{tg } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\chi^2 - \nu(n+\nu)}{\chi^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\varphi} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (14\beta)$$

Обозначим

$$x(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\chi^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta}; \quad y(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\chi^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta}.$$

2. Разделенные, см. п. 1

Б И Б 111  
 369528

Согласно уравнениям (14) и (14б) имеем

$$x^2 x(\zeta) + x'(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{n\zeta + \nu\zeta} = 0 \quad (\text{на металле}),$$

$$x^2 y(\zeta) + y'(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{n\zeta + \nu\zeta} = 0 \quad (\text{на щели}),$$

и поэтому

$$x(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{n\zeta + \nu\zeta} = M_1 e^{x\zeta} + M_2 e^{-x\zeta} \quad (\text{на металле}), \quad (15)$$

$$y(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{n\zeta + \nu\zeta} = N_1 e^{x\zeta} + N_2 e^{-x\zeta} \quad (\text{на щели}), \quad (15a)$$

где  $M_1, M_2, N_1, N_2$  — некоторые константы.

Используя равенства (15), (15a), находим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{x^2 - \nu(n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{n\zeta + \nu\zeta} = x^2 x(\zeta) + i\nu x'(\zeta) = (x^2 - \nu x) M_1 e^{x\zeta} + (x^2 + \nu x) M_2 e^{-x\zeta} \quad (\text{на металле}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{x^2 - \nu(n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{n\zeta + \nu\zeta} = x^2 y(\zeta) + i\nu y'(\zeta) = (x^2 - \nu x) N_1 e^{x\zeta} + (x^2 + \nu x) N_2 e^{-x\zeta} \quad (\text{на щели})$$

и, следовательно, интересующая нас система уравнений (14—14b) распадается на следующие две системы (делим все уравнения на  $e^{i\zeta}$ ):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{n\zeta} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (16)$$

$$\frac{i\nu x}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\rho_n e^{i\zeta} J_n(\rho_n a) H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{n\zeta} - x \operatorname{tg} \theta [(x - \nu) N_1 e^{x\zeta - \nu\zeta} + (x + \nu) N_2 e^{-x\zeta + \nu\zeta}] = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (16'a)$$

и

$$i\nu x x \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n'(\rho_n a) H_n^{(1)'}(\rho_n a) e^{n\zeta} - x \operatorname{tg} \theta [(x - \nu) M_1 e^{x\zeta - \nu\zeta} + (x + \nu) M_2 e^{-x\zeta + \nu\zeta}] = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{n\zeta} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (17a)$$

Эти системы мы преобразуем далее, используя асимптотику функций Бесселя и известные связи между ними [1].

Согласно (13),  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \rho_n \alpha = \infty$ , причем  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \arg \rho_n \alpha = \frac{\pi}{2}$  (то есть при больших  $|n|$  число  $\rho_n \alpha$  является «почти» чисто мнимым). Обозначая  $\rho_n = iq_n$ , будем иметь

$$J_n(\rho_n \alpha) = e^{\frac{\pi n}{2}} I_n(q_n \alpha), \quad H_n^{(1)}(\rho_n \alpha) = -\frac{2i}{\pi} e^{-\frac{\pi n}{2}} K_n(q_n \alpha),$$

где  $q_n \alpha$  «почти» положительно при больших  $|n|$ , т. е.  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \arg q_n \alpha = 0$ .

Воспользовавшись асимптотическими формулами для  $I_n$  и  $K_n$  при больших  $n$ ,  $x > 0$ , получаем при  $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha) = \frac{-i}{\pi \sqrt{n^2 - \rho_n^2 \alpha^2}} [1 + O(|n|^{-2})].$$

Но

$$n^2 - \rho_n^2 \alpha^2 = n^2 + c \lg^2 \theta [(n + \nu)^2 - \chi^2] = n^2 (1 + c \lg^2 \theta) + 2\nu c \lg^2 \theta + (\nu^2 - \chi^2) c \lg^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} [(n + \nu \cos^2 \theta)^2 + (\nu^2 - \chi^2) \cos^2 \theta - \nu^2 \cos^4 \theta],$$

так что при больших  $|n|$

$$\sqrt{n^2 - \rho_n^2 \alpha^2} = \frac{n + \nu \cos^2 \theta}{\sin \theta} \left[ \frac{|n|}{n} \right] [1 + O(|n|^{-2})]$$

и, значит, при  $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha) = -\frac{i \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \left[ \frac{|n|}{n} \right] [1 + O(|n|^{-2})], \quad (18)$$

$$\frac{1}{\rho_n^2 \alpha^2 J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha)} = \frac{i \pi (n + \nu \cos^2 \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta [n^2 - (n + \nu)^2]} \left[ \frac{|n|}{n} \right] [1 + O(|n|^{-2})] \quad (19)$$

(см. (13)).

С помощью известных равенств для бесселевых функций, а также имеет в виду, что

$$\frac{1}{n - 1 + \nu \cos^2 \theta} + \frac{1}{n + 1 + \nu \cos^2 \theta} = \frac{2(n + \nu \cos^2 \theta)}{(n + \nu \cos^2 \theta)^2 - 1} = \frac{2}{n + \nu \cos^2 \theta} + \frac{2}{|(n + \nu \cos^2 \theta)^2 - 1| (n + \nu \cos^2 \theta)} = \frac{2}{n + \nu \cos^2 \theta} + O(|n|^{-2}),$$

находим, что при  $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha) = \frac{-i \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \left[ 1 + \frac{n^2 \nu \cos^2 \theta}{(n + \nu)^2 - \chi^2} \right] \left[ \frac{|n|}{n} \right] [1 + O(|n|^{-2})]. \quad (20)$$

Умножим теперь уравнение (16а) на  $e^{i\alpha \zeta}$ , уравнение (17) — на  $e^{i\beta \zeta}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — пока неопределенные константы, и продифференцируем эти уравнения по  $\zeta$ . Имеем в виду асимптотические формулы (19) к (20), заметим, что

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\pi (n + \nu \cos^2 \theta) (n + \nu) \sin \theta}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - \chi^2]} = \frac{\pi \sin \theta}{\cos^2 \theta},$$

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{(n + \beta) \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \left[ 1 + \frac{n^2 \nu \cos^2 \theta}{(n + \nu)^2 - \chi^2} \right] = \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta},$$

и выберем константы  $\alpha, \beta$  так, чтобы величины

$$\frac{\pi(\alpha + \nu \cos^2 \theta)(\pi + \alpha) \sin \theta}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - \alpha^2]} - \frac{\pi \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\pi \sin \theta [(n + \nu \cos^2 \theta - 2\nu)\pi + \alpha \nu \cos^2 \theta + \alpha^2 - \nu^2]}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - \alpha^2]}$$

$$\frac{(n + \beta) \sin \theta}{\pi(\alpha + \nu \cos^2 \theta)} \left[ 1 + \frac{n^2 (\nu^2 \theta)}{(n + \nu)^2 - \alpha^2} \right] - \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} =$$

$$= \frac{\sin \theta [(\beta + 2\nu \cos^2 \theta - \nu \cos^2 \theta - 2\nu)n^2 + \theta (n + \nu)]}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta) [(n + \nu)^2 - \alpha^2] \cos^2 \theta}$$

были  $O(|n|^{-2})$  при  $|n| \rightarrow \infty$ , т. е. возьмем

$$\alpha = \beta = \nu(2 - \cos^2 \theta) = \nu(1 + \sin^2 \theta). \quad (21)$$

Тогда, полагая\*

$$\frac{I(n + \alpha)}{\rho_n^{\alpha} J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha)} = \frac{\pi \sin \theta |n|}{\cos^2 \theta} (1 - \epsilon_n), \quad (22)$$

$$I(n + \beta) J_n'(\rho_n \alpha) H_n^{(1)'}(\rho_n \alpha) = \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n),$$

где

$$\epsilon_n = 1 - \frac{I \cos^2 \theta [n + \nu(1 + \sin^2 \theta)] |n|}{\sin \theta \rho_n^{\alpha} J_n(\rho_n \alpha) H_n^{(1)}(\rho_n \alpha)} \frac{|n|}{n}, \quad (23)$$

$$\delta_n = 1 - \frac{I \cos^2 \theta}{\sin \theta} [n + \nu(1 + \sin^2 \theta)] J_n'(\rho_n \alpha) H_n^{(1)'}(\rho_n \alpha) \frac{|n|}{n},$$

будем иметь при  $|n| \rightarrow \infty$

$$\epsilon_n = O(|n|^{-2}), \quad \delta_n = O(|n|^{-2}). \quad (24)$$

Таким образом, из уравнения (16а) к (17) после умножения на  $e^{i(\pi + \sin^2 \theta) \zeta}$ , дифференцирование по  $\zeta$  и сокращения на  $e^{i(\pi + \sin^2 \theta) \zeta}$  получаем

$$\left( \frac{2a \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\cos \theta} \right):$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_n) e^{n\zeta} - \sin \theta [(x - \nu)(x + \nu \sin^2 \theta) N_1 e^{n(x-\nu)\zeta} -$$

$$-(x + \nu)(x - \nu \sin^2 \theta) M_1 e^{-n(x+\nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на щели});$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n) e^{n\zeta} - \sin \theta [(x - \nu)(x + \nu \sin^2 \theta) M_2 e^{n(x-\nu)\zeta} -$$

$$-(x + \nu)(x - \nu \sin^2 \theta) M_2 e^{-n(x+\nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на металле}). \quad (17')$$

Система равенств (16) и (16'а) (соответственно (17') и (17'а)) не полностью эквивалентна равенствам (16) и (16а) (соответственно (17) и (17'а)), так как из нее следует только, что производная от левой части (16а) (соответственно (17')) равна нулю, а сама эта левая часть постоянна. Чтобы удовлетворить уравнению (16а) (соответственно (17')), мы должны обратить в нуль его левую часть хотя бы в одной точке на щели (соответственно на металле). Пусть начало отсчета спиральной координаты  $\zeta$  помещено в середине одной из щелей. Тогда точки  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \pi$  лежат соответственно в середине щели и в середине металлической ленты.

\* Считаем  $\frac{|0|}{0} = 1$ .

и дополнительными уравнениями будут следующие (используем еще равенства (22) и (21)):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+v(1+\sin^2\theta)} \frac{|n|}{n} (1-\epsilon_n) - \sin\theta [(x-v)N_1 + (x+v)N_2] = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n+v(1+\sin^2\theta)} \frac{|n|}{n} (1-\delta_n) - \sin\theta [(x-v)e^{A_1-v}M_1 + (x+v)e^{-A_1+v}M_2] = 0. \quad (26)$$

Для определения констант  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$  имеем равенства (15), а также равенства, получающиеся из (15) дифференцированием по  $x$ , причем те из них, которые относятся к щели, очевидно, достаточно удовлетворить в одной точке  $\zeta = 0$ , а те, которые относятся к металлу, — в одной точке  $\zeta = \pi$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{x^2 - (n+v)^2} &= M_1 e^{i(x-v)\pi} + M_2 e^{-i(x+v)\pi}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n (n+v)}{x^2 - (n+v)^2} &= x [M_1 e^{i(x-v)\pi} - M_2 e^{-i(x+v)\pi}], \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{x^2 - (n+v)^2} &= N_1 + N_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n (n+v)}{x^2 - (n+v)^2} &= x (N_1 - N_2), \end{aligned} \quad (27)$$

а так как

$$\frac{n+v}{x^2 - (n+v)^2} = \frac{x^2}{[x^2 - (n+v)^2](n+v)} - \frac{1}{n+v},$$

то, обозначая

$$\eta_n = \frac{(-1)^n}{x^2 - (n+v)^2}, \quad (28)$$

можем эти равенства записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n a_n = M_1 e^{i(x-v)\pi} + M_2 e^{-i(x+v)\pi}, \quad (29)$$

$$x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_n a_n}{n+v} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+v} = x [M_1 e^{i(x-v)\pi} - M_2 e^{-i(x+v)\pi}], \quad (30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \eta_n b_n = N_1 + N_2; \quad (31)$$

$$x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta_n b_n}{n+v} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+v} = x (N_1 - N_2). \quad (32)$$

Система уравнений (16), (16'а), (17'), (17а), (25), (26), (29), (30), (31) и (32) полностью эквивалентна исходной системе (14—14в). При сделан-

ном нами выборе начала отсчета «спиральной координаты»  $\zeta$  шель лежит в области, где  $|\zeta| < \frac{\pi d}{T}$ ; металл — где  $\frac{\pi d}{T} < |\zeta| < \pi$  и далее с периодом  $2\pi$  (рис. 1). Заметим, что содержащиеся в равенствах (15) константы  $M_1$  и  $M_2$  ( $N_1$  и  $N_2$ ) могут иметь различные значения на непересекающихся промежутках  $\zeta$ , занятых металлической лентой (шелем). Так как при выводе равенств (25), (26) и (29—32) мы брали на шеля точку  $\zeta = 0$ , а на металле точку  $\zeta = \pi$ , то входящие в эти равенства константы  $M_1$  и  $M_2$  ( $N_1$  и  $N_2$ ) относятся к промежутку  $|\zeta - \pi| < \frac{\pi(l-d)}{T}$  (соответственно  $|\zeta| < \frac{\pi d}{T}$ ).

В соответствии с этим мы запишем системы (16) — (16'a) и (17) — (17a) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} &\approx 0, \quad \frac{\pi d}{T} < |\zeta| < \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{\alpha} (1 - \alpha_n) e^{in\zeta} - \sin \theta [(x - y) (x + y \sin^2 \theta) N_1 e^{i\alpha(x-y)\zeta} - \\ &- (x + y) (x - y \sin^2 \theta) N_2 e^{-i\alpha(x+y)\zeta}] \approx 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{T}. \end{aligned} \right\} (A)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{\alpha} (1 - \beta_n) e^{in\zeta} - \sin \theta [(x - y) (x + y \sin^2 \theta) M_1 e^{i\alpha(x-y)\zeta} - \\ &- (x + y) (x - y \sin^2 \theta) M_2 e^{-i\alpha(x+y)\zeta}] = 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi(l-d)}{T}, \end{aligned} \right\} (B)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n e^{in\zeta} = 0, \quad \frac{\pi(l-d)}{T} < |\zeta| < \pi,$$

сделав в последних двух уравнениях замену

$$\zeta - \pi = \xi.$$

Вспользуемся теперь равенством

$$e^{-i\pi x} = \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + i} e^{in\xi}, \quad |x| < \pi,$$

которое проверяется непосредственным вычислением коэффициентов Фурье, и введем еще обозначения

$$\frac{1}{\alpha} \sin \theta \cdot (x - y) (x + y \sin^2 \theta) \cdot \sin (x - \pi) \approx \alpha(x; y; \theta), \quad (33)$$

$$M_1 e^{i\alpha(x-y)\zeta} = \tilde{M}_1; \quad M_2 e^{-i\alpha(x+y)\zeta} = \tilde{M}_2. \quad (34)$$

Тогда системы (A) и (B) переписуются так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{T} < |\zeta| < \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{\alpha} e^{in\zeta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{|n|}{\alpha} a_n + N_1 \alpha(x; y; \theta) \frac{(-1)^n}{\alpha + (y-x)} - \right. \\ &\left. - N_2 \alpha(-x; y; \theta) \frac{(-1)^n}{\alpha + (y+x)} \right] e^{in\zeta}, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{T}; \end{aligned} \right\} (A')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n e^{i n \xi} &= 0, \quad \frac{\pi(l-d)}{T} < |\xi| < \pi; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} e^{i n \xi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n + \tilde{M}_1 \alpha(x; \nu; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (\nu - x)} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{M}_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (\nu + x)} \right] e^{i n \xi}, \quad |\xi| < \frac{\pi(l-d)}{T}. \end{aligned} \right\} (B')$$

Подобные системы уравнений рассмотрены в работе [2]. Используя полученные там результаты, можем заменить системы (A') и (B') эквивалентными им равенствами

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \alpha_n V_m^n \left( \frac{\pi d}{T} \right) + N_2 \cdot \alpha(x; \nu; \theta) V_m^{i+1} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu - x \right) - \\ &\quad - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) V_m^{i+1} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu + x \right) + 2c_1 R_m \left( \frac{\pi d}{T} \right); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m b_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n V_m^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T} \right) + \tilde{M}_1 \alpha(x; \nu; \theta) V_m^{i+1} \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu - x \right) - \\ &\quad - \tilde{M}_2 \alpha(-x; \nu; \theta) V_m^{i+1} \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu + x \right) + 2c_2 R_m \left( \frac{\pi(l-d)}{T} \right) \quad (36) \\ &\quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые константы\*, величинами  $R_m(\delta)$ ,  $V_m^s(\delta)$  выражаются через полиномы Лежандра [2], а

$$\begin{aligned} V_m^{i+1}(\delta; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n V_m^n(\delta)}{n+s} = \frac{(m+1)\pi}{2(m+s)\sin \pi s} [P_m(\alpha) P_{i-1}(\alpha) - \\ &\quad - P_{m+1}(\alpha) P_{i-1}(\alpha)] \quad (\alpha = \cos \delta). \end{aligned} \quad (37)$$

С помощью (35) и (36) мы теперь преобразуем уравнения (25), (26), (30) и (32).

В силу (35)

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_m \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2 \theta)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{|n|}{n} \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n \left( \frac{\pi d}{T} \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2 \theta)} + \\ &\quad + N_1 \alpha(x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{i+1} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu - x \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2 \theta)} - \\ &\quad - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{i+1} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu + x \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2 \theta)} + 2c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_m \left( \frac{\pi d}{T} \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2 \theta)} = \end{aligned}$$

\* Можно показать, что  $c_1 = c_{-1}$ ,  $c_2 = -c_{-2}$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + \\
&+ N_2 \alpha(x; \nu; \theta) V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu - x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) - \\
&- N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu + x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + 2c_1 R_{[n]} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{[n]}(\theta; s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_m(\theta) \frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} P_{s-1}(u); \\
V_{[n]}^{\alpha}(\theta; s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{\alpha}(\theta) \frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \frac{s-1}{n+s} [P_{s-1}(-u) P_{n+1}(u) + \\
&+ P_{s-2}(-u) P_n(u) + \frac{1}{n+s}]; \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{[n]}^{\alpha}(\theta; s_1, s_2) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{\alpha}(\theta; s_1) \frac{|m|}{m}}{m+s_2} = \frac{\pi^2}{2(s_1-s_2) \sin \pi s_1} \left\{ \frac{s_2-1}{\sin \pi s_1} [P_{s_1-1}(-u) P_{n+2}(u) + \right. \\
&+ P_{s_1-2}(-u) P_{n+1}(u) - \frac{s_2-1}{\sin \pi s_2} [P_{s_2-1}(-u) P_{s_2-2}(u) + P_{s_2-2}(-u) P_{s_2-1}(u)] \Big\},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{m+\nu} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T} \right)}{m+\nu} + \\
&+ N_2 \alpha(x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu - x \right)}{m+\nu} - \\
&- N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu + x \right)}{m+\nu} + \\
&+ 2c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m \left( \frac{\pi d}{T} \right)}{m+\nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu \right) + \\
&+ N_2 \alpha(x; \nu; \theta) V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu - x; \nu \right) - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \times \\
&\times V_{[n]}^{\alpha} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu + x; \nu \right) + 2c_1 R_{[n]} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu \right),
\end{aligned}$$

где

$$R_{[n]}(\theta; s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m(\theta)}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} P_{s-1}(u);$$



$$V_{[0]}^n(\theta; s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^n(\theta)}{m+s} = \\ = \frac{s-1}{2(n+s)} \frac{\pi}{\sin \pi s} (P_{s-1}(u) P_{s+1}(u) - P_{s-2}(u) P_s(u)) \quad (39)$$

$$V_{[1]}^n(\theta; s_1, s_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{[1]}(\theta; s_1)}{m+s_2} = \frac{e^{\pi^2 (s_2-1)}}{2(s_2-s_1) \sin \pi s_1 \sin \pi s_2} \times \\ \times |P_{s_1-s_2}(u) P_{s_2-1}(u) - P_{s_1-s_2}(u) P_{s_2-1}(u)|.$$

Обозначая

$$W_{[1]}^n(\theta; s) = V_{[1]}^n(\theta; s) - \frac{1}{n+s}, \quad (40)$$

можно равенства (25) и (30) записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{n} \varepsilon_n W_{[1]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + \\ + N_1 \left[ \alpha(x; \nu; \theta) \bar{V}_{[2]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu-x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) - (x-\nu) \sin \theta \right] - \\ - N_2 \left[ \alpha(-x; \nu; \theta) \bar{V}_{[2]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu+x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + (x+\nu) \sin \theta \right] \sim \\ + 2c_2 R_{[1]} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) = 0; \quad (41)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \left[ \frac{x^2 \gamma_n}{n+s} - \frac{1}{n} \right] \varepsilon_n V_{[1]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu \right) - N_1 \alpha(x; \nu; \theta) V_{[1]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu-x; \nu \right) + \\ + N_2 \cdot \alpha(-x; \nu; \theta) V_{[1]}^n \left( \frac{\pi d}{T}; \nu+x; \nu \right) - 2c_2 R_{[1]} \left( \frac{\pi d}{T}; \nu \right) - \\ - x \bar{M}_1 + \nu \bar{M}_2 = 0. \quad (42)$$

Используя аналогичным образом (36), из равенств (26) и (32) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{1}{n} \varepsilon_n W_{[1]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + \\ + \bar{M}_1 \left[ \alpha(x; \nu; \theta) \bar{V}_{[2]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu-x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) - (x-\nu) \sin \theta \right] - \\ - \bar{M}_2 \left[ \alpha(-x; \nu; \theta) \bar{V}_{[2]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu+x; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) + (x+\nu) \sin \theta \right] + \\ + 2c_2 R_{[1]} \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu(1 + \sin^2 \theta) \right) = 0; \quad (43)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \left[ \frac{x^2 \gamma_n}{n+s} - \frac{1}{n} \right] \varepsilon_n V_{[1]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu \right) - \\ - \bar{M}_1 \cdot \alpha(x; \nu; \theta) V_{[1]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu-x; \nu \right) + \\ + \bar{M}_2 \cdot \alpha(-x; \nu; \theta) V_{[1]}^n \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu+x; \nu \right) - \\ - 2c_2 R_{[1]} \left( \frac{\pi(l-d)}{T}; \nu \right) - x N_1 + \nu N_2 = 0. \quad (44)$$

Таким образом, окончательно имеем бесконечную систему линейных однородных уравнений (29), (31), (35), (36), (41), (42), (43) и (44) с неизвестными  $a_n$ ,  $(-1)^n b_n$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\tilde{M}_1$ ,  $\tilde{M}_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$ . Приравняв нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение.

Сходимость этого определителя обеспечивается тем, что входящие в него параметры  $\epsilon_n$ ,  $\delta_n$  и  $\eta_n$  равны  $O(|n|^{-1})$  при  $|n| \rightarrow \infty$  (см. (24) и (29)).

Этим обстоятельством можно воспользоваться и для численных расчетов, сохраняя в дисперсионном уравнении только конечное число параметров  $\epsilon_n$ ,  $\delta_n$ ,  $\eta_n$ , имеющих наибольшие значения, и полагая остальные равными нулю.

3. Укажем еще одну форму для дисперсионного уравнения, которая может оказаться предпочтительнее при численных расчетах (в частности, если все  $\epsilon_n$  и  $\delta_n$  при  $n \neq m$  считать равными нулю, что соответствует  $(-m)$ -му пространственному резонансу). Для этого используем равенства (27). Умножив первое (третье) из них на  $x$ , добавим к нему и вычтем из него второе (соответственно четвертое). В результате этого вместо (27) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+(v-x)} &= -2x\tilde{M}_1, & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+(v+x)} &= 2x\tilde{M}_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+(v-x)} &= -2xN_1, & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+(v+x)} &= 2xN_2 \end{aligned} \quad (27')$$

(мы использовали обозначения (34)).

Рассмотрим теперь системы уравнений (35), (41) и (36), (43), считая в них неизвестными  $a_n$  и  $c_n$ , соответственно  $(-1)^n b_n$  и  $c_n$ . Из этих систем, как легко видеть, будем иметь

$$a_n = \beta_n^{(1)} \left( \epsilon_n, \epsilon_{21}, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) N_1 + \beta_n^{(2)} \left( \epsilon_n, \epsilon_{21}, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) \cdot N_2, \quad (45)$$

$$(-1)^n b_n = \beta_n^{(3)} \left( \delta_n, \delta_{21}, \dots, \frac{\delta_n (l-d)}{l} \right) \tilde{M}_1 + \beta_n^{(4)} \left( \delta_n, \delta_{21}, \dots, \frac{\delta_n (l-d)}{l} \right) \tilde{M}_2,$$

где  $\beta_n^{(1)}(\dots)$  и  $\beta_n^{(2)}(\dots)$  — коэффициенты, зависящие от указанных в скобках аргументов.

Подставив (45) в (27'), получаем следующую систему четырех линейных однородных уравнений с неизвестными  $\tilde{M}_1$ ,  $\tilde{M}_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left( \epsilon_n, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left( \epsilon_n, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) N_2}{n+(v-x)} &= -2x\tilde{M}_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left( \epsilon_n, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left( \epsilon_n, \dots, \frac{\epsilon_n d}{l} \right) N_2}{n+(v+x)} &= 2x\tilde{M}_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(3)} \left( \delta_n, \dots, \frac{\delta_n (l-d)}{l} \right) \tilde{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(4)} \left( \delta_n, \dots, \frac{\delta_n (l-d)}{l} \right) \tilde{M}_2}{n+(v-x)} &= \\ &= -2xN_1; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left( \epsilon_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l} \right)}{n + (\nu + \kappa)} \tilde{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left( \epsilon_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l} \right)}{n + (\nu + \kappa)} \tilde{M}_2 = 2\kappa N_0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}(\epsilon_0, \dots, \Delta)}{n + \nu} &= S_1(\epsilon_0, \dots, \Delta; \nu); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}(\epsilon_0, \dots, \Delta)}{n + \nu} &= S_2(\epsilon_0, \dots, \Delta; \nu); \end{aligned} \quad (46)$$

тогда эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) & S_2(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) \\ S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) & S_2(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} &= 2\kappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu - \kappa) & S_2(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu - \kappa) \\ S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu + \kappa) & S_2(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix} &= \\ &= 2\kappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Исключая из этих равенств  $\tilde{M}_1$  и  $\tilde{M}_2$ , приходим к системе линейных однородных уравнений с неизвестными  $N_1$  и  $N_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\kappa^2} \begin{pmatrix} -S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu - \kappa) & -S_2(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu - \kappa) \\ S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu + \kappa) & S_2(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu + \kappa) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} -S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) & -S_2(\dots) \\ S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) & S_2(\dots) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \det \left[ \frac{1}{4\kappa^2} \begin{pmatrix} -S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu - \kappa) & -S_2(\dots) \\ S_1(b_0, \dots, \frac{\pi(t-d)}{l}; \nu + \kappa) & S_2(\dots) \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} -S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) & -S_2(\dots) \\ S_1(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) & S_2(\dots) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

4. Дисперсионное уравнение спирального волновода (47) можно значительно упростить, если предположить  $\nu$  и  $\kappa$  настолько малыми, что при  $s = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ , где  $\nu_1 = \nu - \kappa, \nu_2 = \nu + \kappa, \nu_3 = \nu(1 + \sin^2 \theta)$ , допустимы приближенные равенства:

$$\sin \pi s \approx \pi s; \quad P_s(u) \approx P_0(u) + s \frac{\partial P_1(u)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 1 + s \ln \frac{1+u}{2};$$

$$P_{s-1}(u) \approx P_{-1}(u) + s \frac{\partial P_{-1}(u)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 1 - s \ln \frac{1+u}{2}.$$

В этом случае имеем, в частности, для нулевого пространственного резонанса

$$\beta_0^{(1)}(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}) \approx \frac{\nu_1 \nu_2 \sin \theta}{\nu_0 - 1 + \nu_3 \ln \frac{1+u}{2}},$$

а так как (см. (23))  $\epsilon_0 - 1 = -\frac{\nu_2 \sin \theta}{2\nu_1 \nu_3 J_0(q_0 a) K_0(q_0 a)}$  ( $\rho_0 = i q_0$ ), то

$$\beta_0^{(1)}(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}) \approx -2\nu_1^2 \nu_2 J_0(q_0 a) K_0(q_0 a).$$

Далее находим

$$S_1(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) = -2\nu_1 [ \nu_2 J_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \nu_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} ];$$

$$S_1(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) = -2\nu_1^2 [ J_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} ].$$

Меняя в этих выражениях местами величины  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , получаем

$$S_2(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa) \approx 2\nu_2^2 [ J_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} ];$$

$$S_2(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa) \approx 2\nu_2 [ \nu_1 J_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \nu_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} ].$$

Используя затем равенство (см. (23))

$$\epsilon_0 - 1 = -\frac{i \kappa \cos^2 \theta - \nu_2 J_0'(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{\sin \theta} = -\frac{2 \cos^2 \theta}{\sin \theta} \nu_2 J_1(q_0 a) K_1(q_0 a),$$

аналогичным образом находим

$$\beta_0^{(1)}(\epsilon_0; \frac{\pi(l-d)}{l}) \approx -\frac{\nu_1 \sin \theta}{2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_1(\epsilon_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa) \approx -\frac{\sin \theta}{2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_1(\epsilon_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa) \approx -\frac{\frac{\nu_2}{\nu_1} \sin \theta}{2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_2(\epsilon_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa) \approx \frac{\frac{\nu_2}{\nu_1} \sin \theta}{2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_2(\epsilon_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa) \approx \frac{\sin \theta}{2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}.$$

Обозначая элементы определителя в левой части равенства (47) через  $A_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ), получим для них следующие приближенные выражения:

$$A_{11} \approx \frac{2\gamma_1 \sin \theta \left[ \gamma_2 I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \gamma_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] + 2\gamma_1 \gamma_2 \sin \theta \left[ I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}{8\pi^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]} - 1;$$

$$A_{12} \approx - \frac{2\gamma_2 \sin \theta \left[ I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] + \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_1} \sin \theta \left[ \gamma_1 I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \gamma_2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}{8\pi^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$A_{21} \approx - \frac{2\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta \left[ \gamma_2 I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \gamma_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] + 2\gamma_1^2 \sin \theta \left[ I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}{8\pi^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$A_{22} \approx \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \sin \theta \left[ I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] + 2\gamma_2 \sin \theta \left[ \gamma_1 I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \gamma_2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}{8\pi^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]} - 1.$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае дисперсионное уравнение (47), т. е. уравнение

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0,$$

можно приближенно записать в виде

$$1 - \frac{(8^2 \theta)^2 \gamma_1 \gamma_2 I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \sin^2 \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l}}{I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ln \cos \frac{\pi d}{2l}} = 0,$$

или

$$1 - \frac{16^2 \theta^2 \left[ (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) I_0(q\rho a) K_0(q\rho a) - \gamma^2 \sin^2 \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}{\gamma^2 \left[ I_1(q\rho a) K_1(q\rho a) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]} = 0;$$

при  $\theta$  малом это уравнение совпадает с уравнением, полученным в [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdelyi. Higher transcendental functions. II. New York—Toronto—London, 1953.
2. Э. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.
3. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в коiled волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1424, 1958.

## ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЙНОГО КОЛЬЦЕВОГО ВОЛНОВОДА

С. С. Третьякова

Двойной кольцевой волновод представляет собой периодическую структуру, состоящую из коаксиально расположенных металлических колец, изолированных друг от друга (рис. 1). Начало цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$  находится в середине щели. Предполагается, что кольца бесконечно тонкие, идеально проводящие и расположены строго одно под другим. Зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ . Аксиальная симметрия системы позволяет рассматривать случай симметричных  $E$ - и  $H$ -волн. Вследствие периодичности структуры решение будем отыскивать на одном

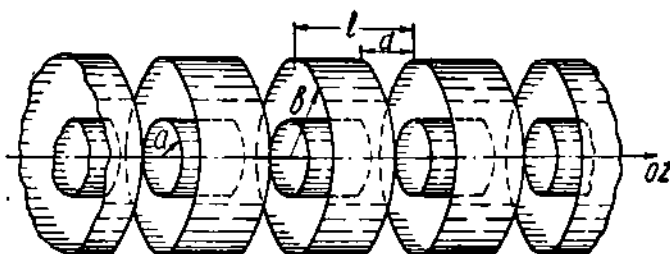


Рис. 1.

из ее периодов, поскольку решения на других, согласно теореме Флоке, отличаются на некоторый постоянный множитель  $e^{ihz}$ . Электромагнитные поля внутри и вне волноводов в этом случае представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z) &= e^{ihz} \sum_m \vec{E}_m(r) e^{i \frac{2\pi m}{l} z}, \\ \vec{H}(r, z) &= e^{ihz} \sum_m \vec{H}_m(r) e^{i \frac{2\pi m}{l} z}. \end{aligned} \quad (1)$$

(Множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и далее опускается).

Разобьем рассматриваемую систему на три области: I область —  $r < a$  — внутри кольцевого волновода радиуса  $a$ , II область —  $a < r < b$  — пространство между волноводами, III область  $r > b$  — вне кольцевого волновода радиуса  $b$ . Запишем составляющие поля в каждой из областей, исходя из уравнений Максвелла.

I область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(1)}(r) &= \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(1)}(r) &= \alpha_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(1)}(r) &= \alpha_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(1)}(r) &= \beta_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(1)}(r) &= \beta_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(1)}(r) &= -\beta_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r). \end{aligned}$$

II область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(2)}(r) &= \bar{\alpha}_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m \rho_m^{(2)} H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(2)}(r) &= \bar{\alpha}_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(2)}(r) &= +\bar{\alpha}_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(2)}(r) &= \bar{\beta}_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r) + \bar{\sigma}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(2)}(r) &= \bar{\beta}_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\sigma}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(2)}(r) &= -\bar{\beta}_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r) - \bar{\sigma}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r). \end{aligned}$$

III область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(3)}(r) &= \bar{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(3)}(r) &= \bar{\alpha}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(3)}(r) &= +\bar{\alpha}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(3)}(r) &= \bar{\beta}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(3)}(r) &= \bar{\beta}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(3)}(r) &= -\bar{\beta}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r), \end{aligned}$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\rho_m = \sqrt{k^2 - \left(h_0 + \frac{2\pi m}{l}\right)^2} = \sqrt{k^2 - h_m^2}$ ;

$J_0(\rho_m r)$ ,  $H_0^{(1)}(\rho_m r)$  — функции Бесселя и Ханкеля;

$J_0'(\rho_m r)$ ,  $H_0^{(1)'}(\rho_m r)$  — их производные по аргументу;

$\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\bar{\alpha}_m$ ,  $\bar{\beta}_m$ ,  $\bar{\gamma}_m$ ,  $\bar{\sigma}_m$ ,  $\bar{\alpha}_m$ ,  $\bar{\beta}_m$  — коэффициенты Фурье.

Для определения неизвестных коэффициентов Фурье подчиним поля точным граничным условиям на поверхностях  $r = a$  и  $r = b$ . При  $r = a$

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} = E_z^{(2)} &= 0 && \text{(металл),} \\ E_{\varphi}^{(1)} = E_{\varphi}^{(2)} &= 0 && \\ E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)} &&& \text{(щель);} \\ E_{\varphi}^{(1)} = E_{\varphi}^{(2)}, \quad H_{\varphi}^{(1)} = H_{\varphi}^{(2)} &&& \end{aligned} \tag{2}$$

при  $r = b$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} = E_z^{(3)} &= 0 && \text{(металл),} \\ E_{\varphi}^{(2)} = E_{\varphi}^{(3)} &= 0 && \\ E_z^{(2)} = E_z^{(3)}, \quad H_z^{(2)} = H_z^{(3)} &&& \text{(щель).} \\ E_{\varphi}^{(2)} = E_{\varphi}^{(3)}, \quad H_{\varphi}^{(2)} = H_{\varphi}^{(3)} &&& \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя выражения полей в граничные условия (2) и (3), получим следующие уравнения.

*E*-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m a) e^{ih_m z} &= 0 && \text{(металл),} \\ \sum_m \bar{\gamma}_m \frac{1}{J_0(\rho_m a)} e^{ih_m z} &= 0 && \text{(щель),} \\ \sum_m \bar{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b) e^{ih_m z} &= 0 && \text{(металл),} \\ \sum_m \bar{\alpha}_m \frac{1}{H_0^{(1)}(\rho_m b)} e^{ih_m z} &= 0 && \text{(щель).} \end{aligned} \tag{4}$$

*H*-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_m \rho_m J'_0(\rho_m a) e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \alpha_m \rho_m \frac{1}{J'_0(\rho_m a)} e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m \tilde{\beta}_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m a) e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \tilde{\alpha}_m \rho_m \frac{1}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}). \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения между коэффициентами Фурье

$$\alpha_m = \tilde{\alpha}_m + \tilde{\gamma}_m \frac{H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a)}; \quad \tilde{\alpha}_m = \tilde{\gamma}_m + \tilde{a}_m \frac{J_0(\rho_m b)}{H_0^{(1)}(\rho_m b)}, \quad (6)$$

$$\beta_m = \tilde{\beta}_m + \tilde{\alpha}_m \frac{H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J'_0(\rho_m a)}; \quad \tilde{\beta}_m = \tilde{\alpha}_m + \tilde{\beta}_m \frac{J'_0(\rho_m b)}{H^{(1)'}(\rho_m b)}. \quad (7)$$

выполняются на всем периоде *l*. Подставим эти выражения в уравнения (4), (5) и обозначим

$$a_m = \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m a); \quad \tilde{a}_m = \tilde{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b);$$

$$b_m = \frac{\rho_m}{J'_0(\rho_m a)} g_m \left[ \tilde{\beta}_m - \beta_m \frac{J'_0(\rho_m b)}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} \right];$$

$$\tilde{b}_m = \frac{\rho_m}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} g'_m \left[ \beta_m - \tilde{\beta}_m \frac{H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J'_0(\rho_m a)} \right]; \quad (8)$$

$$g_m = \frac{1}{1 - \frac{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)}}; \quad g'_m = \frac{1}{1 - \frac{J'_0(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J'_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b)}}. \quad (9)$$

Тогда (4), (5) примут вид *E*-волны:

$$\sum_m a_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}),$$

$$\sum_m \tilde{a}_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}),$$

$$\sum_m \frac{g_m}{J_0(\rho_m a)} \left[ \frac{\tilde{a}_m}{\rho_m^2 H_0^{(1)'}(\rho_m a)} - \frac{a_m}{\rho_m^2 J_0(\rho_m a)} \frac{J_0(\rho_m b)}{H_0^{(1)}(\rho_m b)} \right] e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}),$$

$$\sum_m \frac{g_m}{H_0^{(1)}(\rho_m b)} \left[ \frac{a_m}{\rho_m^2 J_0(\rho_m a)} - \frac{\tilde{a}_m}{\rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b)} \frac{H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a)} \right] e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}). \quad (10)$$

*H*-волны:

$$\sum_m b_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}),$$

$$\sum_m \tilde{b}_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}), \quad (11)$$

$$\sum_m \{ b_m J'_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) + \tilde{b}_m J'_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \} e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл})$$

$$\sum_m \{ b_m J'_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) + \tilde{b}_m J'_0(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \} e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}).$$



Если теперь четвертое уравнение в (10) и (11) умножить соответственно на  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  и  $\sqrt{\frac{b}{a}}$ , сложить и вычесть их (соответственно) из третьего уравнения, то уравнения на щели в (10) и на металле в (11) можно записать так:

$$\sum_m \frac{g_m}{\rho_m^2} \left\{ \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \left( \bar{a}_m + a_m \sqrt{\frac{a}{b}} \right) - \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_0(\rho_m b)}{J_0(\rho_m a)} \left[ a_m + \bar{a}_m \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \right] \right\} e^{i h m z} = 0 \quad (\text{щель}). \quad (12)$$

$$\sum_m \left\{ J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) \left[ b_m - \sqrt{\frac{b}{a}} \tilde{b}_m \cdot \frac{J_0'(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m b)}{J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a)} \right] - \right. \\ \left. - J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \left[ b_m \sqrt{\frac{b}{a}} - \tilde{b}_m \right] \right\} e^{i h m z} = 0 \quad (\text{металл}). \quad (13)$$

Будем считать, что  $\rho_m a$  достаточно большое, чтобы можно было заменить отношение бесселевых функций их асимптотическими значениями:

$$\frac{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \approx \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \frac{J_0'(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m b)}{J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a)} \approx \frac{a}{b}.$$

Условие  $\rho_m a \gg 1$  выполняется для малых значений  $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$ , т. е. полученные нами уравнения будут пригодны для волноводов с малым по сравнению с длиной волны периодом и большим радиусом

*E*-волны:

$$\sum_m c_m e^{i h m z} = 0 \quad (\text{металл}),$$

$$\sum_m c_m \frac{g_m}{\rho_m^2} \left[ \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)} - \frac{1}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \right] e^{i h m z} = 0 \quad (\text{щель}). \quad (14)$$

*H*-волны:

$$\sum_m d_m e^{i h m z} = 0 \quad (\text{щель}),$$

$$\sum_m d_m \left[ J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) - \sqrt{\frac{b}{a}} J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \right] \times \\ \times e^{i h m z} = 0 \quad (\text{металл}), \quad (15)$$

где  $c_m = \bar{a}_m + \sqrt{\frac{a}{b}} a_m$ ;  $d_m = b_m - \sqrt{\frac{a}{b}} \tilde{b}_m$ .

Введем теперь новые переменные

$$\zeta = \frac{2\pi}{l} z \quad \nu = \frac{h_0 l}{2\pi} \quad x = \frac{kl}{2\pi} \quad \nu + m = \frac{h m l}{2\pi}$$

и обозначим

$$\epsilon_m = 1 - \frac{i(\nu + m) |m|}{\pi \Delta \rho_m^2 a^2} \frac{|m|}{m} g_m \left[ \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)} - \frac{1}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \right]. \quad (16)$$

$$\delta_m = 1 - \frac{i\pi(\nu + m) |m|}{\Delta} \frac{|m|}{m} \left[ J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) - \sqrt{\frac{b}{a}} J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \right]. \quad (17)$$

Можно показать, воспользовавшись асимптотическими выражениями бesselевых функций, что при  $|m| \rightarrow \infty$   $\epsilon_m$  и  $\delta_m$  стремятся к нулю как  $\frac{1}{m^2}$ .

Теперь (14) и (15) запишутся следующим образом.

*E*-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m c_m e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi; \\ \sum_m c_m \frac{1-\epsilon_m |m|}{\nu+m} e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}; \end{aligned} \quad (18)$$

*H*-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m d_m e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}; \\ \sum_m d_m \frac{1-\delta_m |m|}{\nu+m} e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi. \end{aligned} \quad (19)$$

Такие системы уравнений могут быть решены сведением их к неоднородной задаче сопряжения для аналитической функции, согласно методу, изложенному в работе [1]. Решение представляется однородной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье  $c_m$ ,  $d_m$ . Условие существования нетривиального решения этой системы, т. е. равенство нулю ее определителя, дает дисперсионные уравнения для *E*- и *H*-волн.

*E*-волны:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \epsilon_N V_N^N - 1 & -\epsilon_{-N} V_{-N}^{-N} & \dots & \epsilon_0 V_0^0 & 2R_N \\ \dots & \epsilon_N V_{-N}^N & -\epsilon_{-N} V_{-N}^{-N} - 1 & \dots & \epsilon_0 V_{-N}^0 & 2R_{-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \epsilon_N V_0^0 & -\epsilon_{-N} V_0^{-N} & \dots & \epsilon_0 V_0^0 - 1 & 2R_0 \\ \dots & \epsilon_N \tilde{W}_{[0]}^N & -\epsilon_{-N} \tilde{W}_{[0]}^{-N} & \dots & \epsilon_0 \tilde{W}_{[0]}^0 & 2\tilde{R}_{[0]} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

*H*-волны:

$$\begin{vmatrix} 2R_{[0]} & -\delta_0 V_{[0]}^0 & \dots & -\delta_{-N} V_{[0]}^{-N} & -\delta_N V_{[0]}^N & \dots \\ 2R_0 & \delta_0 (1 - V_0^0) - 1 & \dots & -\delta_{-N} V_0^{-N} & -\delta_N V_0^N & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2R_{-N} & -\delta_0 V_{-N}^0 & \dots & -\delta_{-N} (1 + V_{-N}^{-N}) + 1 & -\delta_{-N} V_{-N}^N & \dots \\ 2R_N & -\delta_0 V_N^0 & \dots & -\delta_{-N} V_N^{-N} & \delta_N (1 - V_N^N) - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

где величины  $V_{[0]}^N$ ,  $V_N^N$ ,  $\tilde{W}_{[0]}^N$ ,  $R_N$ ,  $R_{[0]}$ ,  $\tilde{R}_{[0]}$  определяются через функции Лежандра  $P_n(u)$  от аргумента  $u = \cos \frac{\pi d}{l}$  (см. [1] и нашу статью в настоящем сборнике),  $\tilde{W}_{[0]}^m = \tilde{V}_{[0]}^m - \frac{1}{\nu+m}$ .

Благодаря тому, что  $\epsilon_N$  и  $\delta_N$  с возрастанием  $N$  стремятся к нулю, уравнения (20) и (21) решаются методом редукции. В простейшем случае нулевого приближения получаем довольно простые выражения для дисперсионного уравнения

*E*-волны:

$$J_0(\rho_0 a) = \frac{i2va}{i(\rho_0 a)^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{J_0(\rho_0 a)}{J_0(\rho_0 b)}}{1 - \frac{J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 b)}{J_0(\rho_0 b) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}} \cdot \frac{P_\nu(-u) + P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u) - P_{\nu-1}(-u)}; \quad (22)$$

*H*-волны:

$$J_1(\rho_0 a) = \frac{-il}{2\pi^2 a v} \frac{1}{H_1^{(1)}(\rho_0 a) - \sqrt{\frac{b}{a}} H_1^{(1)}(\rho_0 b)} \cdot \frac{P_\nu(u) - P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}. \quad (23)$$

При  $b \rightarrow \infty$  эти дисперсионные уравнения переходят в уравнения для обычного кольцевого волновода (см., например, [2]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 1962.
2. З. С. Агранович, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXIV, вып. 11, 1964.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С ДИЭЛЕКТРИКОМ

С. С. Третьякова

Вопрос о распространении электромагнитных волн в кольцевых волноводах с диэлектриком вызывает интерес, поскольку в последнее время кольцевые волноводы находят широкое применение в различных областях техники сверхвысоких частот. Примером может служить использование их в качестве волноводных фильтров в линиях передач сверхвысоких частот, ускоряющих систем в линейных ускорителях, а также периодических структур в приборах, использующих эффект Вавилова — Черенкова.

Поскольку в практических устройствах кольцевой волновод изготавливается в виде системы колец, нанесенных на диэлектрический стержень или находящихся в диэлектрическом канале, важно выяснить влияние диэлектрической среды на характеристики кольцевого волновода. Особый интерес должен представлять случай оптически активных сред.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим кольцевой волновод (рис. 1 а, б), состоящий из периодической системы металлических идеально проводящих колец, изолированных друг от друга. Внутри или вне кольцевого волновода помещен

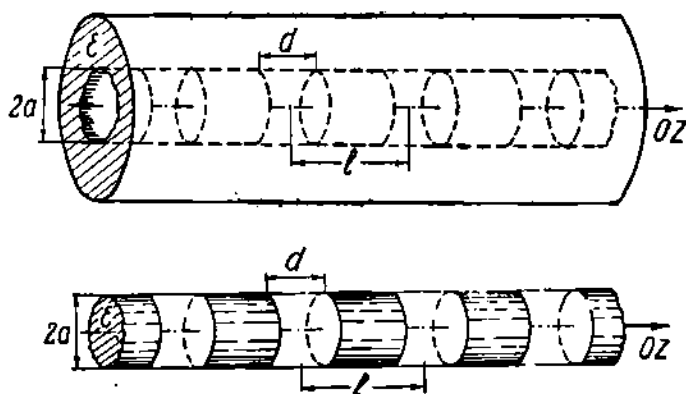


Рис. 1а,б

изотропный диэлектрик с произвольной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Кольца предполагаются бесконечно тонкими. Вводя цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , будем искать те волны, которые могут распространяться в данной системе в направлении оси  $z$ . Благодаря аксиальной симметрии системы рассматриваются только решения, в которых

зависимость по  $\varphi$  определяется множителем  $e^{in\varphi}$ . Периодичность системы приводит к тому, что поля можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} \cdot e^{ih_0 z} \sum_m \vec{E}_m(r) e^{\frac{2\pi m}{l} z} \cdot e^{-i\omega t},$$

$$\vec{H}(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} \cdot e^{ih_0 z} \sum_m \vec{H}_m(r) e^{\frac{2\pi m}{l} z} \cdot e^{-i\omega t},$$

где вектор-функции  $\vec{E}_m(r)$ ,  $\vec{H}_m(r)$  для  $r < a$  и  $r > a$  выражаются через функции Бесселя и Ханкеля. Более подробно рассмотрим случай, когда диэлектрик заполняет область  $r > a$ , а для расположения диэлектрика внутри кольцевого волновода приведем лишь конечные результаты.

Из решения уравнений Максвелла составляющие поля находим в следующем виде:

$$r < a$$

$$E_{zm}(r) = \alpha_m \rho_m^2 J_n(\rho_m r),$$

$$E_{rm}(r) = \alpha_m i h_m \rho_m J'_n(\rho_m r) - \beta_m \frac{kn}{r} J_n(\rho_m r),$$

$$E_{\varphi m}(r) = -\alpha_m \frac{h_m n}{r} J_n(\rho_m r) - \beta_m i k \rho_m J'_n(\rho_m r),$$

$$H_{zm}(r) = \beta_m \rho_m^2 J_n(\rho_m r),$$

$$H_{rm}(r) = \alpha_m \frac{kn}{r} J_n(\rho_m r) + \beta_m i h_m \rho_m J'_n(\rho_m r),$$

$$H_{\varphi m}(r) = \alpha_m i k \rho_m J'_n(\rho_m r) - \beta_m \frac{h_m n}{r} J_n(\rho_m r);$$

$$r > a$$

$$E_{zm}(r) = \tilde{\alpha}_m \rho_m'^2 H_n^{(1)}(\rho_m' r),$$

$$E_{rm}(r) = \tilde{\alpha}_m i h_m \rho_m' H_n^{(1)'}(\rho_m' r) - \tilde{\beta}_m \frac{kn}{r} H_n^{(1)}(\rho_m' r),$$

$$E_{\varphi m}(r) = -\tilde{\alpha}_m \frac{h_m n}{r} H_n^{(1)}(\rho_m' r) - \tilde{\beta}_m i k \rho_m' H_n^{(1)'}(\rho_m' r),$$

$$H_{zm}(r) = \tilde{\beta}_m \rho_m'^2 H_n^{(1)}(\rho_m' r),$$

$$H_{rm}(r) = \tilde{\alpha}_m \frac{kn}{r} H_n^{(1)}(\rho_m' r) + \tilde{\beta}_m i h_m \rho_m' H_n^{(1)'}(\rho_m' r),$$

$$H_{\varphi m}(r) = \tilde{\alpha}_m i k \rho_m' H_n^{(1)'}(\rho_m' r) - \tilde{\beta}_m \frac{h_m n}{r} H_n^{(1)}(\rho_m' r),$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ ;  $\rho_m = \sqrt{k^2 - h_m^2}$ ;  $h_m = h_0 + \frac{2\pi m}{l}$ ;  $\rho_m' = \sqrt{k^2 \epsilon - h_m^2}$ .

Подчиняя компоненты поля точным граничным условиям на периоде структуры, получим соотношения между коэффициентами  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\tilde{\alpha}_m$ ,  $\tilde{\beta}_m$ :

$$\tilde{\alpha}_m = \alpha_m \frac{\rho_m^2 J_n(\rho_m a)}{\rho_m'^2 H_n^{(1)'}(\rho_m' a)}$$

$$\tilde{\beta}_m = \alpha_m \frac{i h_m n}{k \rho_m a} \left( 1 - \frac{\rho_m^2}{\rho_m'^2} \right) \frac{J_n(\rho_m a)}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)} + \beta_m \frac{\rho_m}{\rho_m'} \frac{J'_n(\rho_m a)}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)}$$

и систему уравнений для определения коэффициентов  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ :

$$\begin{aligned} & \sum_m \alpha_m \rho_m^2 J_n(\rho_m a) e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}); \\ & -n \sum_m \alpha_m h_m J_n(\rho_m a) e^{ihmz} + ika \sum_m \beta_m \rho_m J'_n(\rho_m a) = 0 \quad (\text{металл}); \\ & n \sum_m \alpha_m \frac{h_m}{\rho_m} \frac{(\rho_m'^2 - \rho_m^2)}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)} J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) e^{ihmz} + \\ & + ika \sum_m \beta_m \frac{\rho_m^2}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)} \left[ J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) - \frac{\rho_m'}{\rho_m} J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) \right] \times \\ & \quad \times e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}); \\ & ika \sum_m \alpha_m \frac{\rho_m}{H_n^{(1)}(\rho_m' a)} \left[ J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) - \frac{\rho_m \epsilon}{\rho_m} J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{n^2 h_m^2}{k^2 a^2 \rho_m \rho_m'} \left( 1 - \frac{\rho_m^2}{\rho_m'^2} \right) \frac{H_n^{(1)}(\rho_m' a)}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)} J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) \right] e^{ihmz} + \\ & + n \sum_m \beta_m \frac{h_m}{H_n^{(1)'}(\rho_m' a)} \left[ J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) - \frac{\rho_m}{\rho_m'} J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) \right] \times \\ & \quad \times e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}). \end{aligned}$$

Займемся теперь решением полученной системы четырех уравнений, выполняющихся на разных частях периода.

Введем безразмерные параметры  $\xi = \frac{2\pi}{l} z$ ;  $\nu = \frac{h_0 l}{2\pi}$ ;  $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$ ;  $x = \frac{kl}{2\pi}$ . Тогда

$$h_m = \frac{2\pi}{l} (\nu + m); \quad \rho_m a = \frac{1}{\Delta} \sqrt{x^2 - (\nu + m)^2}; \quad \rho_m' a = \frac{1}{\Delta} \sqrt{x^2 \epsilon - (\nu + m)^2}.$$

При  $|m| \rightarrow \infty$   $\rho_m a = \frac{i}{\Delta} (\nu + m) \frac{|m|}{m} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\} = \rho_m' a$ .

Используя асимптотические приближения функций Бесселя при  $|m| \rightarrow \infty$ , найдем, что

$$\begin{aligned} J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) &= \frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{i(\nu+m)} \frac{|m|}{m} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\}, \\ J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) &= \frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{i(\nu+m)} \frac{|m|}{m} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

и величины

$$\begin{aligned} \delta_m &= 1 - \frac{J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) \cdot \Delta \rho_m a}{J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) - \frac{\rho_m}{\rho_m'} J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a)} \cdot \frac{1}{\nu + m} \frac{|m|}{m} \\ \chi_m &= 1 - \frac{J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho_m' a) \frac{\rho_m \epsilon}{\rho_m'} - J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a)}{J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a)} \frac{\nu + \bar{m}}{(1 + \epsilon) \Delta \rho_m' a} \frac{|m|}{m} \end{aligned}$$

при  $|m| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, как  $1/m^2$ . Обозначая

$$a_m = x_m \rho_m^2 J_n(\rho_m a),$$

$$\begin{aligned} b_m &= \alpha_m \frac{nh_m}{ika H_n^{(1)}(\rho_m' a)} \cdot \frac{\rho_m'^2 - \rho_m^2}{2i\rho_m'} \cdot J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) + \beta_m \frac{\rho_m^2}{2iH_n^{(1)}(\rho_m' a)} \times \\ & \quad \times \left[ J_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) - \frac{\rho_m'}{\rho_m} J'_n(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho_m' a) \right]. \end{aligned}$$

получим

$$\sum_m a_m e^{i(\nu+m)\xi} = 0 \text{ (металл);}$$

$$\sum_m \left( -\frac{n\Delta}{x} \frac{\nu+m}{x^2 - (\nu+m)^2} a_m + \frac{1-\delta_m}{\nu+m} \frac{|m|}{m} b_m \right) e^{i(\nu+m)\xi} = \sum_m a_m \Phi_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} \text{ (металл);}$$

$$\sum_m b_m e^{i(\nu+m)\xi} = 0 \text{ (щель);}$$

$$\sum_m \left( -\frac{n\Delta}{x} \frac{\nu+m}{x^2 - (\nu+m)^2} b_m + \frac{1-\gamma_m}{\nu+m} \frac{|m|}{m} a_m \right) e^{i(\nu+m)\xi} =$$

$$= \sum_m a_m K_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} + \sum_m b_m L_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} \text{ (щель),}$$

где  $\Phi_{mn} = \frac{n\Delta x}{\nu+m} \frac{(\xi-1)(1-\delta_m)}{x^2 - (\nu+m)^2} \frac{H_n^{(1)}(\rho'_m a)}{H_n^{(1)}(\rho'_m a)}$ ;

$$K_{mn} = \frac{n^2 \Delta^2 (\xi-1)}{x^2 - (\nu+m)^2} \frac{1}{\nu+m} \frac{|m|}{m} \frac{H_n^{(1)}(\rho'_m a)}{H_n^{(1)'}(\rho'_m a)} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{x\xi - (\nu+m)^2}{x^2 - (\nu+m)^2} (1-\delta_m) \frac{J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho'_m a)}{2i J_n'(\rho_m a)} - \frac{\rho_m}{\rho'_m} \frac{J_n'(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho'_m a)}{H_n^{(1)'}(\rho'_m a)} \right\};$$

$$L_{mn} = -\frac{n\Delta}{x} \frac{\nu+m}{x^2 - (\nu+m)^2} \left\{ 1 - (1-\delta_m) \frac{J_n(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho'_m a) - \frac{\rho_m}{\rho'_m} J_n'(\rho_m a) H_n^{(1)}(\rho'_m a)}{2i J_n'(\rho_m a) H_n^{(1)'}(\rho'_m a)} \right\}.$$

Системы уравнений, подобные этой, хорошо изучены и могут быть решены путем сведения их к задаче Римана — Гильберта с помощью метода, детально изложенного в работах [1]; [3]. Опуская рассмотрение задачи Римана — Гильберта, приведем окончательное решение ее в виде однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно  $a_m, b_m, c_1, c_2$ :

$$\sum_k \left\{ a_k \left[ \left( \chi_k \frac{|k|}{k} + (\nu+k) K_{kn} \right) V_m^k - \delta_{mk} \right] + b_k (\eta_k + (\nu+k) L_{kn}) V_m^k \right\} +$$

$$+ 2c_1 R_m = 0;$$

$$\sum_k a_k \frac{|k|}{k} \left( \tilde{V}_{[0]}^k - \frac{1}{\nu+k} \right) \left[ \chi_k - \frac{n\Delta}{x} \eta_k + (\nu+k) \left( \frac{|k|}{k} K_{kn} - \frac{n\Delta}{x} \Phi_{kn} \right) \right] +$$

$$+ \sum_k b_k \left( \tilde{V}_{[0]}^k - \frac{1}{\nu+k} \right) \left( \eta_k - \frac{n\Delta}{x} \delta_k + (\nu+k) L_{kn} \right) + 2C_1 \tilde{R}_{[1]} + \frac{n\Delta}{x} 2C_2 \tilde{R}_{[2]} = 0;$$

$$\sum_k \left\{ a_k \left[ -(\eta_k + (\nu+k) \Phi_{kn}) \left( \frac{|k|}{k} V_m^k - \delta_{mk} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + b_k \left[ -\delta_k V_m^k - (1-\delta_k) \frac{|k|}{k} \delta_{mk} \right] \right\} + 2C_2 R_m = 0 \tag{1}$$

$$\sum_k a_k V_{[0]}^k \left[ \frac{n\Delta}{x} \chi_k \frac{|k|}{k} - \eta_k \frac{|k|}{k} + (\nu+k) \left( \frac{n\Delta}{x} K_{kn} - \frac{|k|}{k} \Phi_{kn} \right) \right] +$$

$$+ \sum_k b_k V_{[0]}^k \left[ \frac{n\Delta}{x} \eta_k - \delta_k + (\nu+k) L_{kn} \right] + 2C_2 R_{[0]} + \frac{n\Delta}{x} 2C_1 R_{[0]} = 0,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где величины  $V_m^k$ ,  $R_m$  определяются через функции Лежандра от аргумента  $u = \cos \frac{\pi d}{l}$  (см. [1]),  $\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$ ,  $\eta_k = \frac{n\Delta x}{x^2 - (\nu + k)^2}$ ,

$$R_{[\nu]} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{R_m}{\nu + m} = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} P_{\nu-1}(u);$$

$$\tilde{R}_{[\nu]} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|m|}{m} \frac{R_m}{\nu + m} = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} P_{\nu-1}(-u);$$

$$V_{[\nu]}^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{V_m^k}{\nu + m} = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \cdot \frac{\nu-1}{\nu+k} [P_{\nu-1}(u) P_{k+1}(u) - P_{\nu-2}(u) P_k(u)];$$

$$V_{[\nu]}^k - \frac{1}{\nu+k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|m|}{m} \frac{V_m^k}{\nu + m} = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \frac{\nu-1}{\nu+k} [P_{\nu-1}(-u) P_{k+1}(-u) + P_{\nu-2}(-u) P_k(-u)].$$

Равенство нулю определителя этой системы и является точным дисперсионным уравнением для несимметричных волн, распространяющихся в кольцевом волноводе, помещенном в диэлектрическую среду.

Поскольку система уравнений бесконечная, то дисперсионное уравнение представляется бесконечным определителем. Однако элементы определителя в качестве множителя содержат  $\delta_m$  и  $\chi_m$ , которые при  $|m| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю как  $1/m^2$ . Это дает возможность ограничить определитель и пользоваться в расчетах конечным числом членов, которое зависит от требуемой точности.

## 2. Случай симметричных волн

Для случая симметричных волн ( $n = 0$ ) в кольцевом волноводе можно выделить два типа волн, аналогичных  $E$ - и  $H$ - волнам в сплошном волноводе. Математически это приводит к разделению системы уравнений (1), после подстановки  $n = 0$ , на две независимых системы, одна из которых описывает распространение  $E$ -волн в кольцевом волноводе, а другая —  $H$ -волн. Условие существования нетривиального решения каждой из них дает дисперсионные уравнения для  $E$ - и  $H$ -волн соответственно. В простейшем случае нулевого приближения  $\delta_m$ ,  $\chi_m = 0$  при  $m \neq 0$  (что справедливо для  $x < 1$ ), и дисперсионные уравнения имеют следующий вид.

$E$ -волны:

$$J_0(\rho_0 a) = \frac{\frac{\rho_0' a \cdot \epsilon}{\rho_0' a} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)'}(\rho_0' a) - J_0'(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0' a)}{H_0^{(1)}(\rho_0' a) \rho_0 a (1 + \epsilon) \Delta} \cdot \nu \frac{P_\nu(-u) + P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u) - P_{\nu-1}(-u)}; \quad (2)$$

$H$ -волны:

$$J_1(\rho_0 a) = \frac{J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)'}(\rho_0' a) - \frac{\rho_0' a}{\rho_0' a} J_0'(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0' a)}{2\nu H_1^{(1)}(\rho_0 a)} \Delta \rho_0 a \cdot \frac{P_\nu(u) - P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}, \quad (3)$$

где  $P_\nu(u)$  — функции Лежандра от  $u = \cos \pi d/l$ .

Неизвестная постоянная распространения  $\nu = \nu' + i\nu''$  входит в аргумент функций Бесселя и Ханкеля и в индекс функций Лежандра. Трансцендентные уравнения подобного рода легко решаются с помощью электронно-вычислительных машин.



В случае длинноволнового приближения уравнения (2) и (3) несколько упрощаются ( $v \ll 1$ ).

*E*-волны:

$$J_0(\rho_0 a) = \frac{\frac{\rho_0 a \cdot \epsilon}{\rho_0' a} J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)'}(\rho_0' a) - J_0'(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0' a)}{\Delta (1 + \epsilon) \rho_0 a H_0^{(1)}(\rho_0' a)} \frac{1}{2 \ln \sin \frac{\pi d}{2l}}; \quad (4)$$

*H*-волны:

$$J_1(\rho_0 a) = \frac{J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0' a) - \frac{\rho_0' a}{\rho_0 a} J_0'(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0' a)}{2H_1^{(1)}(\rho_0' a)} \rho_0 a \cdot \Delta \ln \cos \frac{\pi d}{2l}. \quad (5)$$

Если в этих уравнениях положить  $\epsilon = 1$  и  $d = l - 2b$  ( $2b$  — ширина кольца), то (4) и (5) можно записать в таком виде.

*E*-волны:

$$J_0(\rho_0 a) = \frac{ia}{l(\rho_0 a)^2} \cdot \frac{1}{H_0^{(1)}(\rho_0 a) \ln \cos \frac{\pi b}{l}}; \quad (6)$$

*H*-волны:

$$J_1(\rho_0 a) = \frac{-il \ln \sin \frac{\pi b}{l}}{\pi^2 a H_1^{(1)}(\rho_0 a)}, \quad (7)$$

что в точности совпадает с дисперсионными уравнениями для кольцевого волновода, полученными в работе [2].

Если диэлектрик находится внутри кольцевого волновода, то дисперсионные уравнения для симметричных *E*- и *H*-волн в нулевом приближении имеют вид, аналогичный (2) и (3).

*E*-волны:

$$J_0(\rho_0' a) = \frac{J_0'(\rho_0' a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) - \frac{\rho_0' a}{\rho_0 a \epsilon} J_0(\rho_0' a) H_0^{(1)'}(\rho_0 a)}{\rho_0' a H_0^{(1)}(\rho_0 a) (1 + \epsilon)} \frac{\epsilon P_\nu(-u) + P_\nu(u)}{2\Delta P_{\nu-1}(-u) - P_\nu(-u)}.$$

*H*-волны:

$$J_1(\rho_0' a) = \frac{J_0(\rho_0' a) H_0^{(1)'}(\rho_0 a) - \frac{\rho_0 a}{\rho_0' a} J_0'(\rho_0' a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{H_1^{(1)}(\rho_0 a)} \frac{\Delta \cdot \rho_0' a P_\nu(u) - P_{\nu-1}(u)}{2\nu P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 1962.
2. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1958.
3. З. С. Агранович, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIV, вып. 11, 1964.

## ДВОЙНЫЕ РАВНОЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНОВОДНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

В. В. Щербак

В настоящей работе рассмотрены емкостные и индуктивные препятствия, состоящие из идентичных одиночных препятствий. Такие препятствия назовем равнощелевыми.

Здесь, как и в работах [1, 2], метод Римана — Гильберта позволяет получить решение задачи, пригодное в широком диапазоне частот.

Заметим, что в данной работе, как и в [1], в случае емкостных нагрузок поля разлагаются по базису  $H_{n,m}^x$  и  $E_{n,m}^x$  волн, у которых тождественно равна нулю составляющая поля соответственно  $E_x$  или  $H_x$  (ось  $Ox$  — параллельна широкой стенке волновода). Для обычных  $TE$ - и  $TM$ -волн такие предположения делаются относительно составляющих поля, параллельных оси волновода  $Oz$ . Поля  $x$ -поляризованных и  $z$ -поляризованных волн линейно связаны друг с другом, а в случае отсутствия вариаций по  $y$  ( $m=0$ ) совпадают. Принятое поляризационное деление наиболее естественно для дифракционных задач. В тексте индекс  $x$  в обозначении  $H_{n,0}^x$ -волн, совпадающих с обычными  $TE_{n,0}$ -волнами, опущен (а для  $H_{n,m}^x$  — нет). В случае индуктивных нагрузок оперируем с  $y$ -поляризованными волнами.

### § 1. Двойная равнощелевая несимметричная емкостная полоска

1. Пусть в прямоугольном волноводе на расстоянии  $r$  друг от друга находятся две одинаковые несимметричные емкостные полоски (рис. 1,а). При падении (со стороны  $-z$ ) на это препятствие волны  $H_{p,0}$  возбуждается сложное дифракционное поле, которое можно представить в виде суммы  $H_{p,n}^x$ -волн ( $p$  — фиксированное целое,  $n = 0, 1, \dots$ ). При этом в области I ( $z > 0$ ) имеем падающую  $H_{p,0}$ -волну и сумму отраженных, в области II ( $0 > z > -r$ ) — сумму прямых и сумму обратных волн, в области III ( $z < -r$ ) — сумму прошедших волн. В таком случае поля в трех областях, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E_x^I &= 0; \quad H_x^I = (e^{-i\gamma_{p,0}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\gamma_{p,n}z + i h_n y}) (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}); \\
 E_y^I &= \left( \frac{k}{\gamma_{p,0}} e^{-i\gamma_{p,0}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{k\gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{i\gamma_{p,n}z + i h_n y} \right) (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}); \\
 H_y^I &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\beta_p h_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{i\gamma_{p,n}z + i h_n y} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x}); \\
 H_z^I &= \left( \frac{\beta_p}{\gamma_{p,0}} e^{-i\gamma_{p,0}z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\beta_p \gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{i\gamma_{p,n}z + i h_n y} \right) (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x});
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$E_z^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{kh_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{i\gamma_{p,n}z + ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x});$$

$$E_x^2 = 0; H_x^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-i\gamma_{p,n}z} + d_n e^{i\gamma_{p,n}(z+r)}) e^{ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x});$$

$$E_y^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-i\gamma_{p,n}z} - d_n e^{i\gamma_{p,n}(z+r)}) \frac{k\gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x});$$

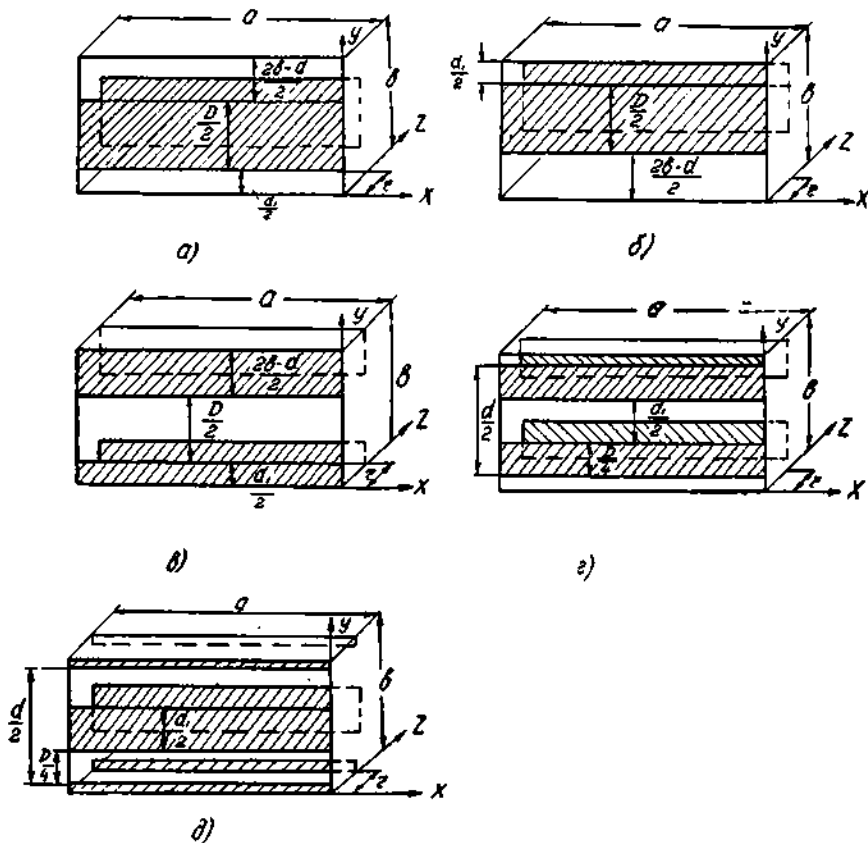


Рис. 1. Двойные емкостные равнощелевые несимметричные и эквивалентные им сложные симметричные преплетствия.

$$H_y^2 = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-i\gamma_{p,n}z} + d_n e^{i\gamma_{p,n}(z+r)}) \frac{\beta_p h_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{ih_n y} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x}); \quad (2)$$

$$H_z^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-i\gamma_{p,n}z} - d_n e^{i\gamma_{p,n}(z+r)}) \frac{\beta_p \gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{ih_n y} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x});$$

$$E_z^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-i\gamma_{p,n}z} + d_n e^{i\gamma_{p,n}(z+r)}) \frac{kh_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}).$$

$$\begin{aligned}
 E_x^3 &= 0; \quad H_x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i\gamma_{p,n}(z+r) + ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}); \\
 E_y^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{k\gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{-i\gamma_{p,n}(z+r) + ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}); \\
 H_y^3 &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{g_p h_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{-i\gamma_{p,n}(z+r) + ih_n y} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x}); \\
 H_z^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{g_p \gamma_{p,n}}{\gamma_{p,0}^2} e^{-i\gamma_{p,n}(z+r) + ih_n y} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x}); \\
 E_z^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{kh_n}{\gamma_{p,0}^2} e^{-i\gamma_{p,n}(z+r) + ih_n y} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

При этом в силу условия непрерывности  $E_y$  при  $z=0$  и  $z=-r$  выполняются соотношения

$$1 - a_0 = c_0 - d_0 e_{p,0}; \quad -a_n = c_n - d_n e_{p,n}; \quad b_n = c_n e_{p,n} - d_n. \tag{4}$$

В этих выражениях обозначено

$$\gamma_{p,n} = \sqrt{k^2 - g_p^2 - h_n^2}; \quad h_n = \frac{\pi}{b} n; \quad g_p = \frac{\pi}{a} p; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad e_{p,n} = e^{i\gamma_{p,n} r}. \tag{5}$$

Заметим также, что поля в системе рис. 1, б, зеркальной по отношению к данной (рис. 1, а), в силу свойств симметрии совпадают с (1)–(4). Используя граничные условия, которые имеют место для исследуемых систем (рис. 1, а, б) при  $z=0$  и при  $z=-r$  соответственно на окнах и на полоске, получим уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ihn y} &= -1 & |y| < \frac{d_1}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < b; \end{aligned} \right. \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{ihn y} &= 0 & |y| < \frac{d_1}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < b; \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n - d_n e_{p,n}) \frac{\gamma_{p,n}}{\gamma_p} e^{ihn y} &= 0 & \frac{d_1}{2} < |y| < \frac{d}{2}; \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e_{p,n} - d_n) \frac{\gamma_{p,n}}{\gamma_p} e^{ihn y} &= 0 & \frac{d_1}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Воспользуемся тем, что уравнения (6) и (7), а также (8) и (9) выполняются в одинаковых областях изменения  $y$ . Складывая и вычитая почленно уравнение (6) с уравнением (7), а также (8) с (9), получим две независимые пары уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n - c_n) e^{ihn y} + 1 &= 0 & |y| < \frac{d_1}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < b; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n - c_n) (1 + e_{p,n}) \frac{\gamma_{p,n}}{\gamma_p} e^{ihn y} &= 0 & \frac{d_1}{2} < |y| < \frac{d}{2}; \end{aligned} \right. \tag{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n + c_n) e^{ihn\gamma} - 1 = 0 \quad |y| < \frac{d_1}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < b; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n + c_n) (1 - e_{p,n}) \frac{\gamma_{p,n}}{\gamma_p} e^{ihn\gamma} = 0 \quad \frac{d_1}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \end{array} \right. \quad (11)$$

2. Системы уравнений, сходные с (10) и (11), подробно исследованы в [1, 3, 4]. Поэтому мы ограничимся лишь краткими замечаниями по поводу их решения.

Если ввести обозначения

$$x_n = (d_n - c_n) n \quad (n \neq 0); \quad \varepsilon'_{p,n} = 1 + i \frac{\gamma_{p,n}}{|\hbar_n|} (1 + e_{p,n}) \quad (n \neq 0); \quad (12)$$

$$\delta = \frac{\pi d}{2b}; \quad \delta_1 = \frac{\pi d_1}{2b}; \quad x = \frac{2b}{\lambda}; \quad q = \frac{2b}{\lambda g} = x \frac{\gamma_{p,v}}{k}; \quad \varphi = \frac{\hbar_n}{n} y, \quad (13)$$

(здесь  $\lambda_g$  — длина падающей  $H_{p,0}$ -волны в волноводе), то уравнения (10) после соответствующих преобразований принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \delta_1, \quad \delta < |\varphi| < \pi; \\ \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = iq(1 - e_{p,0})[(d_0 - c_0 + 1) - 1] + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{p,n} e^{in\varphi}, \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\delta_1 < |\varphi| < \delta;$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{x_n}{n} = -(d_0 - c_0 + 1); \quad \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} = -(d_0 - c_0 + 1). \quad (15)$$

Уравнения (14) образуют задачу Римана — Гильберта. Решение этой задачи может быть представлено в виде контурного интеграла работы [5], с помощью которого для коэффициентов  $x_n$  получаем бесконечную квази-регулярную систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = iq(1 + e_{p,0})(d_0 - c_0) V_m^{0c} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{p,n} (V_m^{nc} + V_m^{-nc}) + \\ \quad + \lambda_2 R_m^c + \lambda_1 R_{m-1}^c; \quad m = 1, 2 \dots \infty \\ 0 = iq(1 + e_{p,0})(d_0 - c_0) V_0^{0c} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{p,n} (V_0^{nc} + V_0^{-nc}) + \\ \quad + \lambda_2 R_0^c + \lambda_1 R_{-1}^c; \\ -(d_0 - c_0 + 1) = iq(1 + e_{p,0})(d_0 - c_0) V_0^{0c} + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{p,n} (V_0^{nc} + V_0^{-nc}) + \lambda_2 R_{0,0}^c + \lambda_1 R_{0,1}^c; \\ -(d_0 - c_0 + 1) = iq(1 + e_{p,0})(d_0 - c_0) W_0^{0c} + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{p,n} (W_0^{nc} + W_0^{-nc}) + \lambda_2 \tilde{R}_{0,0}^c + \lambda_1 \tilde{R}_{0,1}^c, \end{array} \right. \quad (16)$$

где коэффициенты  $V_m^{nc}$ ;  $R_m^c$ ;  $V_0^{nc}$ ;  $W_0^{nc}$ ;  $R_{\alpha, k}^c$ ;  $\tilde{R}_{\alpha, k}^c$ , зависящие от параметров распределения  $u = \cos \delta$ ,  $v = \cos \delta_1$ , те же, что и в § 1 работы [1].

Решая (16) методом редукции, имеем

$$d_0 - c_0 + 1 = \frac{iq\Delta'(1 + e_{p,0})}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})};$$

$$+ d_{-n} - c_{-n} = d_n - c_n = \frac{1}{n} \frac{iqD^{(n)}(1 + e_{p,0})}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})}, \quad n > 0$$
(17)

где

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{\alpha,0}^c & \tilde{R}_{\alpha,1}^c & W_0^{nc} & (W_0^{1c} + W_0^{-1c}) \varepsilon'_{p,1} & \dots & (W_0^{Nc} + W_0^{-Nc}) \varepsilon'_{p,N} \\ R_{\alpha,0}^c & R_{\alpha,1}^c & V_0^{nc} & (V_0^{1c} + V_0^{-1c}) \varepsilon'_{p,1} & \dots & (V_0^{Nc} + V_0^{-Nc}) \varepsilon'_{p,N} \\ R_0^c & R_{-1}^c & V_0^{nc} & (V_0^{1c} + V_0^{-1c}) \varepsilon'_{p,1} & \dots & (V_0^{Nc} + V_0^{-Nc}) \varepsilon'_{p,N} \\ R_1^c & R_0^c & V_1^{nc} & (V_1^{1c} + V_1^{-1c}) \varepsilon'_{p,1} - 1 & \dots & (V_1^{Nc} + V_1^{-Nc}) \varepsilon'_{p,N} \\ R_N^c & R_{N-1}^c & V_N^{nc} & (V_N^{1c} + V_N^{-1c}) \varepsilon'_{p,1} & \dots & (V_N^{Nc} + V_N^{-Nc}) \varepsilon'_{p,N} - 1 \end{vmatrix}$$
(18)

а  $D^{(n)}$  — сумма алгебраических дополнений элементов в  $\Delta'$ , содержащих  $W_0^{nc}$  и  $V_0^{nc}$ .

Заметим, что формулы (17) и (18) для  $(d_0 - c_0 + 1)$  и  $(d_n - c_n)$  получаются из аналогичных выражений (20) и (21) работы [1], если в последних заменить  $\varepsilon_{p,n}$  на  $\varepsilon'_{p,n}$  и  $q$  на  $q(1 + e_{p,0})$ .

Аналогично, вводя для уравнений (11) обозначения

$$y_n = -(c_n + d_n)n \quad (n \neq 0); \quad \varepsilon'_{p,n} = 1 + i \frac{\gamma_{p,n}}{|\tilde{h}_n|} (1 - e_{p,n}) \quad (n \neq 0),$$
(19)

находим решение для  $(c_n + d_n)$  и  $(c_0 + d_0 - 1)$ :

$$-(c_0 + d_0 - 1) = \frac{iq\Delta^*(1 - e_{p,0})}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})}; \quad -(c_{-n} + d_{-n}) = -(c_n + d_n) =$$

$$= \frac{iqD^{(n)}(1 - e_{p,0})}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})} \quad n > 0,$$
(20)

где  $\Delta^*$  получим из  $\Delta'$ , заменив  $\varepsilon'_{p,n}$  на  $\varepsilon''_{p,n}$ .

Решение (19), (20) можно получить из (20), (21) работы [1] при замене  $\varepsilon_{p,n}$  на  $\varepsilon''_{p,n}$  и  $q$  на  $q(1 - e_{p,0})$ .

Воспользовавшись соотношениями (4), по значениям  $c_n$  и  $d_n$  определяем  $a_n$  и  $b_n$ :

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{iq\Delta^*(1 - e_{p,0})^2}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})} + \frac{iq\Delta'(1 + e_{p,0})^2}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})} \right];$$
(21)

$$a_n = \frac{1}{2n} \left[ \frac{iqD^{(n)}(1 - e_{p,0})(1 - e_{p,n})}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})} + \frac{iqD^{(n)}(1 + e_{p,0})(1 + e_{p,n})}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})} \right] \quad (n \neq 0);$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{iq\Delta^*(1 - e_{p,0})^2}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})} - \frac{iq\Delta'(1 + e_{p,0})^2}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})} \right];$$
(22)

$$b_n = \frac{1}{2n} \left[ \frac{iqD^{(n)}(1 - e_{p,0})(1 - e_{p,n})}{D^{(0)} + iq\Delta^*(1 - e_{p,0})} - \frac{iqD^{(n)}(1 + e_{p,0})(1 + e_{p,n})}{D^{(0)} + iq\Delta'(1 + e_{p,0})} \right] \quad (n \neq 0).$$

## 2. Двойные равнощелевые емкостные ленточные препятствия произвольного типа

В предыдущем параграфе показано, что в случае дифракция  $H_{p,0}$  волны на двухслойной неоднородности (рис. 1,а), составленной из несимметричных емкостных полосок, амплитуды  $c_n$  и  $d_n$  волн внутренней области удовлетворяют четырем уравнениям (6)–(9).

При условии идентичности полосок эти уравнения заменяются двумя независимыми парами уравнений, одна из которых (10) определяет разность  $d_n$  и  $c_n$ , а другая (11) — сумму этих величин. При этом окончательные формулы для  $(d_n - c_n)$  и  $(-d_n - c_n)$  получаются из решения для одинарного препятствия путем соответствующих замен.

Если двойное препятствие составлено из одинарных препятствий, у которых распределение лент и щелей иное, чем у системы (рис. 1,а), то такая связь между решениями для двойной неоднородности и соответствующей ей одинарной сохраняется.

Поэтому мы можем воспользоваться результатами, полученными в [1] для одинарных систем.

1. Так, для двойной равнощелевой несимметричной емкостной диафрагмы (рис. 1,б), производя замену параметров малости в формулах (28) [1], получим

$$\begin{aligned} (d_0 - c_0 + 1) &= \frac{iq\bar{\Delta}'(1 + e_{p,0})}{\bar{D}^{(0)} + iq\bar{\Delta}'(1 + e_{p,0})}; \quad (\bar{d}_n - \bar{c}_n) = \\ &= \frac{1}{n} \frac{iq\bar{D}'^{(n)}(1 + e_{p,0})}{\bar{D}^{(0)} + iq\bar{\Delta}'(1 + e_{p,0})}, \quad n \neq 0; \\ -(\bar{c}_0 + \bar{d}_0 - 1) &= \frac{iq\bar{\Delta}''(1 - e_{p,0})}{\bar{D}^{(0)} + iq\bar{\Delta}''(1 - e_{p,0})}; \\ -(\bar{c}_n + \bar{d}_n) &= \frac{1}{n} \frac{iq\bar{D}''^{(n)}(1 - e_{p,0})}{\bar{D}^{(0)} + iq\bar{\Delta}''(1 - e_{p,0})}, \quad n \neq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь определители  $\bar{\Delta}'$  и  $\bar{\Delta}''$  отличаются соответственно от  $\Delta'$  и  $\Delta''$  заменой в них коэффициентов  $V_m^{nc}$ ,  $R_m^c$ ,  $V_\sigma^{nc}$ ,  $W_\sigma^{nc}$ ,  $R_{\sigma k}^c$ ,  $\bar{R}_{\sigma k}^c$  на соответствующие коэффициенты § 2 работы [1].

Так как уравнения (4) справедливы для любых двойных емкостных ленточных препятствий, то с помощью этих соотношений находим из (23) амплитуды  $a_n$  — отраженных и  $b_n$  — прошедших волн.

2. В случае двойного равнощелевого асимметрично о емкостного ленточного препятствия (рис. 2,а) решение имеет вид

$$\begin{aligned} (d_0^{ac} - c_0^{ac} + 1) &= \frac{iq\Delta'^{ac}(1 + e_{p,0})}{D'^{(0)ac} + iq\Delta'^{ac}(1 + e_{p,0})}; \\ (d_n^{ac} - c_n^{ac}) &= \frac{1}{n} \frac{iqD'^{(n)ac}(1 + e_{p,0})}{D'^{(0)ac} + iq\Delta'^{ac}(1 + e_{p,0})}, \quad n \neq 0 \\ - (c_0^{ac} + d_0^{ac} - 1) &= \frac{iq\Delta''^{ac}(1 - e_{p,0})}{D''^{(0)ac} + iq\Delta''^{ac}(1 - e_{p,0})}; \\ - (c_n^{ac} + d_n^{ac}) &= \frac{1}{n} \frac{iqD''^{(n)ac}(1 - e_{p,0})}{D''^{(0)ac} + iq\Delta''^{ac}(1 - e_{p,0})}, \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\Delta'^{ac} = \begin{vmatrix} R_0 V_0^0 (V_0^1 + V_0^{-1}) \epsilon'_{p,1} & \dots & (V_0^N + V_0^{-N}) \epsilon'_{p,N} \\ R_0 V_0^0 (V_0^1 + V_0^{-1}) \epsilon'_{p,1} & \dots & (V_0^N + V_0^{-N}) \epsilon'_{p,N} \\ R_1 V_1^0 [(V_1^1 + V_1^{-1}) \epsilon'_{p,1} - 1] & \dots & (V_1^N + V_1^{-N}) \epsilon'_{p,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_N V_N^0 (V_N^1 + V_N^{-1}) \epsilon'_{p,1} & \dots & [(V_N^N + V_N^{-N}) \epsilon'_{p,N} - 1] \end{vmatrix}, \quad (25)$$

а  $D'_{(n)z}$  — алгебраическое дополнение элемента, содержащего  $V_n^a$ , в  $\Delta'^{ac}$ .  $V_m^a$ ,  $R_m$ ,  $V_n^a$ ,  $R_n$  — коэффициенты из работы [1].

Теперь рассмотрим ряд неоднородностей, решение которых просто связано с рассмотренными выше — (17), (20), (23) и (24).

3. На рис. 2,в изображена двойная симметричная емкостная диафрагма. Из соображений симметрии следует, что на этой неоднородности возбуждаются волны только четного порядка ( $H_{0,2n}$ ). Для амплитуд  $d_{2n}^{cm}$

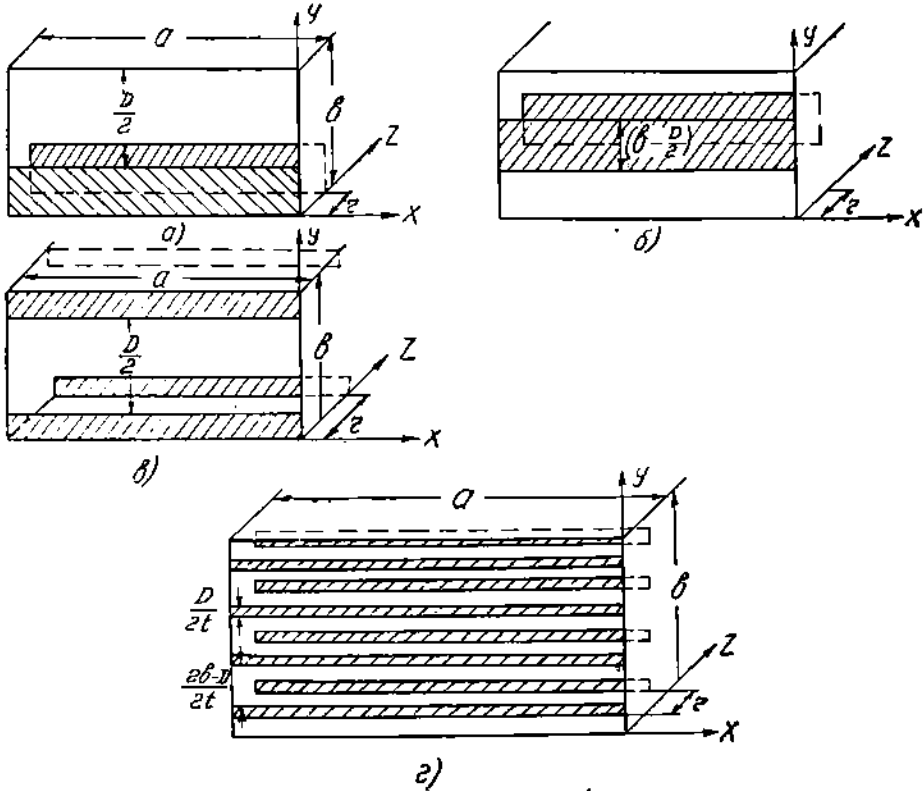


Рис. 2. Асимметричное и различные симметричные двойные емкостные препятствия.

и  $c_{2n}^{cm}$  этих волн решение дается формулами (24), (25) при замене параметра  $x$  (от которого зависят  $\epsilon'_{p,n}$ ,  $\epsilon''_{p,n}$ ,  $e_{p,n}$  и  $q$ ) на  $\frac{x}{2}$ , т. е.

$$(-1)^n d_{2n}^{cm(2x)} = d_n^{ac(x)}; \quad (-1)^n c_{2n}^{cm(2x)} = c_n^{cm(x)}. \quad (26)$$

Решение для двойной симметричной полоски (рис. 2,б) совпадает с решением для неоднородности рис. 2,в с точностью до  $(-1)^n$ .

4. Для двойного  $i$ -ленточного препятствия (рис. 2,г), состоящего из одинаковых равномерно распределенных лент, получаем соотношение, аналогичное (26):

$$(-1)^n d_{2ln}^{i(2lx)} = d_n^{ac(x)}; \quad (-1)^n c_{2ln}^{i(2lx)} = c_n^{ac(x)}; \quad (27)$$

$$d_k^i = c_k^i = 0 \quad (28)$$

при  $k$ , не кратных  $2l$ .



5. Рассмотрим еще симметричные препятствия (рис. 1,з и рис. 1,д). Первое из них эквивалентно препятствию (рис. 1,а) при значении  $x$  в два раза меньшем:

$$(-1)^n \bar{d}_{2n(2x)} = d_n(x); \quad (-1)^n \bar{c}_{2n(2x)} = c_n(x), \quad (29)$$

а второе эквивалентно системе (рис. 1,б), при значении  $x$  в два раза меньшем:

$$(-1)^n \bar{d}_{2n(2x)} = \bar{d}_n(x); \quad (-1)^n \bar{c}_{2n(2x)} = \bar{c}_n(x). \quad (30)$$

### 3. Двойная равнощелевая несимметричная индуктивная диафрагма

1. При падении  $H_{p,0}$ -волны на препятствие (рис. 3,а) поля в трех областях ищем в виде суммы волн  $H_{n,0}$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ):

$$E_y^1 = e^{-i\gamma_p z} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\gamma_{p+n} z + i\beta_{p+n} x};$$

$$H_x^1 = -\frac{\gamma_p}{k} e^{-i\gamma_p z} (e^{i\beta_p x} - e^{-i\beta_p x}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\gamma_{p+n}}{k} e^{i\gamma_{p+n} z + i\beta_{p+n} x}; \quad (31)$$

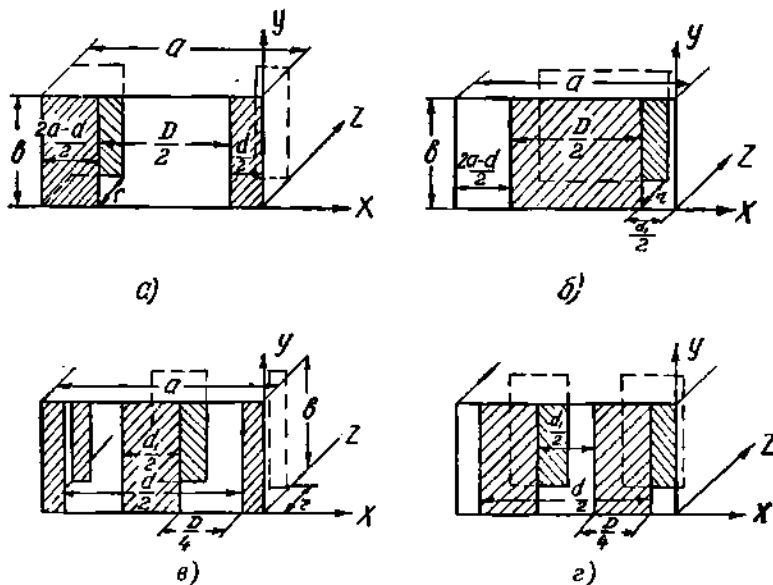


Рис. 3. Двойные равнощелевые несимметричные и сходные с ними сложные симметричные индуктивные препятствия.

$$H_z^1 = \frac{\beta_p}{k} e^{-i\gamma_p z} (e^{i\beta_p x} + e^{-i\beta_p x}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\beta_{p+n}}{k} e^{i\gamma_{p+n} z + i\beta_{p+n} x};$$

$$E_y^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n e^{-i\gamma_{p+n} z} + D_n e^{i\gamma_{p+n} (z+r)}) e^{i\beta_{p+n} x};$$

$$H_x^2 = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n e^{-i\gamma_{p+n} z} - D_n e^{i\gamma_{p+n} (z+r)}) \frac{\gamma_{p+n}}{k} e^{i\beta_{p+n} x}; \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 H_z^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n e^{-\gamma_{p+n} z} + D_n e^{\gamma_{p+n} (z+r)}) \frac{g_{p+n}}{k} e^{i g_{p+n} x}, \\
 E_y^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i \gamma_{p+n} (z+r) + i g_{p+n} x}, \\
 H_x^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{\gamma_{p+n}}{k} e^{-i \gamma_{p+n} (z+r) + i g_{p+n} x}, \\
 H_z^3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{g_{p+n}}{k} e^{-i \gamma_{p+n} (z+r) + i g_{p+n} x},
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 1 + A_0 &= C_0 + D_0 e_p; & -1 + A_{-2p} &= C_{-2p} + D_{-2p} e_p; \\
 A_n &= C_n + D_n e_{p+n} \quad (n \neq 0 - 2p), & B_n &= C_n e_{p+n} + D_n,
 \end{aligned} \tag{34}$$

где обозначено

$$\gamma_{p+n} = \sqrt{k^2 - g_{p+n}^2}; \quad g_{p+n} = \frac{\pi}{a} (p+n); \quad e_{p+n} = e^{\gamma_{p+n} r}. \tag{35}$$

Поля в системе, зеркальной по отношению к данной, совпадают с (31) — (34).

Воспользовавшись условиями непрерывности  $H_x$  на окнах и равенства нулю  $E_y$  на полосках при  $z=0$  и  $z=-r$ , получим уравнения

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n + D_n e_{p+n}) e^{i g_{p+n} x} &= 0, & |x| < \frac{d_1}{2}; & \frac{d}{2} < |x| < a \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (D_n + C_n e_{p+n}) e^{i g_{p+n} x} &= 0, & |x| < \frac{d_1}{2}; & \frac{d}{2} < |x| < a \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\gamma_{p+n}}{\gamma_p} e^{i g_{p+n} x} &= e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}, & \frac{d_1}{2} < |x| < \frac{d}{2} \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{\gamma_{p+n}}{\gamma_p} e^{i g_{p+n} x} &= 0, & \frac{d_1}{2} < |x| < \frac{d}{2}.
 \end{aligned} \right. \tag{36}$$

Так как препятствие состоит из одинаковых диафрагм, то (36) можно преобразовать к двум независимым парам уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n + D_n) (1 + e_{p+n}) e^{i g_{p+n} x} &= 0, & |x| < \frac{d_1}{2}; & \frac{d}{2} < |x| < a \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n + D_n) \frac{\gamma_{p+n}}{\gamma_p} e^{i g_{p+n} x} &= e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}, & \frac{d_1}{2} < |x| < \frac{d}{2}
 \end{aligned} \right. \tag{37}$$

и

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - D_n) (1 - e_{p+n}) e^{i g_{p+n} x} &= 0, & |x| < \frac{d_1}{2}; & \frac{d}{2} < |x| < a \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - D_n) \frac{\gamma_{p+n}}{\gamma_p} e^{i g_{p+n} x} &= e^{i g_p x} - e^{-i g_p x}, & \frac{d_1}{2} < |x| < \frac{d}{2}.
 \end{aligned} \right. \tag{38}$$

2. Введем обозначения:

$$X_n = (C_n + D_n)(1 + e_{\rho+n})(n + \rho), \quad n \neq -\rho; \\ \varepsilon'_{\rho+n} = 1 + i \frac{\gamma_{\rho+n}}{|\varepsilon_{\rho+n}|} \frac{1}{1 + e_{\rho+n}}, \quad n \neq -\rho; \quad (39)$$

$$\varepsilon'_{\rho+n} = \begin{cases} \varepsilon'_{\rho+n}, & n \geq 0; \\ 2 - \varepsilon'_{\rho+n}, & n < -\rho; \end{cases} \quad n > -\rho; \quad \varphi = \frac{\beta_{\rho+n}}{\rho+n}; \quad \delta = \frac{\pi d}{2a}; \quad \delta_1 = \frac{\pi d_1}{2a}; \quad (40) \\ x = \frac{2a}{\lambda}; \quad q = \frac{2a}{\lambda_g} = x \frac{\gamma_{\rho}}{k}; \quad \zeta'_{n+\rho} = \frac{|n| \varepsilon'_{n+\rho}}{\varepsilon'_{n+\rho}}.$$

Система (37) в этом случае запишется так:

$$\begin{cases} \sum_{n \neq -\rho} X_n e^{in\varphi} = 0, & |\varphi| < \delta_1; \quad \delta < |\varphi| < \pi; \\ \sum_{n \neq -\rho} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = iq(1 - e^{-2i\rho\varphi}) + \sum_{n \neq -\rho} X_n \frac{|n|}{n} \varepsilon'_{\rho+n} e^{in\varphi}, & \delta_1 < |\varphi| < \delta; \\ \sum_{n \neq -\rho} (-1)^n \frac{X_n}{n+\rho} = 0; & \sum_{n \neq -\rho} \frac{X_n}{n+\rho} = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Решая для этих уравнений задачу Римана-Гильберта, получим бесконечную квазирегулярную систему алгебраических уравнений, откуда

$$(C_0 + D_0) = \frac{1}{\rho} \frac{iq\Delta'}{(1 + e_{\rho})(\varepsilon'_{\rho}\Delta' - D^{(0)})}; \\ -(C_{-n-2\rho} + D_{-n-2\rho}) = (C_n + D_n) = \frac{1}{n+\rho} \frac{iqD'^{(n)}}{(1 + e_{\rho+n})(\varepsilon'_{\rho}\Delta' - D^{(0)})}, \\ n > -\rho, \quad n \neq 0, \quad (42)$$

где

$$\varepsilon'_{\rho}\Delta' = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{\sigma,\rho}^c & \tilde{R}_{\sigma,\rho+1}^c & \varepsilon'_1(\zeta'_1 W_{\sigma,\rho}^{(1-\rho)c} - W_{\sigma,\rho}^{-(1+\rho)c}) & \dots & \varepsilon'_N(\zeta'_N W_{\sigma,\rho}^{(N-\rho)c} - W_{\sigma,\rho}^{-(N+\rho)c}) \\ R_{\sigma,\rho}^c & R_{\sigma,\rho+1}^c & \varepsilon'_1(\zeta'_1 V_{\sigma,\rho}^{(1-\rho)c} - V_{\sigma,\rho}^{-(1+\rho)c}) & \dots & \varepsilon'_N(\zeta'_N V_{\sigma,\rho}^{(N-\rho)c} - V_{\sigma,\rho}^{-(N+\rho)c}) \\ R_{1-\rho}^c & R_{-\rho}^c & [\varepsilon'_1(\zeta'_1 V_{1-\rho}^{(1-\rho)c} - V_{1-\rho}^{-(1+\rho)c}) - \rho_{1-\rho}] & \dots & \varepsilon'_N(\zeta'_N V_{1-\rho}^{(N-\rho)c} - V_{1-\rho}^{-(N+\rho)c}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N-\rho}^c & R_{N-\rho-1}^c & \varepsilon'_1(\zeta'_1 V_{N-\rho}^{(1-\rho)c} - V_{N-\rho}^{-(1+\rho)c}) & \dots & [\varepsilon'_N(\zeta'_N V_{N-\rho}^{(N-\rho)c} - V_{N-\rho}^{-(N+\rho)c}) - \rho_{N-\rho}] \end{vmatrix}, \quad (43)$$

а  $D'^{(n)}$  — алгебраическое дополнение элемента, содержащего  $V_{\sigma,\rho}^{nc}$ , в  $\Delta'$ .

Здесь  $\rho_{n-\rho} = \begin{cases} 1; & n \neq -\rho \\ 0; & n = -\rho \end{cases}$ , а коэффициенты  $V_m^{nc}$ ,  $R_m^c$  и другие определены в работе [2].

Аналогично, вводя обозначения

$$Y_n = (C_n - D_n)(1 - e_{\rho+n})(\rho + n), \quad n \neq -\rho; \\ \varepsilon''_{\rho+n} = 1 + i \frac{\gamma_{\rho+n}}{|\varepsilon_{\rho+n}|} \frac{1}{1 - e_{\rho+n}}, \quad n \neq -\rho, \quad (44)$$

имеем

$$(C_0 - D_0) = \frac{1}{\rho} \frac{iq\Delta^*}{(1 - \epsilon_\rho)(\epsilon_\rho^* \Delta^* - D^{*(0)})};$$

$$-(C_{-n-2\rho} - D_{-n-2\rho}) = (C_n - D_n) = \frac{1}{n + \rho} \frac{jqD^{*(0)}}{(\epsilon_\rho^* \Delta^* - D^{*(0)})},$$

$$n > -\rho, n \neq 0, \quad (45)$$

где определитель  $\Delta^*$  получается из  $\Delta'$  при замене  $\epsilon_{\rho+n}$  на  $\epsilon_{\rho+n}^*$ . Воспользовавшись соотношениями (34), найдем отсюда значения амплитуд  $A_n$  — отраженных и  $B_n$  — прошедших волн.

#### 4. Произвольные двойные равнощелевые индуктивные препятствия

Обратим внимание на то, что решение (42), (43), (45) для двойного препятствия отличается от решения для аналогичного одинарного препятствия заменой в формулах (16), (17) работы [2]  $\epsilon_{\rho+n}$  на  $\epsilon_{\rho+n}$  и  $\epsilon_{\rho+n}^*$  (а  $q$  на  $\frac{q}{1 + \epsilon_\rho}$  и  $\frac{q}{1 + \epsilon_\rho}$ ).

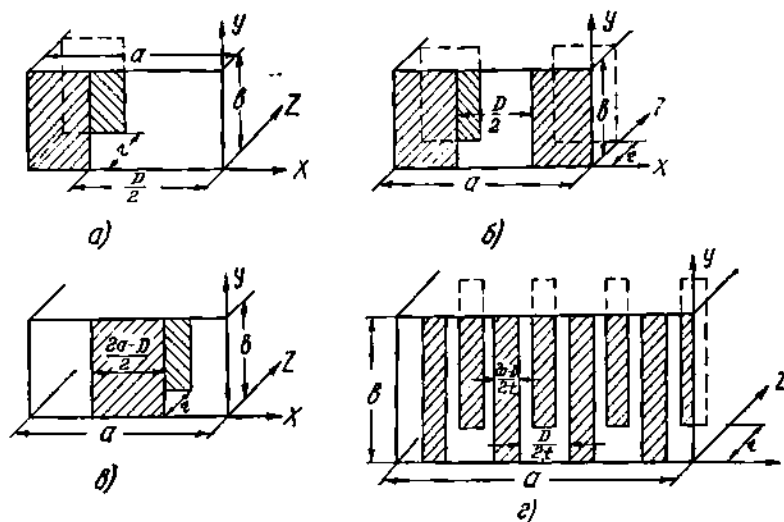


Рис. 4. Асимметричное и различные симметричные индуктивные препятствия.

Эта закономерность сохраняется и для других двойных препятствий, состоящих из одинаковых индуктивных нагрузок. Кроме того, учитываем, что (34) выполняется для любых двойных индуктивных нагрузок. Воспользовавшись этим, получим решения для двойных индуктивных препятствий с помощью известных решений для соответствующих одинарных систем.

1. Для препятствия (рис. 3,б), дополнительно к рассмотренному в § 3, значения амплитуд  $\bar{D}_n, \bar{C}_n$  = волн внутренней области находятся с помощью формул (42), (43), (45) при замене в них коэффициентов  $V_m^{nc}, R_m', V_{\sigma,\rho}^{nc}$  и других соответственно на коэффициенты  $\bar{V}_m^{nc}, \bar{R}_m', \bar{V}_{\sigma,\rho}^{nc}$  (и др.), определенные в работе [2].

2. Амплитуды волн, возникших на двойном асимметричном индуктивном препятствии (рис. 4,а), находим по формулам

$$(C_0 + D_0) = \frac{1}{\rho} \frac{iq\Delta^{ac}}{(1 + \epsilon_\rho)(\epsilon_\rho^* \Delta^{ac} - D^{(0)ac})}; \quad (C_0 - D_0) = \frac{1}{\rho} \frac{iq\Delta^{*ac}}{(1 - \epsilon_\rho)(\epsilon_\rho^* \Delta^{*ac} - D^{(0)ac})}; \quad (46)$$

$$(C_n + D_n) = \frac{1}{\rho + n} \frac{iqD^{(n)ac}}{(1 + \epsilon_{\rho+n})(\epsilon_{\rho+n}^* \Delta^{ac} - D^{(0)ac})}, \quad n > -\rho, \quad n \neq 0;$$

$$(C_n - D_n) = \frac{1}{\rho + n} \frac{iqD^{*(n)ac}}{(1 - \epsilon_{\rho+n})(\epsilon_{\rho+n}^* \Delta^{*ac} - D^{(0)ac})}; \quad -D_{-n-2\rho} = D_n; \quad -C_{-n-2\rho} = C_n, \quad (47)$$

где

$$\Delta^{ac} \epsilon_\rho' = \begin{vmatrix} R_{\sigma, \rho} & \epsilon_1'(\zeta_1' V_{\sigma, \rho}^{1-\rho} - V_{\sigma, \rho}^{-(1+\rho)}) & \dots & \epsilon_N'(\zeta_N' V_{\sigma, \rho}^{N-\rho} - V_{\sigma, \rho}^{-(N+\rho)}) \\ R_{1-\rho} & [\epsilon_1'(\zeta_1' V_{1-\rho}^{1-\rho} - V_{1-\rho}^{-(1+\rho)}) - \rho_{1-\rho}] & \dots & \epsilon_N'(\zeta_N' V_{1-\rho}^{N-\rho} - V_{1-\rho}^{-(N+\rho)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N-\rho} & \epsilon_1'(\zeta_1' V_{N-\rho}^{1-\rho} - V_{N-\rho}^{-(1+\rho)}) & \dots & [\epsilon_N'(\zeta_N' V_{N-\rho}^{N-\rho} - V_{N-\rho}^{-(N+\rho)}) - \rho_{N-\rho}] \end{vmatrix} \quad (48)$$

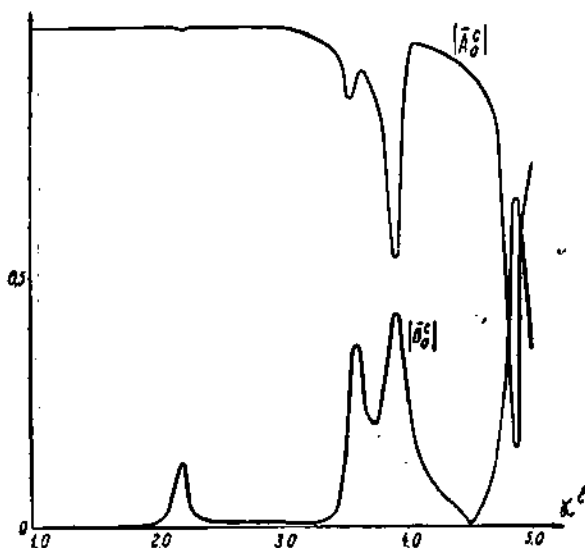


Рис. 5. Зависимость модулей коэффициентов отражения  $|\bar{A}_0^{c,m}|$  и прохождения  $|\bar{B}_0^{c,m}|$  от  $x^l$  для волны  $E_{1,l}^y$ , падающей на двойную симметричную индуктивную полосу при  $\frac{r}{2a} = 0,25$  и половинном коэффициенте заполнения  $|\mu_1 = 0|$ .

Коэффициенты  $V_{\sigma, \rho}^n$ ,  $R_{\sigma, \rho}$ ,  $V_m^n$ ,  $R_m$ , зависящие от  $u_1 = \cos \frac{\pi D}{2a}$ , те же, что и в работе [2].

3. Если на двойную симметричную индуктивную диафрагму (рис. 4,б) падает волна с четным номером  $\rho$ , то решение для этой системы дается формулами (46) — (48) при замене в них  $x$  на  $\frac{x}{2}$  и  $\rho$  на  $\frac{\rho}{2}$ .

Точно такое же решение получается при четном  $p$  для препятствия (рис. 4, в).

При нечетном  $p$  для системы (рис. 4, б) имеем

$$\begin{aligned} (C_0^{\text{см}} + D_0^{\text{см}}) &= \frac{1}{p} \frac{iq\Delta'^{\text{см}}}{(1 + e_p)(\epsilon_p^i \Delta'^{\text{см}} - D'^{(0)\text{см}})}; \quad (C_0^{\text{см}} - D_0^{\text{см}}) = \\ &= \frac{1}{p} \frac{iq\Delta'^{\text{см}}}{(1 - e_p^*)(\epsilon_p^* \Delta'^{\text{см}} - D''^{(0)\text{см}})}; \end{aligned}$$

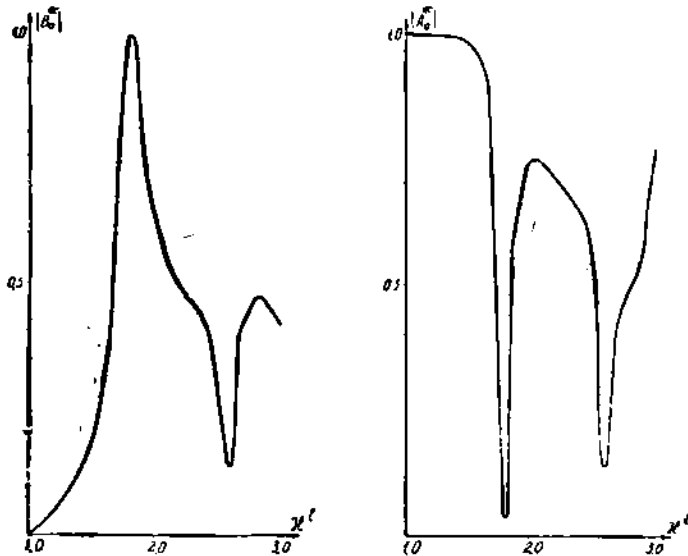


Рис. 6. Зависимость амплитуд  $|A_0^{ac}|$  и  $|B_0^{ac}|$  от  $x'$  для двойной асимметричной индуктивной диафрагмы / случай падения  $E_{1,l}^y$  — волны;  $\frac{r}{2a} = 0,25$ ,  $u_1 = 0$ . Эти же кривые дают зависимость соответствующих амплитуд от  $\frac{x'}{2}$  для  $E_{x,l}^y$  — волны, набегающей на препятствия (рис. 2, б или 2, в).

$$\begin{aligned} (C_{2n}^{\text{см}} + D_{2n}^{\text{см}}) &= \frac{1}{p + 2n} \frac{iqD'^{(n)\text{см}}}{(1 + e_{p+2n})(\epsilon_p^i \Delta'^{\text{см}} - D'^{(0)\text{см}})}; \quad (49) \\ (C_{2n}^{\text{см}} - D_{2n}^{\text{см}}) &= \frac{1}{p + 2n} \frac{iqD''^{(n)\text{см}}}{(1 - e_{p+2n})(\epsilon_p^* \Delta'^{\text{см}} - D''^{(0)\text{см}})}; \quad -C_{-2n-2p}^{\text{см}} = C_{2n}^{\text{см}}, \\ &\quad -D_{-2n-2p}^{\text{см}} = D_{2n}^{\text{см}}, \end{aligned}$$

где

$$\epsilon_p^i \Delta'^{\text{см}} = \begin{vmatrix} R_{\sigma_1 \frac{p}{2}} & \epsilon_1' (\zeta_1' V_{\sigma_1 \frac{p}{2}}^{1-p'} + V_{\sigma_1 \frac{p}{2}}^{-1-p'}) & \dots & \epsilon_N' (\zeta_{2N-1}' V_{\sigma_1 \frac{p}{2}}^{N-p'} + V_{\sigma_1 \frac{p}{2}}^{-N-p'}) \\ R_{1-p'} & [\epsilon_1' (\zeta_1' V_{1-p'}^{1-p'} + V_{1-p'}^{-1-p'}) - \rho_{1-p}] & \dots & \epsilon_N' (\zeta_{2N-1}' V_{1-p'}^{N-p'} + V_{1-p'}^{-N-p'}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N-p'} & \epsilon_1' (\zeta_1' V_{N-p'}^{1-p'} + V_{N-p'}^{-1-p'}) & \dots & [\epsilon_N' (\zeta_{2N-1}' V_{N-p'}^{N-p'} + V_{N-p'}^{-N-p'}) - \rho_{2N-1-p}] \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Здесь  $p' = \frac{p+1}{2}$ ;  $p'' = \frac{p-1}{2}$ .



При целых или полуцелых  $s$  рассматриваемая система эквивалентна соответственно асимметричному (рис. 4, а) или симметричному препятствию (рис. 4, в).

Отметим, что полученные для индуктивных препятствий при падающей  $H_{p,0}$ -волне результаты тривиально переносятся на случай любых  $E_{p,l}^u$  падающих волн (волны  $E_{p,0}^u$  совпадают с обычными  $H_{p,0}$ -волнами). Для этого достаточно в окончательных формулах данного и предыдущего параграфов заменить везде  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  на  $k' = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} l\right)^2}$ . Разница заключается только в том, что на препятствии в этом случае возбуждаются волны  $E_{n,l}^u$  ( $n = 1, 2 \dots \infty$ ), а не  $H_{n,0}$ .

### 5. Обсуждение результатов

Решение полученных в работе систем алгебраических уравнений производилось на ЭВМ. Использовались также приближенные замкнутые формулы, которые получаются из формул (29), (32), (33) и (38) работы [2] при замене  $\epsilon_{i+n}$  на  $\epsilon'_{i+n}$  и  $\epsilon''_{i+n}$ . Некоторые из рассчитанных кривых представлены на рис. 5—6.

При анализе зависимости коэффициента отражения (прохождения), амплитуд спектров и других величин от параметров системы обнаруживаются закономерности, присущие соответствующим одинарным нагрузкам. Эти закономерности описаны в [1; 2], и подробно на них мы останавливаться не будем. Заметим только, что для емкостных препятствий зависимость от  $\lambda$ , размеров  $a$  и  $b$  волновода и номера  $p$  падающей

$H_{p,0}$ -волны выражается параметром  $q = \sqrt{\left(\frac{2b}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{b}{a} p\right)^2}$ , причем, графики зависимости от  $q$  совпадают с известными кривыми [4] для двойных ленточных решеток (нормальное падение  $H$ -поляризованной волны), построенными в зависимости от  $x$ . Для индуктивных препятствий зависимость от  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  и номера  $l$  падающей  $E_{p,l}^u$ -волны выражается параметром  $x^l = \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} l\right)^2}$ .

Построенные в зависимости от  $q$  и  $x^l$  графики сильно изрезаны. Особенно сильно осциллируют кривые для амплитуд высших гармоник. Появление изрезанности в кривых вызвано отражениями волн во внутренней области  $0 > z > -r$ , которая играет роль проходного резонатора, связанного через щели с остальным волноводным трактом. В длинноволновой области резонансы возникают только на основной волне при значениях  $x$ , когда электрическая длина резонатора  $r \frac{\lambda}{\lambda_g}$  на этой волне равна  $\lambda \frac{2m+1}{4}$  или  $\lambda \frac{m}{2}$  ( $m = 1, 2 \dots$ ). Фактически резонансные точки сдвинуты относительно этих значений  $x$ , и тем сильнее, чем меньше  $\frac{r}{\lambda}$  или  $\frac{r}{2a}$  и чем сильнее связь с внешними областями.

При появлении незатухающих высших волн возникают резонансы и на этих волнах. При таких резонансах происходит интенсивное преобразование энергии падающей волны в энергию резонансного колебания. Вследствие этого в точках резонанса появляются провалы на кривых для амплитуд падающей волны (рис. 6 точка  $x^l = 2,6$ ).



Заметим, что если падающая волна не является низшей в своем спектре (каждый из таких спектров включает только часть волноводных волн), то для нее при любых  $x$  существуют потери на преобразование. Это объясняется наличием распространяющихся волн более низкого типа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. Неоднородности в прямоугольных волноводах, часть I. Емкостные препятствия. Журн. «Радиотехника и электроника», № 6, 1965.
  2. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. Неоднородности в прямоугольных волноводах, часть II. Индуктивные препятствия. Журн. «Радиотехника и электроника», № 7, 1965.
  3. О. А. Третьяков. Дифракция электромагнитных волн на двухслойных и многослойных решетках. Автореф. канд. дисс., МВССО УССР, ХГУ им. Горького, Харьков, 1963.
  4. Л. Н. Литвиненко. Дифракция плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на металлической решетке специальной геометрической формы. «Известия вузов. Радиофизика» 7, 5, 1964.
  5. Г. Н. Гестриян, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на решетке специальной геометрической формы. Зап. мех.-мат ХГУ в Харьковск. матем. об-ва, 30, 4, 1964.
-

**ОБОСНОВАНИЕ КОРОТКОВОЛННОЙ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ  
О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ  
НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ  
ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ**

*Е. Н. Подольский*

1. Постановка задачи.

В плоскости  $xoy$  расположена периодическая решетка, образованная бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, параллельными оси  $ox$ . Период решетки равен  $2\pi$ , расстояние между соседними лентами —  $2\delta$ , так что ширина лент —  $2(\pi - \delta)$ . Начало координат находится в середине одной из щелей.

Сверху ( $z > 0$ ) под произвольным углом к этой решетке падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}^0 = \vec{e} e^{ik(\vec{n}\vec{r})}; \quad \vec{H}^0 = \vec{h} e^{ik(\vec{n}\vec{r})} \quad (1)$$

(временной множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и дальше опускаем). Единичный вектор

$$\vec{n} = \{\alpha, \beta, -\gamma\} \quad (\gamma > 0)$$

задает направление падающей волны, постоянные векторы  $\vec{e}$  и  $\vec{h}$  связаны между собой, как известно, равенствами

$$\vec{h} = [\vec{n}\vec{e}]; \quad \vec{e} = [\vec{h}\vec{n}].$$

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

Пусть  $\vec{E}(x, y, z)$ ,  $\vec{H}(x, y, z)$  — искомое поле. Как было показано в работе [1],  $x$ -составляющие этого поля имеют следующий вид:

$$E_x(x, y, z) = e_x e^{ik\alpha x} v_e(y, z); \quad H_x(x, y, z) = h_x e^{ik\alpha x} v_h(y, z), \quad (2)$$

где

$$v_e(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{in y} \right], \quad (3)$$

$$v_h(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \frac{|z|}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{in y} \right], \quad (3')$$

$$\gamma_n = \sqrt{1 - \alpha^2 - \left(\beta + \frac{n}{k}\right)^2}, \quad (4)$$

причем знак у корня выбирается так, что  $\text{Im}\gamma_n > 0$ , а если  $\text{Im}\gamma_n = 0$ , то  $\text{Re}\gamma_n \geq 0$  (см. формулы (2), (2'), (4) работы [1]).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо неизвестные коэффициенты  $e_n$ ,  $h_n$  подобрать так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{iny} = 0 \quad \delta < |y| \leq \pi, \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e_n e^{iny} = 0 \quad |y| < \delta, \quad (5')$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{iny} = 0 \quad |y| < \delta, \quad (6)$$

$$-\gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n h_n e^{iny} = 0 \quad \delta < |y| \leq \pi \quad (6')$$

(см. формулы (6), (11), (12), (V) работы [1]).

При этом искомое поле выражается через компоненты  $E_x$ ,  $H_x$  по таким формулам:

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{ia}{k(1-a^2)} \text{grad } E_x + \frac{1}{1-a^2} \vec{\Pi} - \frac{i}{k(1-a^2)} \text{rot } \vec{\Pi}^*, \\ \vec{H} = \frac{i}{k(1-a^2)} \text{rot } \vec{\Pi} + \frac{ia}{k(1-a^2)} \text{grad } H_x + \frac{1}{1-a^2} \vec{\Pi}^*, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\vec{\Pi}(\vec{\Pi}^*)$  — вектор,  $x$ -составляющая которого равна  $E_x$  ( $H_x$ ), а остальные составляющие равны нулю.

Здесь мы подробно рассмотрим только уравнения (5), (5'), так как уравнения (6), (6') исследуются совершенно аналогично.

В статье [1] с помощью метода, предложенного в работе [2], доказано, что система (5), (5') эквивалентна бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_n^p + 2x_{-1} R_n - i\gamma V_n^{m_0} \quad (n \neq 0, n \neq -1), \\ \theta x_0 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_0^p + 2x_{-1} R_0 - i\gamma V_0^{m_0}, \\ 0 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_{|\theta|}^p + 2x_{-1} R_{|\theta|} + x_0 - i\gamma V_{|\theta|}^{m_0}, \end{cases} \quad (8)$$

где коэффициенты  $V_n^p$ ,  $R_n$ ,  $V_{|\theta|}^p$ ,  $R_{|\theta|}$  выражаются через полиномы Лежандра и функции Лежандра первого рода (см. стр. 121, 122 работы [1]); неизвестные  $x_n$  связаны с исходными неизвестными  $e_n$  формулами

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n+\theta}{k} e_{n-m_0}, \quad (n \neq 0, n \neq m_0); \\ x_{m_0} &= \beta (e_0 + 1); \\ x_0 &= \frac{1}{k} e_{-m_0} \end{aligned}$$

( $m_0$  — ближайшее к  $k\beta$  целое число, т. е.  $k\beta = m_0 + \theta$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2}$ ), а величины  $\varepsilon_p$  при фиксированных  $k$  и  $\alpha$  убывают при  $|p| \rightarrow \infty$  как  $p^{-2}$ .

Для получения приближенного решения в работе [1] система (8) заменялась конечной, которая получается из нее, если при всех  $|p| > N$

заменить коэффициенты  $\epsilon_p$  нулями. Однако для обоснования такого приближения необходимо показать, что бесконечная система (8) имеет единственное решение. Кроме того, этот метод непригоден для больших  $k$ , так как в этом случае нужно было бы решать конечную систему очень высокого порядка.

В настоящей статье мы, во-первых, докажем, что система (8) действительно имеет единственное решение, и, во-вторых, найдем коротковолновую асимптотику решения (т. е. исследуем случай  $k \rightarrow \infty$ ).

## 2. Существование и единственность решения

Для исследования системы (8) удобнее вернуться к исходным переменным  $e_n$ , после чего эта система примет такой вид:

$$e_n - \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p e_p = b_n \quad (-\infty < n < \infty), \quad (9)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} A_n^p &= \frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(p+m_0)(n+m_0+\theta)} \epsilon_{p+m_0} V_{n+m_0}^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) + \epsilon_0 \frac{V_{n+m_0}^0}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0}^p - \\ &\quad - \frac{(1-\theta)P_{n+m_0}}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0-1}^p \quad (n \neq -m_0, n \neq -m_0-1), \\ A_{-m_0}^p &= -\frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{p+m_0} \epsilon_{p+m_0} V_{\theta}^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) - \epsilon_0 V_{\theta}^0 \delta_{-m_0}^p + \\ &\quad + 2(1-\theta) R_{\theta} \delta_{-m_0-1}^p, \\ A_{-m_0-1}^p &= \frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(1-\theta)(p+m_0)} \epsilon_{p+m_0} V_{\theta}^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) + \frac{\epsilon_0 V_{\theta}^0 - \theta}{1-\theta} \delta_{-m_0}^p, \\ b_n &= k|\beta| \frac{V_{n+m_0}^{m_0}}{n+m_0+\theta} \quad (n \neq -m_0, n \neq -m_0-1), \\ b_{-m_0} &= -k|\beta| V_{\theta}^{m_0}; \quad b_{-m_0-1} = \frac{k|\beta|}{1-\theta} V_{\theta}^{m_0} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

(здесь и в дальнейшем  $\delta_m^n = 0$  при  $m \neq n$ ,  $\delta_n^n = 1$ ).

Из формул, выражающих величины  $V_n^p$ ,  $V_{\theta}^p$  через полиномы Лежандра  $P_n(\cos \delta)$ , и оценок

$$|P_n(\cos \delta)| < \frac{1}{\sqrt{|n| \sin \delta}}, \quad \epsilon_n = O(n^{-3}) \quad (|n| \rightarrow \infty) \quad (11)$$

вытекают следующие неравенства для матричных элементов  $A_n^p$  и правых частей  $b_n$ :

$$\left\{ \begin{aligned} |A_n^p| &< \frac{C}{|p-n|(|n|^{\frac{1}{2}}+1)(|p|^{\frac{3}{2}}+1)} \quad (n \neq p, n \neq -m_0), \\ |A_{-m_0}^p| &< \frac{C \ln(|p|+1)}{p^2+1}, \\ |A_n^n| &< \frac{C}{n^2+1}, \quad |b_n| < \frac{C}{|n|^{\frac{3}{2}}+1}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Из последних неравенств в свою очередь следует, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n^p|^2 < \infty$$

и, значит, матрица  $\|A_n^p\|$  порождает в гильбертовом пространстве  $l^2$  последовательностей  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  вполне непрерывный оператор.

Так как столбец правых частей системы (9) принадлежит  $\mathbb{R}^2$  то в силу альтернативы Фредгольма для доказательства существования решения системы, принадлежащего  $\mathbb{R}^2$ , достаточно доказать, что соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений в этом пространстве.

Используя формулы (10) и оценки (11), можно показать, что любое решение  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  однородной системы

$$y_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p y_p, \quad (9')$$

принадлежащее  $\mathbb{R}^2$ , имеет такой вид:

$$y_n = A \frac{P_{n+m_0}(\cos \delta)}{n+m_0+\delta} + B \frac{P_{n+m_0+1}(\cos \delta)}{n+m_0+\delta} + O(|n|^{-\frac{5}{2}}), \quad (13)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые константы, зависящие от параметров задачи, но не зависящие от  $n$ .

Из этой формулы и равенства

$$\left| \frac{\gamma_n}{n+m_0+\delta} \right| = \frac{i}{k} + O(n^{-2}),$$

вытекающего из формулы (4) и определения числа  $m_0$ , следует также, что

$$\frac{|n+m_0|}{n+m_0} \gamma_n y_n = \frac{Ai}{k} P_{n+m_0}(\cos \delta) + \frac{Bi}{k} P_{n+m_0+1}(\cos \delta) + O(|n|^{-\frac{3}{2}}). \quad (14)$$

Поэтому функция

$$f_1(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} \quad (-\pi \leq y \leq \pi) \quad (15)$$

является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция

$$f_2(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} \quad (-\pi \leq y \leq \pi) \quad (16)$$

— абсолютно интегрируемой. Для доказательства последних утверждений нужно воспользоваться формулами (13) и (14) и известным разложением

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\cos \delta) e^{iny} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{y}{2}}}{\sqrt{\cos y - \cos \delta}} & |y| < \delta \\ 0 & \delta < |y| < \pi. \end{cases}$$

Следовательно, к рядам (15) и (16) применимо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1(y)} f_2(y) dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n |y_n|^2.$$

С другой стороны, так как система (9) эквивалентна системе (5), (5'), то решение  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  соответствующей однородной системы (9') должно удовлетворять следующим равенствам:

$$f_1(y) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leq \pi \quad (17)$$

$$f_2(y) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} = 0, \quad |y| < \delta$$

из которых следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1(y)} f_2(y) dy = 0,$$

а, значит, и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |y_n|^2 = 0.$$

Определяя вещественную и мнимую части в этом равенстве, имеем

$$\sum_{\operatorname{Im} \gamma_n > 0} \operatorname{Im} \gamma_n |y_n|^2 = 0,$$

$$\sum_{\operatorname{Im} \gamma_n = 0} \operatorname{Re} \gamma_n |y_n|^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая правило выбора знака в формуле (4), определяющей  $\gamma_n$ , получим, что  $y_n = 0$  для всех  $n$ , при которых  $\gamma_n \neq 0$ .

Величина  $\gamma_n$  может обратиться в нуль максимум при двух значениях  $n$ ; обозначим эти значения через  $m^+$  и  $m^-$ . Тогда

$$f_1(y) = y_{m^+} e^{im^+ y} + y_{m^-} e^{im^- y},$$

и из равенства (17) следует, что  $y_{m^+} = y_{m^-} = 0$ .

Таким образом, однородная система (9') не имеет ненулевого решения в пространстве  $l^2$ .

Поэтому неоднородная система (9) при всех вещественных  $k$  имеет единственное решение, принадлежащее  $l^2$ , причем из оценок (12) и теорем Коха следует, что это решение может быть получено в виде отношений сходящихся бесконечных определителей Крамера.

Тем самым доказаны существование решения, его единственность и законность приближенного метода, использованного в работе [1].

### 3. Коротковолновая асимптотика решения

Пусть  $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — решение неоднородной системы (9), принадлежащее  $l^2$ . Из формул (10), оценок (11) и вида правых частей уравнений (9) следует, что для этого решения тоже справедливо представление (13) и формула (14), т. е.

$$e_n = A' \frac{P_{n+m_0}}{n+m_0+\theta} + B' \frac{P_{n+m_0+1}}{n+m_0+\theta} + O(|n|^{-\frac{5}{2}}), \quad (18)$$

$$\frac{|n+m_0|}{n+m_0} \gamma_n e_n = \frac{A'i}{k} P_{n+m_0} + \frac{B'i}{k} P_{n+m_0+1} + O(|n|^{-\frac{3}{2}}). \quad (19)$$

Положим

$$a_n = \frac{\sin n(\delta - \varepsilon^+ - \varepsilon^-)}{\pi n} \frac{\sin n\varepsilon^+}{n\varepsilon^+} \cdot \frac{\sin n\varepsilon^-}{n\varepsilon^-} - \delta_n^0, \quad (20)$$

$$\eta_n = e_n - a_n,$$

где величины

$$\varepsilon^+ = \frac{\pi}{k(\sqrt{1-a^2}-\beta)}; \quad \varepsilon^- = \frac{\pi}{k(\sqrt{1-a^2}+\beta)} \quad (21)$$

выбраны, так, что произведение  $\sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-$  обращается в нуль в тех точках, в которых обращается в нуль  $\gamma_n$ .

Коэффициенты  $a_n$  являются коэффициентами Фурье непрерывной функции, равной  $-1$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю в интервале  $-\delta < y < \delta - 2\varepsilon^+ - 2\varepsilon^-$ .

Так как коэффициенты  $e_n$  удовлетворяют равенствам (5), (5'), то

$$\varphi_1(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \eta_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leq \pi \quad (22)$$

$$\varphi_2(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \eta_n e^{iny} = - \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny} \quad |y| < \delta, \quad (22')$$

причем из формул (18), (19) и (20) следует, что функция  $\varphi_1(y)$  является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция  $\varphi_2(y)$  абсолютно интегрируема на всем интервале  $[-\pi, \pi]$ . Поэтому к этим функциям применимо равенство Парсеваля:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_2(y) dy.$$

Введем функцию

$$\varphi_3(y) = \gamma \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{iny},$$

где

$$d_n = \frac{\sin n(\delta + \varepsilon^+ + \varepsilon^-) \sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-}{\pi n} - \delta_n^0,$$

равную нулю в интервале  $|y| < \delta$ . Так как функция  $\varphi_1(y)$  равна нулю вне этого интервала, то, учитывая равенство (22'), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_2(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} [\varphi_3(y) + \varphi_2(y)] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} [\varphi_3(y) - \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny}] dy = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n} (\gamma d_n - \gamma_n a_n) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n} (\gamma d_n - \gamma_n a_n). \quad (23)$$

Так как величины  $\gamma_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) могут быть либо неотрицательными (их конечное число), либо чисто мнимыми с положительной мнимой частью, то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| \cdot |\eta_n|^2 \leq 2 \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 \right|.$$

Используя неравенство Буняковского и формулу (23), получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \leq 2 \sqrt{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \right) \cdot \left( \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} \right)},$$

откуда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \leq 4 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|}.$$

Для оценки правой части этого неравенства (при больших  $k$ ) разобьем ее на три слагаемых:

$$|n| < N_1; N_1 < |n| < N_2; |n| > N_2,$$

где

$$N_1 = \frac{1}{2} k (\sqrt{1-\alpha^2} - \beta); N_2 = 3k,$$

и воспользуемся легко проверяемыми неравенствами:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &> \frac{1}{2} \gamma; \quad \left| 1 - \frac{\gamma_n}{\gamma} \right| < \frac{3|n|}{k\gamma^2} \quad \text{при } |n| < N_1, \\ |\gamma_n| &< 4; \quad \left| \frac{\sqrt{\sin n\epsilon^+ + \sin n\epsilon^-}}{\gamma_n} \right| < \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{при } N_1 < |n| < N_2, \\ 1 &< \frac{|\gamma_n|}{\gamma} < \frac{|n|}{k\gamma} \quad \text{при } |n| > N_2. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|n| < N_1} \frac{|\gamma_n^d - \gamma_n^a|^2}{|\gamma_n|^2} &\leq 4\gamma \sum_{|n| < N_1} \left| \frac{\sin n(\theta + \epsilon^+ + \epsilon^-) - \sin n(\theta - \epsilon^+ - \epsilon^-)}{\pi n} \right|^2 + \\ &+ 4\gamma \sum_{|n| < N_1} \frac{1}{\pi^2 n^2} \left| 1 - \frac{\gamma_n}{\gamma} \right|^2 < \frac{16\gamma}{\pi^2} \sum_{|n| < N_1} \left| \frac{\sin n(\epsilon^+ + \epsilon^-)}{n} \right|^2 + \\ &+ \frac{36 \cdot 2N_1}{k^2 \gamma^2 \pi^2} < \frac{C_1}{k\gamma \sqrt{1-\alpha^2}}; \\ \sum_{N_1 < |n| < N_2} \frac{|\gamma_n^d - \gamma_n^a|^2}{|\gamma_n|^2} &\leq \frac{\gamma^2}{\pi^2} \sum_{N_1 < |n| < N_2} \left| \frac{\sqrt{\sin n\epsilon^+ + \sin n\epsilon^-}}{n\epsilon^+ \cdot n\epsilon^-} \right| \frac{1}{n^2 \gamma_n} + \\ &+ 4 \sum_{N_1 < |n| < N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} < \frac{C_2}{k\gamma^2 (1-\alpha^2)^2}; \\ \sum_{|n| > N_2} \frac{|\gamma_n^d - \gamma_n^a|^2}{|\gamma_n|^2} &< 2\gamma \sum_{|n| > N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{k} \sum_{|n| > N_2} \frac{|n|}{\pi^2 n^2 n \epsilon^+ \epsilon^-} < \frac{C_3}{k \sqrt{1-\alpha^2}} \end{aligned}$$

(все константы  $C_m$  не зависят от параметров задачи).

Таким образом, мы получили оценку

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\gamma_n}{\gamma} \right| |\eta_n|^2 < \frac{C_3}{k\gamma^2 (1-\alpha^2)^2}. \quad (24)$$

Из этого неравенства и формулы (4) следует для каждого фиксированного  $n$  при  $k \rightarrow \infty$  оценка  $\eta_n = O(k^{-\frac{1}{2}})$ , откуда, учитывая формулы (20) и (21), получим

$$e_n = \frac{\sin n\theta}{\pi n} - \delta_n^0 + O(k^{-\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что эти оценки неравномерны по  $n$ . Равномерные оценки можно получить следующим образом. Величина  $\gamma_n$  как функция переменной  $n$  обращается в нуль в двух точках:  $k(\sqrt{1-\alpha^2} - \beta)$  и  $-k(\sqrt{1-\alpha^2} + \beta)$ . Выделим целую часть этих чисел:

$$\begin{aligned} k(\sqrt{1-\alpha^2} - \beta) &= m^+ + \theta^+; \quad -k(\sqrt{1-\alpha^2} + \beta) = \\ &= m^- + \theta^- \quad \left( -\frac{1}{2} < \theta^\pm < \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$



Тогда, как легко проверить, при всех  $n$ , отличных от  $m^+$  и  $m^-$ ,

$$\left| \frac{\eta_n}{\gamma} \right| > \frac{C_5}{\sqrt{k} \gamma^4 \sqrt{1-a^2}},$$

откуда согласно (24) получим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m^+, n \neq m^-)}}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_6}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1-a^2}}.$$

Для оценки  $|\eta_{m^+}|^2 + |\eta_{m^-}|^2$  введем функцию  $\tau^+(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n^+ e^{iny}$ , которая равна  $e^{im^+y}$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю — в интервале  $|y| < \delta$ . Ее коэффициенты Фурье  $\tau_{m^+}^+$  и  $\tau_{m^-}^+$  равны

$$\tau_{m^+}^+ = \frac{\pi - \delta}{\pi}; \quad \tau_{m^-}^+ = -\frac{\sin(m^+ - m^-)\delta}{\pi(m^+ - m^-)} = O(k^{-1}).$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\tau_n^+|^2 = \frac{\pi - \delta}{\pi}.$$

Кроме того, из определения функции  $\tau^+(y)$  и формулы (22) следует

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau^+(y) \varphi_1(y) dy = 0.$$

С другой стороны, по равенству Парсеваля этот интеграл равен

$\sum_{-\infty}^{\infty} \tau_n^+ \eta_n$ . Поэтому

$$|\tau_{m^+}^+ \eta_{m^+} + \tau_{m^-}^+ \eta_{m^-}| = \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m^+, \\ n \neq m^-)}}^{\infty} \tau_n^+ \eta_n \right| \leq \sqrt{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} |\tau_n^+|^2 \right) \left( \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m^+, \\ n \neq m^-)}}^{\infty} |\eta_n|^2 \right)} < \frac{C_7}{\sqrt{k} \gamma^4 \sqrt{1-a^2}}, \quad (25)$$

Аналогично, вводя функцию  $\tau^-(y)$ , равную  $e^{im^-y}$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю — в интервале  $|y| < \delta$ , получим

$$|\tau_{m^+}^- \eta_{m^+} + \tau_{m^-}^- \eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt{k} \gamma^4 \sqrt{1-a^2}}, \quad (26)$$

где

$$\tau_{m^+}^- = O(k^{-1}), \quad \tau_{m^-}^- = \frac{\pi - \delta}{\pi}.$$

Из неравенств (25) и (26) следует

$$|\eta_{m^+}| < \frac{C_7}{\sqrt{k} \gamma^4 \sqrt{1-a^2}}; \quad |\eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt{k} \gamma^4 \sqrt{1-a^2}}.$$

Окончательно получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_8}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1-a^2}}, \quad (27)$$

так что равномерно по  $n$  имеет место неравенство

$$|\eta_n| < \frac{C_9}{\sqrt[4]{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}}.$$

Нетрудно показать также, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left[ a_n - \left( \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* \right) \right]^2 < \frac{C_{10}}{k}.$$

Таким образом, мы доказали, что при  $k \rightarrow \infty$  равномерно по  $n$  имеют место оценки

$$\begin{aligned} e_n &= a_n + O(k^{-1/4}), \\ e_n &= \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* + O(k^{-1/4}). \end{aligned}$$

#### 4. Приближенные выражения для поля при больших $k$ и оценки погрешности

В предыдущем пункте мы показали, что при больших  $k$  коэффициенты  $e_n$  можно приближенно заменить на  $a_n$ , определяемые формулой (20), и функцию  $v(y, z)$  — на функцию

$$v^a(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{ik\gamma n |z|} e^{in\beta y} \right].$$

Построенное с помощью этой функции по формулам (2) и (7)\* поле  $\vec{E}^a, \vec{H}^a$  будет приближенным решением поставленной задачи дифракции.

Мы не можем ожидать, что это приближенное решение будет равномерно во всем пространстве приближаться к точному решению  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$ , при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому в качестве меры погрешности приближенного решения выберем две интегральные энергетические величины: 1) энергию  $W(\epsilon, \zeta)$  разности точного и приближенного полей в параллелепипеде, ограниченном плоскостями  $x=0, x=1, y=\pi, y=-\pi, z=\epsilon, z=\zeta$  ( $\zeta > \epsilon > 0$ ), отнесенную к плотности энергии падающей волны (1); 2) поток энергии  $S(\zeta)$  этой разности полей через участок плоскости  $z=\zeta$  ( $\zeta > 0$ ), ограниченный плоскостями  $x=0, x=1, y=\pi, y=-\pi$ , который отнесен к потоку энергии падающей волны через ту же площадку.

Вычисляя определенные таким образом величины, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} W^{ra}(\epsilon, \zeta) &= 2\pi(\zeta - \epsilon) \sum_{|\operatorname{Im}\gamma_n|=0} |\eta_n|^2 + \\ &+ \pi \sum_{|\operatorname{Im}\gamma_n|>0} \left[ \left| \gamma_n \left| \frac{1+a^2}{k(1-a^2)} + \frac{1}{k|\gamma_n|} \right| \right] |\eta_n|^2 (e^{-2k|\gamma_n|\epsilon} - e^{-2k|\gamma_n|\zeta}); \\ S^{ra}(\zeta) &= \sum_{|\operatorname{Im}\gamma_n|=0} \left| \frac{\gamma_n}{\gamma} \right| |\eta_n|^2. \end{aligned}$$

\* Для простоты будем считать падающую волну  $E$  поляризованной, т. е.  $H_x = 0$ . Тогда и  $H_x = 0$ . Общий случай рассматривается вполне аналогично.

Используя полученные оценки (24), (27), получим следующие оценки погрешности приближенного решения:

$$W^{Ta}(0, \zeta) < \frac{C_{11}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-a^2}}; \quad S^{Ta}(\zeta) < \frac{C_{12}}{k\gamma^3(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь в качестве  $v_\varepsilon(y, z)$  функцию

$$v^K(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* \right) e^{ik\gamma n |z|} e^{in\beta y} \right]. \quad (29)$$

Легко видеть, что функция  $v^K(y, z)$  соответствует решению задачи по методу Кирхгофа — Зоммерфельда, когда величина  $E_x(x, y, z)$  полагается в щелях равной  $x$ -составляющей вектора  $\vec{E}$  падающей волны (и, естественно, на решетке равной нулю).

Оценивая разность между  $\vec{E}^a, \vec{H}^a$  и кирхгофовским приближением  $\vec{E}^K, \vec{H}^K$ , определяемым функцией  $v^K(y, z)$ , получим

$$W^{aK}(\varepsilon, \zeta) < \frac{C_{13}(\zeta+1)}{k\gamma^2\sqrt{1-a^2}} + \frac{C_{14}|\ln \varepsilon|}{k^2(1-a^2)};$$

$$S^{aK}(\zeta) < \frac{C_{15}}{k\gamma^3(1-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда, используя оценки (28), получим оценку погрешности кирхгофовского приближения:

$$\begin{cases} W^{TK}(\varepsilon, \zeta) < \frac{C_{13}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-a^2}} + \frac{C_{14}|\ln \varepsilon|}{k^2(1-a^2)}; \\ S^{TK}(\zeta) < \frac{C_{17}}{k\gamma^3(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases} \quad (30)$$

Сделаем, наконец, еще один огрубляющий шаг: разложим в выражении (29)  $\gamma_n$  по степеням  $\frac{1}{k}$  и ограничимся двумя первыми членами разложения. Тогда получим в качестве приближения для  $v_\varepsilon(y, z)$  функцию

$$v^r(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + e^{ik\gamma |z|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* \right) e^{in\left(y - \frac{\beta}{\gamma}|z|\right)} \right].$$

Эта функция определяет приближение геометрической оптики. Она имеет разрывы вдоль определенных лучей, исходящих из ребер решетки (параллельных направлению распространения падающей волны в нижней полуплоскости и параллельных направлению распространения отраженной от всей оси  $oy$  волны в верхней полуплоскости).

Если с помощью функции  $v^r(y, z)$  вычислить по формулам (2), (7) соответствующее электромагнитное поле  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  во всех точках, не ле-

жащих на плоскостях разрывов, то аналогично предыдущему можно показать, что для погрешностей  $W^{TF}(0, \zeta)$  и  $S^{TF}(\zeta)$  справедливы оценки

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{TF}(0, \zeta) < \frac{C_{19}(\zeta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1-a^2}}; \\ S^{TF}(\zeta) < \frac{C_{19} \zeta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1-a^2}} + \frac{C_{20}}{k \gamma^2 (1-a^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right. \quad (31)$$

Таким образом, формулы (30) и (31) дают строгое обоснование приближений Кирхгофа — Зоммерфельда и геометрической оптики с оценкой погрешности при  $k \rightarrow \infty$  в выбранных нами энергетических метриках.

Автор статьи выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Подольский. Дифракция электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на плоскую металлическую решетку. «Уч. зап. мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва», сер. 4, 30 (1964).

2. З. С. Агранович, В. А. Марченко и В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4 (1962).

## ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

В. М. Скурлов

1. Плоская решетка из идеально проводящих бесконечно тонких и бесконечно длинных лент с периодом  $l$  и шириной щели  $d$  расположена в плоскости  $z = 0$ , являющейся границей раздела, так что оси лент параллельны оси  $x$  ( $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$  при  $z > 0$  и  $\epsilon_2 = \epsilon$ ,  $\mu_2 = 1$  при  $z < 0$ ). Дифракция плоской волны на подобной структуре исследована в работах [1] и [2]. В данной статье рассмотрим дифракцию цилиндрической электромагнитной волны на плоской решетке, расположенной на границе с полубесконечной диэлектрической средой. В этом случае источник электромагнитных волн представляет собой бесконечно тонкую нить с током  $I$ , параллельную оси  $x$ , положение которой определяется точкой  $(y_0, z_0)$  (рис. 1). Предполагается, что токи нити в плоскостях  $x = \text{const}$  имеет одну и ту же фазу. Тогда поле зависит от координат  $y$  и  $z$ , а вектор электрического поля имеет только  $x$ -е компоненты.

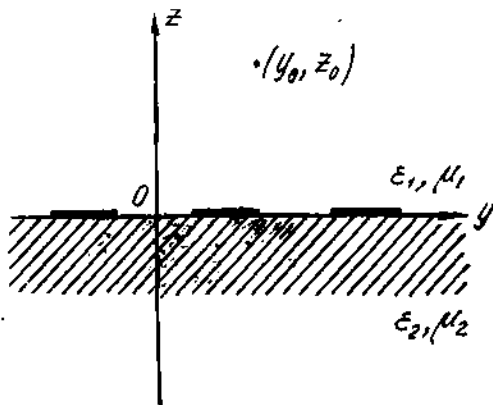


Рис. 1.

Естественно представить падающую цилиндрическую волну в виде суперпозиции плоских волн.

Поле в области  $z > 0$  запишем в виде

$$E_x^1 = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \tau^2} |z - z_0| + i\tau(y - y_0)}}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\sqrt{k^2 - \tau_n^2} z} e^{i\tau_n y} d\tau, \quad (1)$$

где  $K = -\frac{kl}{c}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $I$  — ток нити,  $\tau_n = \tau + \frac{2\pi n}{l}$ , временная зависимость берется в виде  $e^{-i\omega t}$ , мнимую часть корня здесь и далее считаем положительной.

Первое слагаемое является полем цилиндрической волны в свободном пространстве, представленным в виде суперпозиции плоских волн [4]. Каждая из этих плоских волн имеет постоянное распространения вдоль оси  $y$ , равную  $\tau$ , аналогичную величине  $k \sin \alpha$  в работе [2], которая здесь принимает все возможные значения. Второе слагаемое — дифракционное поле, являющееся суперпозицией дифракционных полей, обусловленных каждой из плоских волн с постоянными распространения вдоль

оси  $y$ , равными  $\tau_n$ . Оно удовлетворяет волновому уравнению и учитывает периодичность структуры.

Из закона Снелля следует, что при переходе из одной среды в другую постоянная распространения плоской волны вдоль границы раздела не изменяется. Поэтому поле при  $z < 0$  следует искать в виде

$$E_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{-i\sqrt{k^2 - \tau_n^2} z} e^{i\tau_n y} d\tau. \quad (2)$$

Интегрирование в (1) и (2) производится по вещественной оси  $\tau$ . Подынтегральные функции имеют точки ветвления, которые определяются из условий

$$k^2 - \tau_n^2 = 0, \quad k^2 \varepsilon - \tau_n^2 = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти точки лежат на вещественной оси при  $\text{Im} \varepsilon = 0$ . Если считать, что  $k = k_1 + ik_2$ , где  $k_2$  — малая величина, то точки ветвления будут лежать вне действительной оси. В дальнейшем всюду считаем  $k_2 = 0$ .

Разрезы соединяют точки ветвления, проходя через бесконечно удаленную точку и не пересекая действительной оси.

Граничные условия приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} B(\tau, y_0, z_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\alpha_n y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{i\alpha_n y} = \begin{cases} 0 & (\text{металл}); \\ \neq 0 & (\text{щель}); \end{cases} \\ -h_{10}(\tau) B(\tau, y_0, z_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) h_{1n}(\tau) e^{i\alpha_n y} &= \\ = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) h_{2n}(\tau) e^{i\alpha_n y} & \quad (\text{щель}) \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\pi n}{T}, \quad h_{1n}(\tau) = \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \quad B(\tau, y_0, z_0) = K \frac{e^{i h_{10} \tau_0 - i \tau y_0}}{h_{10}} \\ h_{2n}(\tau) &= \sqrt{k^2 \varepsilon - \tau_n^2}. \end{aligned} \quad (3')$$

Система (3) преобразуется:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\alpha_n y} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h'_{1n} + h'_{2n}) b_n e^{i\alpha_n y} &= 2h'_{10} B \quad (\text{щель}); \end{aligned} \quad (4)$$

здесь

$$\begin{aligned} h'_{1n} = h'_{1n}(\tau') &= \sqrt{x^2 - (\tau'_n)^2}, \quad h'_{2n} = h'_{2n}(\tau') = \sqrt{x^2 \varepsilon - (\tau'_n)^2}; \\ \tau'_n &= \tau \frac{l}{2\pi} + n = \tau' + n; \quad x = k \frac{l}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}. \end{aligned}$$

Для решения этой системы применим методику, аналогичную использованной в работе [3].

Так как  $-\infty \leq \tau' \leq \infty$ , то всегда можно представить  $\tau'$  в виде  $\tau' = q + \delta$ , где

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad -\frac{1}{2} < \delta \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Введем

$$q + n = s, \quad b_n = b_{s-q} = b_s^q, \quad b_s^q (s + \delta) = x_s^q, \\ h_{1n}(\tau') = h_{1s}(\delta) = \sqrt{x^2 - (s + \delta)^2}, \quad h_{2n}(\tau') = h_{2s}(\delta) = \sqrt{x^2 - (s + \delta)^2}, \\ B(\tau, y_0, z_0) = B^q(\delta, y_0, z_0). \quad (6)$$

В этих обозначениях (4) после умножения первого уравнения на  $e^{i\tau y}$  и дифференцирования по  $y$  записывается так:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s^q e^{i\tau y} = 0 \text{ (металл),} \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s^q \frac{|s + \delta|}{s + \delta} \left( \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} + \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} \right) e^{i\tau y} = 2h_{1q} B^q e^{i\tau y} \text{ (щель).}$$

Учитывая, что  $\frac{|s + \delta|}{s + \delta} = \frac{|s|}{s}$  при  $s \neq 0$  и введя

$$\varphi = \frac{2\pi y}{l}, \quad r_s = 1 + \frac{i}{2} \left( \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} + \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} \right) s \neq 0, \quad (7)$$

получим

$$\sum_{s \neq 0} x_s^q e^{i\tau y} + b_0^q \delta = 0, \quad \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ \sum_{s > 0} x_s^q \frac{|s|}{s} e^{i\tau y} = \frac{i}{2} (h_{10} + h_{20}) b_0^q - ih_{1q} B^q e^{i\tau y} + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s e^{i\tau y}, \quad 0 < |\varphi| < \theta, \quad \theta = \frac{\pi d}{l}. \quad (8)$$

Система (8) решается методом сведения ее к задаче Римана — Гильберта [1]. Для коэффициентов  $b_0^q, x_s^q$  получаем бесконечную систему уравнений

$$-b_0^q = \left[ \delta + \frac{i}{2} (h_{10} + h_{20}) \right] V_{10}^q b_0^q - ih_{1q} B^q V_{10}^q + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_{10}^q + 2x_{-1}^q R_{10}^q; \quad (9)$$

$$\delta b_0^q = \left[ \delta + \frac{i}{2} (h_{10} + h_{20}) \right] V_0^q b_0^q - ih_{1q} B^q V_0^q + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_0^q + 2x_{-1}^q R_0^q;$$

$$x_m^q = \left[ \delta + \frac{i}{2} (h_{10} + h_{20}) \right] V_m^q b_0^q - ih_{1q} B^q V_m^q + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_m^q + 2x_{-1}^q R_m^q, \quad m = +1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

где

$$V_{10}^q = \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m V_m^q}{m + \delta} = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} \cdot \frac{\delta - 1}{s + \delta} (P_{\delta-1} P_{\delta+1} - P_{\delta-2} \cdot P_{\delta}) - \frac{V_0^q}{\delta};$$

$$R_{10}^q = \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m R_m^q}{m + \delta} = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} P_{\delta-1} - \frac{R_0^q}{\delta};$$

$P_s$  — полиномы Лежандра аргумента  $u = \cos \frac{\pi d}{l} = \cos \theta$ ;

$P_{\delta}$  — функции Лежандра того же аргумента;

$V_m^q$  и  $R_m^q$  имеют тот же вид, что и в [1].

2. Рассмотрим систему (9) при  $x^2 \ll 1$  (длинноволновое приближение). Она переходит в систему двух уравнений с двумя неизвестными  $b_0^q$  и  $x_{-1}^q$  при фиксированном  $q$ . После преобразований получаем решение этой системы

$$b_0^q(\delta) = \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} i h_{1q} B^q, \quad b_{-1}^q(\delta) = \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} i h_{1q} B^q, \quad (10)$$

где

$$D_0^q(\delta) = \frac{1-\delta}{q+\delta} (P_{\delta-2} P_q - P_{\delta-1} P_{q+1}) - \frac{P_{\delta-1}}{q} (u P_q - P_{q+1});$$

$$D_{-1}^q(\delta) = P_\delta - P_{-\delta};$$

$$D_{-1}^q(\delta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{q\delta} (u P_q - P_{q+1}) (u P_{\delta-1} - P_{\delta-2}) \left[ \delta + \frac{i}{2} (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2s} - \delta^2}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q+\delta} (P_{\delta-1} P_{q+1} - P_{\delta-2} P_q) \left[ \delta(1+u) - \frac{i}{2} (1-u) (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2s} - \delta^2}) \right] \right\};$$

$$D_{-1}^0(\delta) = (u P_{\delta-1} - P_{\delta-2});$$

$$G(\delta) = \delta (P_\delta + P_{-\delta}) + \frac{i}{2} (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2s} - \delta^2}) (P_\delta - P_{-\delta}).$$

Теперь можно найти поле  $E_x^q$  согласно (2). Введем для удобства  $\frac{2\pi}{l} z = z'$ ,  $\frac{2\pi}{l} z_0 = z'_0$ ,  $\frac{2\pi}{l} y = y'$ ,  $\frac{2\pi}{l} y_0 = y'_0$ ;

тогда

$$B^q = K \frac{\exp[i h_{1q} z'_0 - i(q+\delta)y'_0]}{h_{1q}}.$$

Учитывая (5) и (6),

$$E_x^q = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{-i\sqrt{k^2 - \tau^2} z} e^{i\tau n y} d\tau = \frac{2\pi}{l} \sum_{q, s=-\infty}^{\infty} \int_{-y'_0}^{y'_0} b_0^q e^{-i\sqrt{x^2 - (s+\delta)^2} z' + i(s+\delta)y'} d\delta =$$

$$= \frac{2\pi}{l} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-y'_0}^{y'_0} \{ b_0^q e^{-i\sqrt{x^2 - \delta^2} z' + i\delta y'} + b_{-1}^q e^{-i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2} z' + i\delta y' - i y'} \} d\delta. \quad (11)$$

Следовательно,

$$E_x^q(y'_0, z'_0, y', z') = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') + \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z'), \quad (12)$$

где

$$F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') = iK \int_{-y'_0}^{y'_0} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2} z'_0 - i\sqrt{x^2 - \delta^2} z' + i\delta(y' - y'_0)} d\delta;$$

$$F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') =$$

$$= iK e^{-i\alpha y'_0 - \alpha z'_0 \text{ sign } q} \int_{-y'_0}^{y'_0} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 - \delta^2} z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0 \text{ sign } q} d\delta;$$

$$F_{-1}^0(y'_0, z'_0, y', z') =$$

$$= iK e^{-i y'} \int_{-y'_0}^{y'_0} \frac{D_{-1}^0(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2} z'_0 - i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2} z' + i\delta(y' - y'_0)} d\delta;$$



$$F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') =$$

$$= iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0} \operatorname{sign} q \int_{-i/\delta}^{i/\delta} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 \epsilon_1 - (\delta - 1)^2 z'} + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0} \operatorname{sign} q d\delta,$$

$$\operatorname{sign} q = \begin{cases} 1, & q > 0; \\ -1, & q < 0. \end{cases}$$

Выясним, имеет ли нули функция  $G(\delta)$ . Пусть  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ :

$$\sqrt{x^2(\epsilon_1 + i\epsilon_2) - \delta^2} = \begin{cases} M_1 + iM_2, & x^2\epsilon_1 > \delta^2; \\ M_1 - iM_2, & x^2\epsilon_1 < \delta^2, \end{cases}$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2\epsilon_2)^2 + (x^2\epsilon_1 - \delta^2)^2} + (x^2\epsilon_1 - \delta^2)},$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2\epsilon_2)^2 + (x^2\epsilon_1 - \delta^2)^2} - (x^2\epsilon_1 - \delta^2)}.$$

Будем считать, что  $\epsilon_1 > 1$ . Возможны случаи  $x^2\epsilon_1 < (\frac{1}{2})^2$  и  $x^2\epsilon_1 > (\frac{1}{2})^2$ . В первом случае следует рассмотреть три интервала:  $|\delta| \leq x$ ,  $x < |\delta| \leq x\sqrt{\epsilon_1}$  и  $x\sqrt{\epsilon_1} < |\delta| \leq \frac{1}{2}$ , во втором случае — два интервала:  $|\delta| \leq x$  и  $x < |\delta| < \frac{1}{2}$ .

При  $|\delta| < x$  и  $\delta \neq 0$  условие  $G(\delta) = 0$  сводится к следующему:

$$\delta(P_+ + P_{-}) + \frac{i}{2}(\sqrt{x^2 - \delta^2} + M_1 + iM_2)(P_+ - P_{-}) = 0,$$

откуда следует

$$\begin{cases} \delta(P_+ + P_{-}) - \frac{1}{2}M_2(P_+ - P_{-}) = 0, \\ (\sqrt{x^2 - \delta^2} + M_1)(P_+ - P_{-}) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} P_+ + P_{-} = 0, \\ P_+ - P_{-} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Последняя система не имеет смысла при  $|\delta| \leq \frac{1}{2}$ , следовательно, при  $|\delta| \leq x$ ,  $\delta \neq 0$   $G(\delta) \neq 0$ . При  $\delta = 0$   $\frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)}$  и  $\frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)}$  стремятся к конечным пределам.

Такая же противоречивая система (13) получается в остальных случаях; таким образом,  $G(\delta) \neq 0$  при  $|\delta| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\delta \neq 0$ .

Дифракционное поле получается в виде бесконечной суммы определенных интегралов. Так как подынтегральные функции ограничены, то каждый из этих интегралов есть ограниченная функция. Присутствие множителя  $e^{-qz'_0 \operatorname{sign} q}$  обеспечивает быструю сходимость этой суммы при  $z'_0 > 0$ . Определенные интегралы, входящие в сумму, могут быть вычислены численными методами.

При  $z'_0 = 0$  система уравнений для коэффициентов  $b_n(\tau)$ , получающаяся из граничных условий, дает тривиальное решение, даже если источник расположен в щели. Из физических соображений поле в этом

случае должно быть отличным от нуля, поэтому здесь необходимо специальное исследование.

3. Найдем поле при  $z > 0$ .

Из (3) следует

$$B(\tau) + a_0 = b_0,$$

$$a_n = b_n; \quad n \neq 0. \quad (14)$$

На основании (14), (1) и (3)

$$\begin{aligned} E_x^1 = & K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}|z-z_0|+i\tau(y-y_0)} d\tau - K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}(z+z_0)+i\tau(y-y_0)} d\tau +}{\sqrt{k^2-\tau^2}} \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}z+i\tau ny} d\tau = K\pi [H_0^{(1)}(kr_1) - H_0^{(1)}(kr_2)] + \\ & + \frac{2\pi}{i} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \{b_0^q(\delta) e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}z'+i\delta y} + b_{-1}^q(\delta) e^{i\sqrt{x^2-(\delta-1)^2}z'+i(\delta-1)y'}\} d\delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x^1(y'_0, z'_0, y', z') = & K\pi [H_0^{(1)}(xr'_1) - H_0^{(1)}(xr'_2)] + \sum_{q=-\infty}^{\infty} N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') + \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z'), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$r'_1 = \sqrt{(y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2}$  — расстояние от источника до точки наблюдения,

$r'_2 = \sqrt{(y' - y'_0)^2 + (z' + z'_0)^2}$  — расстояние от изображения источника до точки наблюдения,

$$\begin{aligned} N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') &= iK \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}(z'_0+z') + i\delta(y'-y'_0)} d\delta, \\ N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') &= \\ &= iK e^{-iqy'_0 - qz'_0 \operatorname{sign} q} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}z' + i\delta(y'-y'_0) - iqz'_0 \operatorname{sign} q} d\delta, \\ N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') &= iK e^{-iy'} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}(z'_0+z') + i\delta(y'-y'_0)} d\delta, \quad (15') \\ N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') &= \\ &= iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0 \operatorname{sign} q} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-(\delta-1)^2}z' + i\delta(y'-y'_0) - iqz'_0 \operatorname{sign} q} d\delta. \end{aligned}$$

Поле при  $z > 0$  оказывается суперпозицией полей от источника, от изображения источника и дифракционного поля, обусловленного наличием решетки.

4. Рассмотрим поле при  $z < 0$  в случае  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $z'_0 \rightarrow \infty$ . Тогда  $G(\delta) = G_1(\delta) = \delta(P_+ + P_-) + i\sqrt{x^2 - \delta^2}(P_+ - P_-)$ ;

$$F_0^0 = iK \int_{-z'_0}^{z'_0} \frac{D_0^0(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta;$$

$$F_0^q = iK e^{-iqy'_0 - qz'_0 \text{ sign } q} \int_{-z'_0}^{z'_0} \frac{D_0^q(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 - \delta^2}z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0 \text{ sign } q} d\delta,$$

$$F_{-1}^0 = iK e^{-iy'} \int_{-z'_0}^{z'_0} \frac{D_{-1}^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}z'_0 - i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2}z' + i\delta(y' - y'_0)} d\delta,$$

$$F_{-1}^q = iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0 \text{ sign } q} \int_{-z'_0}^{z'_0} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2}z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0 \text{ sign } q} d\delta.$$

Найдем  $F_0^0$  при больших  $z'_0$ . Запишем  $F_0^0$  в виде суммы

$$F_0^0 = iK \left( \int_{-z'_0}^{-x} + \int_{-x}^{z'_0} + \int_{z'_0}^{z'_0} \right).$$

Для оценки второго интеграла при больших  $z'_0$  используем метод стационарной фазы [5], первый и третий интегралы оцениваем методом Лапласа [5].

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{z'_0} \frac{D_0^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx iK \frac{\sqrt{2\pi x}}{\sqrt{z'_0}} \frac{\ln \frac{1+u}{2} e^{ixz'_0} e^{-ixz'}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}}; \\ \int_{-x}^{z'_0} \frac{D_0^q(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-\sqrt{\delta^2 - x^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx 2a_0 e^{ix(y' - y'_0)} \left( \frac{1}{2xz'_0} \right)^q; \\ \int_{-z'_0}^{-x} \frac{D_0^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-\sqrt{\delta^2 - x^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx 2a_0 e^{-ix(y' - y'_0)} \left( \frac{1}{2xz'_0} \right)^q; \end{aligned}$$

$$a_0 = \text{const.}$$

Здесь выписаны главные члены разложения интегралов по степеням  $\frac{1}{z'_0}$  при больших  $z'_0$ . Очевидно, что  $|F_0^q| \ll \text{const } e^{-(|q| - \frac{1}{2})z'_0}$ . Следовательно, при больших  $z'_0$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y'_0, z'_0, z', y') \approx iK \frac{\sqrt{2\pi x}}{\sqrt{z'_0}} \frac{\ln \frac{1+u}{2} e^{ixz'_0} e^{-ixz'}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}}. \quad (16)$$

Источник нужно удалять на бесконечность таким образом, чтобы поле в данной точке пространства не изменялось, поэтому амплитуду его

тока  $I$  необходимо увеличить при этом в  $\sqrt{z'_0}$  раз. Если выбрать амплитуду тока в точке  $(z_0, y_0)$  из условия

$$-\frac{kl\sqrt{2\pi z}}{c} \frac{e^{ixz'_0}}{x\sqrt{z'_0}} = 1, \text{ то при } z'_0 \rightarrow \infty$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') \approx \frac{ix \ln \frac{1+u}{2}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}} e^{-ixz'} = b_0 e^{-ikz}.$$

Это нулевая гармоника прошедшей волны при нормальном падении плоской волны единичной амплитуды на такую решетку, расположенную в свободном пространстве [1]. Аналогично можно показать, что

$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z')$  при  $z'_0 \rightarrow \infty$  переходит в  $(-1)$ -ую гармонику прошедшей волны при нормальном падении, которая быстро затухает при удалении от плоскости решетки.

5. При  $u \rightarrow -1$  ширина лент приближается к нулю, и периодическая плоскость раздела переходит в границу «свободное пространство — диэлектрик». Чтобы получить правильный предельный переход в этом случае, будем исходить из точного выражения для поля в области 2, которое запишем следующим образом:

$$E_x^2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} b_s^q(\delta) e^{-i\sqrt{v_s^2 - (s+\delta)^2} z' + i(s+\delta) y'} d\delta. \quad (17)$$

Функции  $b_s^q(\delta)$  необходимо найти из системы (9) при  $u \rightarrow -1$ . Заметим, что  $V_m^q(-1) = 0$ ,  $m \neq n$ ;  $V_0^0(-1) = 1$ ;  $V_0^{-1}(-1) = 1$ ;

$$V_{-1}^{-1} = 0; \quad V_n^n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} \mu_{n+1-p}(u) P_{p-n-1}(u) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n \mu_{k+1}(u) P_k(u) + \mu_0 P_{-1} + \mu_1 P_0 \right]; \quad (18)$$

$$V_n^n(-1) = 1 \text{ при } n \geq 0.$$

Коэффициенты  $\mu_k(u)$  определены в [1]. Легко проверить, что  $V_{-1}^{-1} \left| \frac{n}{n} \right| = -V_{-1}^{-1} \left| \frac{n}{-2} \right|$ , поэтому при любых  $s$  справедливо равенство

$$\frac{|s|}{s} r_s V_s^s(-1) = 1. \quad (19)$$

Кроме того,  $R_m(u) = \frac{1}{2} P_m(u)$ ;  $P_m(-1) = (-1)^m$ ,  $R_m = \frac{1}{2} (-1)^m$ . Разделим первое уравнение системы (9) на  $R_{[0]}$ :

$$|R_{[0]}(u)|_{u \rightarrow -1} \rightarrow \infty.$$

На основании приближенного соотношения [6]

$$P_{[0]}(u) \approx 1 + 2\delta \ln \frac{1+u}{2},$$

справедливого при  $u \rightarrow -1$ , можно показать, что

$$\lim_{u \rightarrow -1} \frac{P_{s-2}(u)}{P_{s-1}(u)} = -1;$$

следовательно,

$$\lim_{u \rightarrow -1} \frac{V_{[s]}^s(u)}{R_{[s]}(u)} = \begin{cases} 0, & s \neq -1; \\ 2 & s = -1. \end{cases}$$

С учетом всех этих соотношений система (9) упрощается:

$$\begin{aligned} -ih'_{-1} B^{-1} + x_{-1}^{-1}(1 - r_{-1}) &= 0, & q = -1; \\ x_{-1}^q(1 - r_{-1}) &= 0, & q \neq -1; \\ iH\delta_0^q - ih'_{1q} B^q V_0^q + x_{-1}^q(1 - r_{-1}) &= 0, \\ -ih'_{1q} B^q V_m^q + x_m^q r_m + (-1)^m x_{-1}^q &= x_m^q \quad m \neq 0; -1, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (h'_{10} + h'_{20}).$$

Система (20) легко решается:

$$\begin{aligned} x_{-1}^q &= \begin{cases} 0, & q \neq -1; \\ \frac{ih'_{-1,-1} B^{-1}}{1 - r_{-1}}, & q = -1; \end{cases} \\ b_0^q &= \frac{1}{iH} [ih'_{1q} B^q V_0^q - x_{-1}^q(1 - r_{-1})] = \begin{cases} 0, & q \neq 0; \\ \frac{h'_{10} B^0}{H}, & q = 0. \end{cases} \\ x_m^q &= \frac{1}{r_m - 1} [ih'_{1q} B^q V_m^q - (-1)^m x_{-1}^q] = \begin{cases} 0, & m \neq q; \\ \frac{ih'_{1q} B^q V_q^q}{r_q - 1}, & m = q. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись (7) и (18), получим

$$r_q - 1 = \frac{iH}{|q + \delta|}, \quad V_q^q \frac{|q + \delta|}{q + \delta} = 1,$$

в решение системы (20) можно записать так:

$$b_s^q = \begin{cases} 0, & s \neq q \\ \frac{h'_{1q} B^q}{H}, & s = q \end{cases} \text{ для любых } s \text{ и } q$$

Двойная сумма в (17) переходит в простую сумму. Подставляя найденные коэффициенты  $b_s^q$  в (17) и учитывая, что

$$h'_{1q} B^q = K e^{i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z'_0 - i(q+\delta) y_0},$$

приходим к следующему выражению для поля в области 2 при  $u = -1$ :

$$E_z^2 = K \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{2 \exp[i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z'_0 - i \sqrt{x^2 \varepsilon - (q+\delta)^2} z' + i(q+\delta)(y' - y'_0)] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 \varepsilon - (q+\delta)^2}}. \quad (22)$$

Это выражение является точным значением  $x$ -й составляющей вектора электрического поля внутри диэлектрического полупространства ( $z < 0$ ) при падении на него цилиндрической волны.

Зная функции  $b_2^q(\delta)$ , нетрудно найти поле в области 1 при  $u = -1$

$$E_x^1 = K\pi [H_0^{(1)}(xr_1') - H_0^{(1)}(xr_2')] + \\ + K \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' + i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} d\delta. \quad (23)$$

Если устремить  $\varepsilon$  к 1 в (22) и (23), то поля в областях 1 и 2 должны перейти в поле нити с током в свободном пространстве:

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' - i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 1} = \\ = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} (z_0' - z') + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [i \sqrt{x^2 - \zeta^2} (z_0' - z') + i \zeta (y' - y_0')] d\zeta}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} = \pi H_0^{(1)}(xr_1').$$

Аналогично

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' + i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} = \\ = \pi H_0^{(1)}(xr_2').$$

Таким образом, при  $u \rightarrow -1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$   $E_r^2 \rightarrow K\pi H_0^{(1)}(kr_1)$ ,

$$E_x^1 \rightarrow K\pi H_0^{(1)}(kr_1).$$

6. Если щели решетки сужаются, то она переходит в металлический экран, что соответствует  $u \rightarrow 1$ . В этом случае

$$V_m^n(1) = 0 \text{ при } m \neq n, \quad V_0^n = V_n^{-1} = 0, \quad P_k(1) = 1; \\ p_{k+1}(1) = 0, \text{ поэтому } V_n^n(1) = 0; \\ P_\delta(1)|_{\delta \rightarrow 0} = 1; \quad V_{[\sigma]}^2(1) = 0; \quad R_{[\sigma]}(1) = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} - \frac{1}{2\delta}.$$

Система (9) переходит в однородную систему

$$\begin{cases} -b_0^q = 2x_{-1}^q R_{[\sigma]}, \\ \delta b_0^q = x_{-1}^q, \\ x_m^q = x_{-1}^q, \quad m \neq -1; 0. \end{cases}$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2R_{[\sigma]} \\ -\delta & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\delta R_{[\sigma]} = \frac{\delta \pi}{\sin \delta \pi} \neq 0,$$

то эта система имеет только нулевое решение.

Дифракционное поле в области 2 обращается в нуль, а поле над экраном состоит из двух слагаемых:

$$E_x^1 = K\pi [H_0^{(1)}(kr_1) - H_0^{(1)}(kr_2)]$$

что совпадает, с учетом временной зависимости, с выражением, полученным Гринбергом [7].

Данная методика позволяет сравнительно просто рассчитывать подобные структуры при  $\kappa \leq 0,2$ . Если для вычисления коэффициентов  $b_n^{\pm}(\delta)$  брать систему более высокого порядка, чем второй, то диапазон  $\kappa$  можно расширить до 1 и далее.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 326, 4, 1962.
2. А. И. Адошина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 6, 1963.
3. Е. Н. Подольский. Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, 30, 1964.
4. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, ч. 1, ИЛ, М., 1960.
5. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. Физматгиз. М., 1962.
6. M. G. Grey. Quarterly of Applied Mathematics, V. XI, Oct. 1953, p. 311—318.
7. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ РЕШЕТКЕ

*Л. Н. Литвиненко*

Большое внимание, уделяемое в настоящее время теории дифракции электромагнитных волн на плоских ленточных решетках, обусловлено рядом причин. Во-первых, дифракционные решетки находят широкое применение в различных устройствах, особенно работающих в диапазоне весьма коротких волн. Во-вторых, разработка точной теории дифракции на решетках-объектах, относительно которых задачи дифракции и рассеяния могут быть решены весьма строго более или менее доступными средствами, позволяет глубже понять сущность процессов, происходящих при взаимодействии электромагнитных волн с более сложными периодическими структурами (например, кольцевые, спиральные волноводы и т. д.).

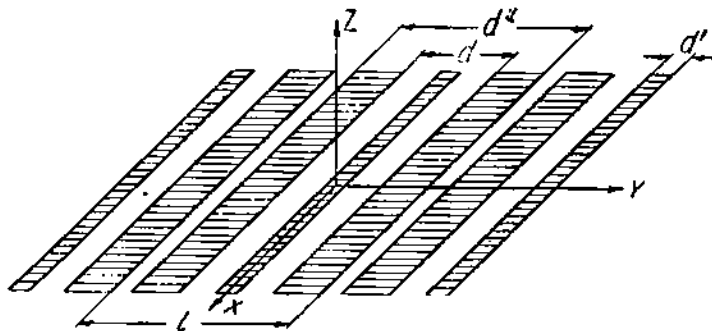


Рис. 1.

В силу этих же причин представляет интерес теория дифракции на периодических металлических решетках, у которых на период приходится по несколько металлических полос различной, вообще говоря, ширины (в дальнейшем такие решетки мы будем называть многоэлементными). Решетки с двумя лентами на период (двухэлементные) исследованы достаточно полно, и дифракция на них обнаруживает ряд специфических свойств [1], [2], [3].

В настоящей работе приводится решение задачи дифракции электромагнитных волн на 3-элементной симметричной решетке, т. е. решетке, имеющей три ленты на период, одна из которых отличается, вообще говоря, от двух других, и можно выбрать положение начала координат так, что относительно этого начала решетка будет симметричной (рис. 1).

Метод решения настоящей задачи является дальнейшим развитием метода, предложенного в работе [4].



Заметим сразу, что достаточно рассмотреть случай, например,  $E$ -поляризации падающей волны (вектор напряженности электрического поля параллелен лентам решетки), а для случая произвольной поляризации воспользоваться принципом двойственности и принципом суперпозиции, т. к. дополнительная решетка в этом случае также является симметричной трехэлементной.

## 1. СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ

### 1. Постановка задачи

Исследуемая периодическая решетка образована бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, расположенными так, что на период приходится по три ленты, одна из которых отличается по ширине от двух других. Расстояние между широкими лентами  $d$ , ширина узкой ленты  $d'$ , расстояние между внешними краями широких лент  $d''$ , период решетки  $l$ . Система координат (рис. 1) расположена так, что решетка находится в плоскости  $XOY$  и ось  $OX$  параллельна лентам, а начало координат выбрано точно посередине узкой ленты. Таким образом, ленты располагаются симметрично относительно начала координат. Будем считать, что решетка бесконечно протяженная вдоль осей  $OX$  и  $OY$ . Сверху ( $z > 0$ ) нормально к этой решетке падает плоская электромагнитная волна

$$E^{(\text{пад})} = E_0 e^{-ikz}; \quad H^{(\text{пад})} = H_0 e^{-ikz}$$

(здесь и далее предполагается, что поле зависит от времени как  $e^{-i\omega t}$ ). Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции такой волны на решетке.

Как отмечалось выше, достаточно рассмотреть случай  $E$ -поляризации падающей волны, т. е. случай, когда

$$E_x^{(\text{пад})} = e^{-ikz}; \quad E_z^{(\text{пад})} = E_y^{(\text{пад})} = 0. \quad (1.1)$$

В силу симметрии системы искомое электрическое поле также имеет отличную от нуля только  $x$ -составляющую, постоянную вдоль оси  $OX$  и периодическую (с периодом  $l$ ) вдоль оси  $OY$ . Поэтому это поле можно представить в виде ряда Фурье:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) e^{\frac{2\pi i n}{l} y},$$

и, следовательно, записать выражения для полей в верхнем и нижнем полупространствах в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x^1 &= e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\gamma_n z} e^{\frac{2\pi i n}{l} y}; & z > 0 \\ E_x^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-\gamma_n z} e^{\frac{2\pi i n}{l} y}; & z < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.3)$$

( $\lambda$  — длина падающей электромагнитной волны).

Отметим, что согласно характеру искомых полей (1.2) физический смысл имеет та ветвь корня в (1.3), у которой  $\text{Im} \sqrt{V} > 0$ , а при  $\text{Im} \sqrt{V} = 0$   $\text{Re} \sqrt{V} > 0$ .

Задача состоит в отыскании коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ .

## 2. Определение коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных спектров

Удовлетворение полей (1.2) граничным условиям на решетке (при  $z = 0$ ) приводит к следующим соотношениям:

$$1 + a_0 = b_0; \quad a_n = b_n \quad (n \neq 0)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \gamma_n e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = k \quad (\text{на щелях}). \quad (2.1')$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \chi_n &= 1 + i \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1}; \quad (n \neq 0); \quad x = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}; \\ \gamma_n &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} = \frac{2\pi |n|}{l} i (1 - \chi_n) \quad (n \neq 0); \\ \varphi &= \frac{2\pi y}{l}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \theta' = \frac{\pi d'}{l}; \quad \theta'' = \frac{\pi d''}{l}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$ .

В обозначениях (2.2) уравнения (2.1) и (2.1') примут вид

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} = 0; \quad \text{при } |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \theta''; & (2.3) \\ \sum_{n \neq 0} b_n |n| (1 - \chi_n) e^{in\varphi} = ix(b_0 - 1); \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta'' & (2.3') \end{cases}$$

Дифференцируя уравнение (2.3) по  $\varphi$  и полагая  $b_n n = X_n$ , получим

$$\begin{cases} \sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0 \quad \text{при } |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \theta''; & (2.4) \\ \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ix b_0 + f(e^{i\varphi}) \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta''. & (2.4') \end{cases}$$

Здесь  $f(e^{i\varphi}) = -i x + \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi}$ .

К системе (2.4) и (2.4') необходимо добавить равенства, получаемые из (2.3) при подстановке соответственно  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = +\delta$  и  $\varphi = -\delta$ , где  $\delta = \frac{\theta + \theta''}{2}$ ,

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n};$$

$$\begin{aligned}
 -b_0 &= \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} e^{in\delta}, \\
 -b_0 &= \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} e^{-in\delta}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Последние два равенства запишем несколько иначе:

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \cos n\delta; \tag{2.5'}$$

$$0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \sin n\delta. \tag{2.5''}$$

Системы, подобные (2.4) и (2.4'), решаются в [4] путем сведения к задаче Римана — Гильберта. В нашем случае решение можно провести аналогично, поэтому мы приведем здесь сразу окончательный результат. Предварительно введем следующие обозначения (рис. 2):

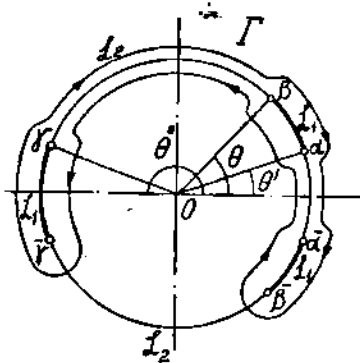


Рис. 2.

$$\left. \begin{aligned}
 R(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})(\xi - \beta)(\xi - \bar{\beta})(\xi - \gamma)(\xi - \bar{\gamma})} & \text{на дуге } L_1 \\ 0 & \text{на дуге } L_2 \end{cases} \\
 V_n(\xi_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\xi^n}{\xi - \xi_0} V(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})(\xi - \beta)(\xi - \bar{\beta})(\xi - \gamma)(\xi - \bar{\gamma}) d\xi; \\
 & \hspace{15em} (\xi_0 \in L_1), \\
 V_m^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta < \varphi < -\theta'} V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \\
 & \hspace{15em} \begin{matrix} -\theta < \varphi < -\theta' \\ \theta' < \varphi < \theta \\ \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta'' \end{matrix} \\
 R_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta < \varphi < -\theta'} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \\
 & \hspace{15em} \begin{matrix} -\theta < \varphi < -\theta' \\ \theta' < \varphi < \theta \\ \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta'' \end{matrix} \\
 R_{[0]} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \cos m\delta; \quad R_{[0]} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m}; \quad R_{[0]}^* = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \sin m\delta; \\
 R_{[0]}^{-1} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \cos m\delta; \quad \bar{R}_{[0]}^{(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m}; \quad R_{[0]}^{*(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \sin m\delta; \\
 R_{[0]}^{(-2)} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m} \cos m\delta; \quad \bar{R}_{[0]}^{(-2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m}; \quad R_{[0]}^{*(-2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m} \sin m\delta; \\
 U_{[0]}^n &= \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m} \cos m\delta; \quad V_{[0]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m}; \quad W_{[0]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m} \sin m\delta.
 \end{aligned} \right\} \tag{2.6}$$

Интегрирование в формуле для вычисления  $V_n(\xi_0)$  ведется по внутренней стороне дуги  $L_1$ , интеграл понимается в смысле главного значения. Для  $R(\xi)$  выбрана ветвь радикала, имеющая  $R(0) = 1$  (вычисление этих

величин дано в § 4). С помощью обозначений (2.6) решение нашей задачи может быть записано в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 0 &= ix b_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_3 R_0 + C_2 R_{-1} + C_1 R_{-2}) - ix V_0^0 \\
 -b_0 &= ix b_0 V_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_{[0]}^n + V_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 \bar{R}_{[0]} + C_2 \bar{R}_{[0]}^{(-1)} + C_1 \bar{R}_{[0]}^{(-2)}) - ix V_{[0]}^0 \\
 -b_0 &= ix b_0 U_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [U_{[0]}^n + U_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_{[0]} + C_2 R_{[0]}^{(-1)} + C_1 R_{[0]}^{(-2)}) - ix U_{[0]}^0 \\
 0 &= ix b_0 W_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [W_{[0]}^n + W_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_{[0]}^* + C_2 R_{[0]}^{*(-1)} + C_1 R_{[0]}^{*(-2)}) - ix W_{[0]}^0 \\
 X_m &= ix b_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_m^n + V_m^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_m + C_2 R_{m-1} + C_1 R_{m-2}) - ix V_m^0
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

(m ≠ 0)

Приведенная система (2.7) является бесконечной системой линейных неоднородных алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты  $b_0$  и  $b_n$ . Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — неизвестные промежуточные константы, а система выписана с учетом того, что  $\chi_{-n} = \chi_n$ . Коэффициенты системы (2.7) удовлетворяют условиям Коха, и решение ее может быть найдено методом редукции. Так как  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для численного решения системы можно положить  $\chi_n = 0$  при всех  $n > N$  и решать систему из некоторого конечного числа  $n$  уравнений.

### 3. Свойства трехэлементных симметричных решеток

При исследовании дифракционных свойств симметричных разнощелевой и равнощелевой двухэлементных решеток (рис. 3, б), в) проведенном в работах [1]—[2], отмечался факт слабого влияния на дифракционную картину узких щелей решетки

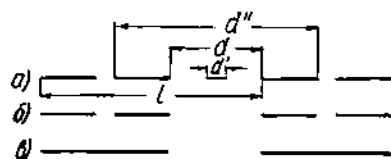


Рис. 3.

узкой ленты решетки типа в) в случае  $E$ -поляризации падающей электромагнитной волны и узких щелей решетки типа а) в случае  $H$ -поляризации. С другой стороны, влияние узкой ленты решетки типа в) и щели решетки типа б) в случаях  $E$ - и  $H$ -поляризации соответственно оказывается весьма существенным. Эти свойства связаны

с направлением токов на элементах решетки, наводимых падающим электромагнитным полем. В каждом случае влияние узкой ленты и щели сводится к повышению роли четных гармоник в дифракционном спектре. Поскольку трехэлементная симметричная решетка имеет узкую щель и узкую ленту, в ее дифракционном спектре также будут преобладать четные гармоники. Кроме того, если ширина узкой щели или ленты не превышает 0,05 периода (см. [2]), то дифракционные свойства трехэле-

ментной симметричной решетки в случае  $E$ -поляризации совпадают со свойствами решетки типа  $\alpha$ ), в случае  $H$ -поляризации — решетки типа  $\beta$ ). В этом случае можно пользоваться результатами расчетов, приведенных в [1] и [2]. Заметим еще, что если все ленты и щели трехэлементной симметричной решетки близки друг к другу по ширине, то в дифракционном спектре должны преобладать гармоники с номером, кратным 3. Если все ленты и щели равны по ширине, то в спектре отсутствуют все другие гармоники, кроме тех, номер которых кратен 3. Такая решетка эквивалентна одноэлементной решетке с периодом, в три раза меньшим  $l$ . Это свойство трехэлементной решетки может быть использовано для проверки правильности численных расчетов.

#### 4. Вычисление коэффициентов

##### 1. Полиномы $Q_n(u, v, w)$ .

Определим  $\Phi(z)$  как ветвь  $\sqrt{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z-\beta)(z-\bar{\beta})(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})}$ , голоморфную во всей плоскости  $z$  с разрезами вдоль разрывной дуги  $L_1$  (рис. 2), считая  $\Phi(0) = 1$ . Введем  $\Phi_1(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}$ ;  $\Phi_2(z) = \sqrt{(z-\beta)(z-\bar{\beta})}$ ;  $\Phi_3(z) = \sqrt{(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})}$ , причем  $\Phi_1(0) = 1$ ;  $\Phi_2(0) = 1$ ;  $\Phi_3(0) = 1$  и разрезы проведены между точками  $\bar{\alpha}$  и  $\alpha$ ,  $\bar{\beta}$  и  $\beta$  и  $\bar{\gamma}$  и  $\gamma$  соответственно. В таком случае  $\Phi(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z)\Phi_3(z)$ . Введем обозначения  $v = \cos \theta'$ ,  $u = \cos \theta$ ,  $w = \cos \theta''$ . Функция  $\frac{1}{\Phi_1(z)}$  является производящей

для полиномов Лежандра  $\frac{1}{\Phi_1(z)} = \sum_0^{\infty} P_n(v) z^n$  при  $|z| < 1$ ; аналогично  $\frac{1}{\Phi_2(z)} =$

$= \sum_0^{\infty} P_n(u) z^n$  при  $|z| < 1$  и, наконец, как показано в [2], для функции

$\frac{1}{\Phi_3(z)}$  также справедливо  $\frac{1}{\Phi_3(z)} = \sum_0^{\infty} P_n(w) z^n$  при  $|z| < 1$ .

Введем при  $|z| < 1$  разложение

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_0^{\infty} Q_n(u, v, w) z^n;$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(z)} &= \frac{1}{\Phi_1(z)\Phi_2(z)\Phi_3(z)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} P_k(v) z^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} P_j(u) z^j \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} P_i(w) z^i \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ \sum_{k=0}^n P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(v) P_{n-k-j}(w) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда

$$Q_n(u, v, w) = \sum_{k=0}^n (P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(v) P_{n-k-j}(w)) \quad (n \geq 0). \quad (4.2)$$

Рекуррентную формулу для  $Q_n(u, v, w)$  легко получить, дифференцируя (4.1) по  $z$  и приравняв затем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ :

$$(n-2)Q_{n-5} - (2n-3)(u+v+w)Q_{n-4} + (n-1)[3+4(uv+uw+vw)]Q_{n-3} - 2(2n-1)[u+v+w+2uvw]Q_{n-2} + n[3+4(uv+uw+vw)]Q_{n-1} - (2n+1)(u+v+w)Q_n + (n+1)Q_{n+1} = 0. \quad (4.3)$$

Для получения интегрального представления полиномов  $Q_n(u, v, w)$  необходимо воспользоваться формулой Коши. Учитывая, кроме (4.1), разложение

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{z^3} \sum_0^{\infty} Q_n(u, v, w) \frac{1}{z^n} \quad \text{при } |z| > 1,$$

легко получить

$$Q_n(u, v, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\substack{\delta^2 < |\varphi| < \delta \\ |\varphi| > \delta^2}} \frac{e^{i(n+3)\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi,$$

и, с другой стороны,

$$Q_n(u, v, w) = \frac{1}{\pi} \int_{\substack{\delta > |\varphi| > \delta^2 \\ |\varphi| > \delta^2}} \frac{e^{-in\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi.$$

Отсюда

$$Q_n(u, v, w) = -\frac{i}{\pi} \int_{\substack{\delta > |\varphi| > \delta^2 \\ |\varphi| > \delta^2}} \frac{e^{i\frac{3}{2}\varphi} \sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi.$$

Учитывая поведение функции  $\Phi(e^{i\varphi})$  на всем пути интегрирования, легко получить

$$Q_n(u, v, w) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{(v - \cos\varphi)(\cos\varphi - u)(\cos\varphi - w)}} - \int_{\delta^2}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{(v - \cos\varphi)(u - \cos\varphi)(w - \cos\varphi)}} \right]. \quad (4.4)$$

Отсюда очевидно (если этой формулой определить  $Q_n$  при любом  $n$ ), что

$$Q_{-n}(u, v, w) = -Q_{n-3}(u, v, w). \quad (4.5)$$

Непосредственное вычисление  $Q_{-1}$  по формуле (4.4) при  $n = -1$  приводит к  $Q_{-1} = 0$ . Так как  $Q_{-2} = -Q_{-1} = 0$ , то тем самым формулами (4.2), (4.3), (4.4) и (4.5) определены  $Q_n$  при любом  $n$ . Для удобства пользования формулой (4.3) выпишем

$$Q_{-2} = 0;$$

$$Q_{-1} = 0;$$

$$Q_0 = 1;$$

$$Q_1 = u + v + w;$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + (uv + uw + vw) - \frac{3}{2};$$

$$Q_3 = \frac{5}{2}(u^3 + v^3 + w^3) + \frac{3}{2}[u^2(v+w) + v^2(u+w) + w^2(u+v)] + \\ + uvw - \frac{5}{2}(u+v+w).$$

2. Вычисление  $R_m$ . По определению

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{\theta > |\varphi| > \theta \\ |\varphi| > \theta}} \frac{e^{-im\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi,$$

сравнивая с выражениями для  $Q_n(u, v, w)$ , находим

$$R_m = \frac{1}{2} Q_m(u, v, w).$$

3. Полиномы  $\mu_n(u, v, w)$ .

Введем

$$\sqrt{z^2 - 2uz + 1} \sqrt{z^2 - 2vz + 1} \sqrt{z^2 - 2wz + 1} = \\ = \begin{cases} \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) z^n, & (|z| < 1), \\ z^3 \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) z^{-n}, & (|z| > 1). \end{cases} \quad (4.6)$$

$$(4.6')$$

Дифференцируя (4.6) по  $z$ , получим

$$\sum_0^{\infty} Q_n z^n \{3z^2 - 5z^2(u+v+w) + 2z^2[3 + 4(uv + uw + vw)] - \\ - 6z^2(u+v+w + 2uvw) + z[3 + 4(uv + uw + vw)] - (u+v+w)\} = \\ = \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) n z^{n-1},$$

■ окончательно

$$\mu_{n+1} = Q_{n+1} - 2(u+v+w)Q_n + [3 + 4(uv + uw + vw)]Q_{n-1} - \\ - 4[u+v+w + 2uvw]Q_{n-2} + [3 + 4(uv + uw + vw)]Q_{n-3} - \\ - 2(u+v+w)Q_{n-4} + Q_{n-5}. \quad (4.7)$$

Если положить  $Q_n = 0$  при  $n < 0$ , то с помощью (4.7) легко определить значения  $\mu_n$  при любом  $n \geq 0$ .

4. Вычисление  $V_n(\xi_0)$ . Запишем  $V_n$  в несколько отличном от (2.6) виде:

$$V_n(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) dz;$$

контур  $\Gamma$  показан на рис. 2. На основании теоремы о вычетах имеем

$$V_n(\xi_0) = \text{Res}(0) + \text{Res}(\infty).$$

Для подсчета вычетов воспользуемся следующими разложениями подынтегральной функции:

$$\frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) = -z^n \sum_{\rho=0}^{\infty} \xi_0^{-\rho-1} z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(u, v, w) z^k \quad (|z| < 1),$$

$$\frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) = z^{n-1} \sum_{\rho=0}^{\infty} \xi_0^\rho z^{-\rho} z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(u, v, w) z^{-k} \quad (|z| > 1),$$

Отсюда

$$\text{Res}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \geq 0, \\ -\sum_{\rho=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-\rho}(u, v, w) \xi_0^{-\rho-1} & \text{при } n < -1, \end{cases}$$

$$\text{Res}(\infty) = \begin{cases} -\sum_{\rho=0}^{n+3} \mu_{n-\rho+3}(u, v, w) \xi_0^\rho & \text{при } n \geq -3, \\ 0 & \text{при } n < -3. \end{cases}$$

Окончательно, таким образом, получаем

$$V_n(\xi_0) = \begin{cases} -\sum_{\rho=0}^{n+3} \mu_{n-\rho+3}(u, v, w) \xi_0^\rho, & n \geq 0 \\ -\xi_0^{-1} - \mu_2 - \mu_1 \xi_0^{-1} - \xi_0^{-3}, & n = -1 \\ -\mu \xi_0^{-1} - \xi_0^{-2} - \mu_1 - \xi_0^{-1}, & n = -2 \\ -\mu_2 \xi_0^{-1} - \mu_1 \xi_0^{-2} - \xi_0^{-3} - 1, & n = -3 \\ -\sum_{\rho=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-\rho} \xi_0^{-\rho-1}, & n < -3. \end{cases} \quad (4.8)$$

### 5. Вычисление $V_m^n$ .

Воспользовавшись (2.6), (4.8) и интегральным представлением для  $Q_n(u, v, w)$ , легко находим

$$V_m^n = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{n+3} \mu_{n-\rho+3} Q_{m-\rho}, & n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} [Q_{m+1} + \mu_2 Q_m + \mu_1 Q_{m-1} + Q_{m-2}], & n = -1 \\ -\frac{1}{2} [\mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2} + \mu_1 Q_m + Q_{m-1}], & n = -2 \\ -\frac{1}{2} [Q_{m+3} + \mu_1 Q_{m+2} + \mu_2 Q_{m+1} + Q_m], & n = -3 \\ -\frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-\rho} Q_{m+\rho+1}. & n < -3 \end{cases} \quad (4.9)$$

### 6. Вычисление $\tilde{R}_{[a]}^{(-k)}$ , $R_{[a]}^{(-k)}$ и $\hat{R}_{[a]}^{(-k)}$ .

$$\tilde{R}_{[a]}^{(-k)} = \sum_{m=0} R_{m-k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0} \frac{Q_{m-k}}{m} = \frac{1}{2} \sum_{m=1} \frac{Q_{m-k} - Q_{-m-k}}{m}.$$



Воспользовавшись далее (4.4), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\sin\left(m-k+\frac{3}{2}\right)\varphi - \sin\left(-m-k+\frac{3}{2}\right)\varphi}{V(v-\cos\varphi)(\cos\varphi-u)(\cos\varphi-w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\sin\left(m-k+\frac{3}{2}\right)\varphi - \sin\left(-m-k+\frac{3}{2}\right)\varphi}{V(v-\cos\varphi)(u-\cos\varphi)(w-\cos\varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{m}}{V(v-\cos\varphi)(\cos\varphi-u)(\cos\varphi-w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{m}}{V(v-\cos\varphi)(u-\cos\varphi)(w-\cos\varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi (\pi-\varphi)}{V(v-\cos\varphi)(\cos\varphi-u)(\cos\varphi-w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi (\pi-\varphi)}{V(v-\cos\varphi)(u-\cos\varphi)(w-\cos\varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется

$$\begin{aligned} R_{[\sigma]}^{(-k)} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi \varphi}{V(v-\cos\varphi)(\cos\varphi-u)(\cos\varphi-w)} d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi (\pi-\varphi)}{V(v-\cos\varphi)(u-\cos\varphi)(w-\cos\varphi)} d\varphi \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(k)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ (\pi-\delta) \int_0^{\theta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi}{V(v-\cos\varphi)(\cos\varphi-u)(\cos\varphi-w)} d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \delta \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}-k\right)\varphi}{V(v-\cos\varphi)(u-\cos\varphi)(w-\cos\varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

7. Вычисление  $V_{[\sigma]}^n$ ,  $W_{[\sigma]}^n$  и  $U_{[\sigma]}^n$ . Воспользовавшись (4.9), легко получим

$$V_{[\sigma]}^n = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+3} \mu_{n-p+3} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-p)}, & n \geq 0 \\ -(\tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \mu_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + \mu_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-2)}), & n = -1 \\ -(\mu_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \tilde{R}_{[\sigma]}^{(2)} + \mu_1 \tilde{R}_{[\sigma]} + \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)}), & n = -2 \\ -(\tilde{R}_{[\sigma]}^{(3)} + \mu_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(2)} + \mu_2 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \tilde{R}_{[\sigma]}), & n = -3 \\ -\left(\sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(p+1)}\right), & n < -3 \end{cases} \quad (4.10)$$

$\bar{W}_{[\sigma]}^n$  и  $U_{[\sigma]}^n$  выражаются такими же формулами, только вместо  $\bar{R}_{[\sigma]}^{(k)}$  нужно писать  $\bar{R}_{[\sigma]}^{*(k)}$  и  $R_{[\sigma]}^{(k)}$  соответственно.

## II. СЛУЧАЙ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ

В случае наклонного (под углом  $\alpha$ ) падения электромагнитной волны на трехэлементную решетку поля запишутся в таком виде:

$$(z > 0) \quad E_x^{(1)} = e^{-ik(y \sin \alpha + z \cos \alpha)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i h_n y}.$$

$$(z < 0) \quad E_x^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i h_n y}.$$

Здесь

$$h_n = -k \sin \alpha + \frac{2\pi n}{l}; \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (n - x \sin \alpha)^2}.$$

Если ввести  $\bar{X}_n = b_n (n - x \sin \alpha)$  и  $\bar{Y}_n = 1 + i \sqrt{\frac{x^2}{(n - x \sin \alpha)^2} - 1}$ , то при этом

$$\gamma_n = \frac{2\pi l}{l} |n - x \sin \alpha| (1 - \bar{Y}_n).$$

и решение задачи дифракции, как показано, например, в [5], выражается следующей бесконечной системой линейных неоднородных уравнений (здесь введено обозначение  $x \sin \alpha = a$ ,  $j$  — целая часть  $a$ ; при этом  $a$  не равно целому числу).

$$\begin{aligned} \bar{X}_m = & -ix \cos \alpha V_m^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n V_m^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{X}_n V_m^n + \\ & + 2(C_1 R_{m-2} + C_2 R_{m-1} + C_3 R_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -ix \cos \alpha \bar{V}_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n \bar{V}_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{X}_n \bar{V}_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -ix \cos \alpha \bar{W}_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n \bar{W}_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{X}_n \bar{W}_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -ix \cos \alpha U_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n U_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{X}_n U_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}). \end{aligned}$$

Коэффициенты здесь выражаются следующими формулами:

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a}; \quad \bar{R}_{[\sigma]}^{(k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} \cos m\delta;$$

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{*(k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} \sin m\delta;$$

$$\bar{V}_{[a]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a}; \quad \bar{U}_{[a]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a} \cos m\delta; \quad \bar{W}_{[a]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a} \sin m\delta.$$

Остальные коэффициенты не зависят от величины угла падения и совпадают с соответствующими коэффициентами, полученными в решении задачи дифракции при нормальном падении электромагнитной волны.

Подсчитаем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[a]}^{(-k)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q_{-k}}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{Q_{m-k}}{m-a} - \frac{Q_{-m-k}}{m+a} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q_{-k}}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m(Q_{m-k} - Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} + \frac{a(Q_{m-k} + Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} \right] \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь (4.4), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(Q_{m-k} - Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - a^2} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(m-k + \frac{3}{2})\varphi - \sin(-m-k + \frac{3}{2})\varphi}{V(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(m-k + \frac{3}{2})\varphi - \sin(-m-k + \frac{3}{2})\varphi}{V(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - a^2} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sin m\varphi}{V(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sin m\varphi}{V(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2}}{V(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2}}{V(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\sin a\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sin a(\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(\frac{3}{2} - k)\varphi \sin a(\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным соотношением (см., например, [6]).

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2} = \pi \frac{\sin a(\pi - \varphi)}{2 \sin a\pi} \text{ при } 0 < \varphi < \pi \text{ и } a - \text{ не целое число.}$$

Подобным образом найдем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(Q_{m-k} + Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} &= \frac{Q_{-k}}{a} - \frac{1}{\sqrt{2} \sin a\pi} \left[ \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k\right)\varphi \cos a(\pi - \varphi)}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{1}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \left[ \int_0^{\delta} \frac{\sin\left[a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= -\frac{\cos a(\pi - \delta)}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k + a\right)\varphi}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi + \\ &\quad + \frac{\cos a\delta}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi - a\pi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi; \\ \check{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{\sin a(\pi - \delta)}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k + a\right)\varphi}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \\ &\quad - \frac{\sin a\delta}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi - a\pi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi. \end{aligned}$$

Для вычисления  $\bar{U}_{[\sigma]}^n$ ,  $\bar{V}_{[\sigma]}^n$  и  $\bar{W}_{[\sigma]}^n$ , как легко показать, можно пользоваться соотношениями (4.10), подставив в нашем случае вместо  $R_{[\sigma]}$ ,  $\bar{R}_{[\sigma]}$  и  $\check{R}_{[\sigma]}$  величины  $\bar{R}_{[\sigma]}$ ,  $\tilde{R}_{[\sigma]}$  и  $\check{R}_{[\sigma]}$  соответственно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. П. Шестопалову за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Гестриц, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов. «Уч. зап. ХГУ серия математическая», 32, 1963.
  2. Л. Н. Литвиненко. Изв. вузов. «Радиофизика» (в печати).
  3. Г. Н. Гестриц, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов. ЖТФ (в печати).
  4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 331, 1962.
  5. А. И. Адонина, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 33, 642, 1963.
  6. И. С. Рыжик, И. М. Градштейн. Таблицы, Физматгиз, М., 1962, стр. 54.
-

# ВЛИЯНИЕ РЕШЕТОК СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА ГЕНЕРАЦИЮ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОГО СЛОЯ

Л. Н. Литвиненко

## Постановка задачи

Плоскопараллельный слой оптически активного вещества является наиболее простой моделью квантовых генераторов и усилителей и может быть использован для предварительного анализа работы таких устройств. Здесь мы рассмотрим зависимость условий самовозбуждения, энергетических характеристик излучения от геометрической формы решеток при различных способах нанесения их на торцы слоя. Будем полагать, что на плоскопараллельный слой толщины  $a$  с произвольным показателем преломления  $N = N_0 + iN''$  идеально проводящие решетки наносятся следующими способами: а) слой с решеткой на одной из стенок, б) слой с решеткой на одной и идеальным зеркалом — на другой. Как понятно из простых физических соображений, последняя модель также эквивалентна плоскопараллельному слою удвоенной толщины, на стенки которого нанесены, одна над другой, идентичные ленточные решетки.

Конфигурация ленточных решеток, нанесенных на стенки слоя, показана на рис. 1. Здесь введены следующие обозначения:  $l$  — период решетки,  $d'$  — ширина узкой ленты,  $d$  — расстояние между широкими лентами.

Будем исследовать такое излучение, у которого вектор  $\vec{E}$  параллелен образующим лент (т. е.  $\vec{E} \parallel OX$ ). Независимо от способа нанесения решеток, возникшее за счет индуцированного излучения, электромагнитное поле будет периодически с периодом  $l$  как внутри, так и вне слоя. Следовательно, его удобно представить в виде ряда Фурье. Значения неизвестных коэффициентов Фурье в каждом случае мы определим путем отыскания такого решения уравнений Максвелла, которое подчиняется на торцах слоя точным граничным условиям: тангенциальная составляющая электрического поля на лентах решетки обращается в нуль, а на щелях тангенциальная составляющая электромагнитного поля непрерывна.

Для удобства рассмотрим разобьем все пространство на три области: I обл. —  $z > 0$ ; II обл. —  $-a < z < 0$ ; III обл. —  $z < -a$ . Внутри слоя (II обл.) электромагнитное поле представляет собой суперпозицию плоских волн, распространяющихся от одного торца слоя к другому. В I и III областях существуют уходящие от слоя волны, за исключением случая б). В последнем случае в III область электромагнитное поле не проникает.

Таким образом, излучаемое слоем электромагнитное поле можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_I &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih'_n z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \\ \vec{E}_{II} &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n e^{-ih_n z} + C_n e^{ih_n(z+a)}) e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \\ \vec{E}_{III} &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ih'_n(z+a)} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \end{aligned} \right\}$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — неизвестные коэффициенты Фурье, а величины

$$h'_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad h_n = \sqrt{k^2 N^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} \quad (2)$$

находятся из подчинения (1) волновому уравнению.

Для III области в случае б)  $D_n \equiv 0$ , множитель  $e^{-i\omega t}$  в (1) и дальше подразумевается. Вектор  $\vec{H}$  для каждой из областей определяется через  $\vec{E}$  из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{h'_n}{k} e^{ih'_n z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih'_n z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \frac{n}{x}, \\ \vec{H}_{II} &= \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-B_n e^{-ih_n z} + C_n e^{ih_n(z+a)}) \frac{h_n}{k} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n e^{-ih_n z} + \\ &\quad + C_n e^{ih_n(z+a)}) \frac{n}{x} e^{i2\pi n \frac{y}{l}}, \\ \vec{H}_{III} &= \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-D_n) e^{-ih'_n(z+a)} \frac{h'_n}{k} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ih'_n(z+a)} \frac{n}{x} e^{i2\pi n \frac{y}{l}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты прямоугольной системы координат,  $x = \frac{l}{\lambda}$ .

#### Условия самовозбуждения

1. Рассмотрим более подробно излучение слоем, показанным на рис. 1а. Подчиним электромагнитное поле выражений (1), (3) точным граничным условиям на одном периоде структуры:

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \quad E_{II} = E_{III} = 0 \quad (\text{на лентах}) \\ E_{II} = E_{III}; \quad H_{II} = H_{III} \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} z = -a \quad E_{III} = E_{III} = 0 \quad (\text{на лентах}) \\ E_{III} = E_{III}; \quad H_{III} = H_{III} \quad (\text{на щелях}) \end{aligned} \right\}.$$

В случае, когда  $\mu = 1$ , после подстановки уравнений (1) и (3) в (4) и (5) получим

$$A_n = B_n + C_n e^{ih_n a}; \quad D_n = B_n e^{ih_n a} + C_n; \quad D_n h'_n = h_n B_n e^{ih_n a} - C_n; \quad (6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left(1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n}\right) e^{i2h_n a} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad |y| < \frac{d'}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \quad (7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (h_n + h'_n) \left[1 - \frac{(h_n - h'_n)^2}{(h_n + h'_n)^2} e^{i2h_n a}\right] e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d'}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \quad (8)$$

Если обозначить

$$\left. \begin{aligned} X_n &= n B_n \left(1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n} e^{i2h_n a}\right) = n a_n \\ G_n &= \frac{1}{2} (h_n + h'_n) \left[1 - \frac{(h_n - h'_n)^2}{(h_n + h'_n)^2} e^{i2h_n a}\right] \left[1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n} e^{i2h_n a}\right]^{-1} \\ \varphi &= \frac{2\pi y}{l}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \theta' = \frac{\pi d'}{l}; \quad x = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и ввести параметр

$$\chi_n = 1 + iG_n \frac{t}{2\pi|n|} \quad (n \neq 0), \quad (10)$$

который при  $n \rightarrow \infty$  убывает как  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , то система уравнений (7) — (8) примет вид, аналогичный системе, рассмотренной в работе [1]:

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0; \quad |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \pi, \quad (11)$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ixG_0 \alpha_0 + \sum_{n \neq 0} \chi_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi}; \quad \theta' < |\varphi| < \theta, \quad (12)$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{X_n}{n} = -\alpha_0; \quad \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} = -\alpha_0. \quad (13)$$

Воспользовавшись полученными в работе [1] результатами, запишем сразу решение системы уравнений (11) — (13), которое имеет вид однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2, \alpha_0, X_n$ :

$$\left. \begin{aligned} ixG_0 V_0^0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_2 R_0 + C_1 R_{-1}) &= 0 \\ ixG_0 V_m^0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_m^n + V_m^{-n}] - X_m + 2(C_2 R_m + C_1 R_{m-1}) &= 0 \\ (ixG_0 V_{[\sigma]}^0 + 1) \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_{[\sigma]}^n + V_{[\sigma]}^{-n}] + 2(C_2 R_{[\sigma]} + C_1 R_{[\sigma]}^{(+1)}) &= 0 \\ (ixGW_{[\sigma]}^0 + 1) \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [W_{[\sigma]}^n + W_{[\sigma]}^{-n}] + 2(C_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + C_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(+1)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Коэффициенты  $V_m^n, R_m, V_{[\sigma]}^n, W_{[\sigma]}^n, R_{[\sigma]}, \tilde{R}_{[\sigma]}, R_{[\sigma]}^{(1)}, \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)}$  подсчитываются в работе [1].

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (14) (равенство нулю ее определителя) и является условием самовозбуждения слоя, показанного на рис. 1а. Так как для (14) пригоден метод редукции, то в наиболее простом случае можем ограничиться требованием  $X_1 = X_2 = \dots = 0$ . Тогда условие самовозбуждения будет иметь вид

$$ix\Delta G_0 + D = 0, \quad (15)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{[\sigma]} & R_{[\sigma]}^{(1)} & V_{[\sigma]}^0 \\ \tilde{R}_{[\sigma]} & \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} & W_{[\sigma]}^0 \\ R_0 & R_{-1} & V_0^0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} R_{[\sigma]} & R_{[\sigma]}^{(1)} & 1 \\ \tilde{R}_{[\sigma]} & \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} & 1 \\ R_0 & R_{-1} & 0 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Для удобства последующих выкладок запишем (15) в следующей форме:

$$\sqrt{r} \sqrt{\frac{r+t^2}{1+t^2}} e^{-2N^*Ka} = 1; \quad 2kN_0 a + \gamma = 2\pi s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (17)$$

где  $\frac{N-1}{N+1} = \sqrt{r} e^{i\delta}$ ;  $\operatorname{tg} \delta = -\frac{2N_0 N^*}{N_0^2 - 1 + (N^*)^2}$ ;

$$\frac{2D}{\alpha(N+1)\Delta} = t e^{-\delta_1}; \quad \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{N^*}{N_0 + 1};$$

$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} t + \tilde{\gamma}$  ( $\tilde{\gamma}$  — малая поправка).



2. Займемся теперь условиями излучения для слоя, показанного на рис. 16. Граничные условия для полей (1), (3) в этом случае имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \quad E_{1z} = E_{11z} = 0 \quad (\text{на лентах}) \\ E_{1z} = E_{11z} \quad H_{1z} = H_{11z} \quad (\text{на щелях}) \\ z = -a \quad E_{11z} = 0 \quad (\text{на всем периоде}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставив (1) и (3) в (18), получим связь между коэффициентами Фурье:

$$A_n = B_n + C_n e^{i h_n a}; \quad B_n = -C_n e^{i h_n a} \quad (19)$$

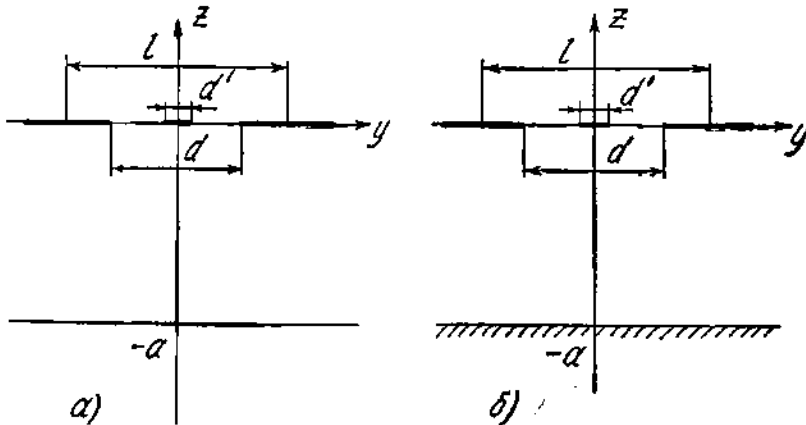


Рис. 1.

и систему уравнений относительно  $B_n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (1 - e^{i 2 h_n a}) e^{i 2 \pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad |y| < \frac{d}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}, \quad (20)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \{ h'_n (1 - e^{i 2 h_n a}) + h_n (1 + e^{i 2 h_n a}) \} e^{i 2 \pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d'}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \quad (21)$$

Если обозначить

$$Y_n = \beta_n n = B_n (1 - e^{i 2 h_n a}); \quad g_n = \frac{1}{2} \left\{ h'_n + h_n \frac{1 + e^{i 2 h_n a}}{1 - e^{i 2 h_n a}} \right\};$$

$$\eta_n = 1 + i g_n \frac{l}{2 \pi |n|} \quad (n \neq 0); \quad \varphi = 2 \pi \frac{y}{l}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \theta' = \frac{\pi d'}{l},$$

то после некоторых преобразований уравнениям (20) и (21) можно придать вид

$$\sum_{n \neq 0} Y_n e^{i n \varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \pi, \quad (22)$$

$$\sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} e^{i n \varphi} = i x g_0 \beta_0 + \sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} \eta_n e^{i n \varphi}, \quad \theta' < |\varphi| < \theta, \quad (23)$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{Y_n}{n} = -\beta_0; \quad \sum_{n \neq 0} \frac{Y_n}{n} = -\beta_0 \quad (24)$$

Систему уравнений (22) — (24) можно решить по аналогии с (11) — (13). Решение ее также будет иметь вид однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\beta_0$ ,  $Y_m$ ,  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} ixg_0 V_0^0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n (V_0^n + V_0^{-n}) + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1}) &= 0; \\ (m = 1, 2, \dots) ixg_0 V_m^0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n (V_m^n + V_m^{-n}) - Y_m + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) &= 0; \\ (ixg_0 V_{[\sigma]}^0 + 1) \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n (V_{[\sigma]}^n + V_{[\sigma]}^{-n}) + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^{(1)}) &= 0; \quad (25) \\ (ixg_0 W_{[\sigma]}^0 + 1) \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n (W_{[\sigma]}^n + W_{[\sigma]}^{-n}) + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)}) &= 0. \end{aligned}$$

Величины  $V_m^n$ ,  $R_m$ ,  $V_{[\sigma]}^n$ ,  $R_{[\sigma]}$ ,  $R_{[\sigma]}^{(1)}$ ,  $W_{[\sigma]}^n$ ,  $\tilde{R}_{[\sigma]}$ ,  $\tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)}$  такие же, как и в системе уравнений (14). Система линейных алгебраических уравнений (25) допускает получение решения методом редукции, поэтому в наиболее простом случае условие самовозбуждения имеет вид

$$ixg_0 \Delta + D = 0, \quad (26)$$

где  $D$  и  $\Delta$  совпадают с (16). После простых преобразований условию (26) можно придать вид, аналогичный (17):

$$\frac{r + t^2}{1 + t^2} e^{-4N^*ka} = 1; \quad 2kN_0 a + \gamma = 2\pi s. \quad (27)$$

Величины  $r$ ,  $t$ ,  $\gamma$  имеют вид (17).

Как видно, в условия самовозбуждения (17) и (27) входят величины  $D$  и  $\Delta$ , зависящие от конфигурации решетки, находящейся на стенках слоя. Следовательно, изменение геометрических размеров решетки повлечет за собой изменение условий генерации и несомненно скажется на энергетических характеристиках излучения — потоке мощности внутри слоя и плотности электромагнитной энергии.

### Энергетические характеристики излучения

Для рассматриваемого нами частного случая длинноволнового приближения  $\kappa \ll \frac{0.5}{N_0}$  в выражениях для электромагнитного поля следует ограничиться только гармониками с индексом  $n = 0$ . В этом случае поток мощности  $\vec{P}$  электромагнитного излучения, плотность электрической  $l$ , магнитной  $U_m$  энергии имеет следующий вид:

$$a) \vec{P}_a = -\vec{k} \frac{C}{N_0} U_0^a \left\{ \text{sh } k \left[ z + a \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right] + \zeta_a \sin \left[ (2\pi s - \gamma) \left( \frac{z}{a} + 1 \right) + \delta_0 \right] \right\}; \quad (28)$$

$$U_s^a = \frac{1}{2} U_0^a (1 - \zeta_a^2) \left\{ \text{ch } k \left[ z + a \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right] + \cos \left[ (2\pi s - \gamma) \left( \frac{z}{a} + 1 \right) + \delta_0 \right] \right\}, \quad (29)$$

$$U_m^a = \frac{1}{2} U_0^a (1 + \zeta_a^2) \left\{ \text{ch } k \left[ z + a \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right] - \cos \left[ (2\pi s - \gamma) \left( \frac{z}{a} + 1 \right) + \delta_0 \right] \right\}, \quad (30)$$

$$b) P_\delta = -\vec{k} \frac{C}{N_0} U_0^a \left\{ \text{sh } \left[ k \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_0} \right] + \zeta_\delta \sin \left[ (2\pi s - \gamma) \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (31)$$

$$U_s^0 = \frac{1}{2} U_0^0 (1 - \zeta_0^2) \left\{ \text{ch} \left[ k \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_0} \right] + \cos \left[ (2\pi s - \gamma) \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (32)$$

$$U_m^0 = \frac{1}{2} U_0^0 (1 + \zeta_0^2) \left\{ \text{ch} \left[ k \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_0} \right] - \cos \left[ (2\pi s - \gamma) \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \right] \right\}. \quad (33)$$

Здесь мы воспользовались условиями излучения (17) и (27) в виде

$$\text{а) } K_a = \ln R_a; \quad \text{б) } K_a = \frac{1}{2} \ln R_0, \quad (34)$$

где 
$$R_a = \sqrt{r} \sqrt{\frac{r+t^2}{1+t^2}}; \quad R_0 = \sqrt{\frac{r+t^2}{1+t^2}}; \quad (35)$$

$$\zeta_a = \frac{\lambda \ln R_a}{4\pi N_0 a}; \quad \zeta_0 = \frac{\lambda \ln R_0}{4\pi N_0 a}. \quad (36)$$

Для отыскания величин  $U_s^0, U_m^0$  следует привлечь нелинейную теорию оптических свойств плоскопараллельных слоев, согласно которой отрицательный коэффициент поглощения  $K$  зависит от плотности энергии внутри слоя  $U$  следующим образом:

$$K = \frac{K_0}{1 + aU}, \quad (37)$$

где  $a$  — параметр нелинейности;  $K_0$  — коэффициент поглощения данного вещества при  $U \rightarrow 0$ . Усредняя  $U = U_s + U_m$  по  $z$  с учетом (34), получим

$$U_s^0 = \frac{K_0 a - \ln R_a}{a(R_a - 1)} 2 \frac{\sqrt{r} R_a}{R_a + r}; \quad (38)$$

$$U_m^0 = \frac{K_0 2a - \ln R_0}{a(R_0 - 1)} \sqrt{R_0}. \quad (39)$$

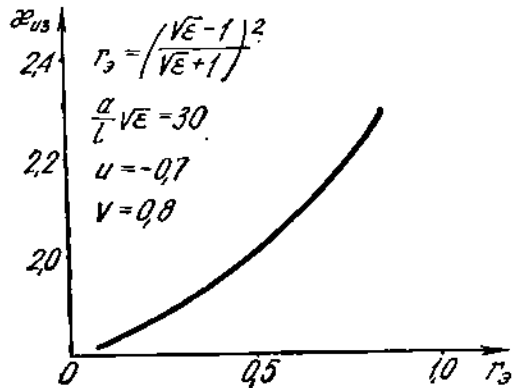


Рис. 2.

Поскольку обычно  $\frac{\lambda}{a} \ll 1$ , а  $R_a, R_0 \sim 1$ , то  $\zeta_a, \zeta_0 < 1$ , поэтому с большой степенью точности можно записать

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_a &= -k \frac{C}{N_0} U_0^a \text{sh} \left\{ k \left[ z + a \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right] \right\} \\ U_a &= U_s^a + U_m^a = U_0^a \text{ch} \left\{ k \left[ z + a \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_0 &= -k \frac{C}{N_0} U_0^0 \text{sh} \left[ k \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_0} \right] \\ U_0 &= U_s^0 + U_m^0 = U_0^0 \text{ch} \left[ k \left( \frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_0} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

На рис. 2 приведена зависимость частоты самовозбуждения  $\chi$  от параметров, характеризующих геометрические размеры решетки  $U = \cos \theta$ ;  $V = \cos \theta'$ , электродинамические свойства оптически активного вещества  $N_0$  и  $N''$ , относительную толщину слоя.

Заметим, что условия самовозбуждения (15) и (26) совпадают с условием равенства нулю определителя неоднородной системы уравнений, аналогичной (14), полученной в работе [2] при определении дифракционного спектра электромагнитного поля, нормально падающего на решетку

с прилегающим диэлектрическим слоем конечной толщины. Это естественно, так как бесконечно большому коэффициенту прохождения соответствует переход оптически активного слоя от режима усиления к режиму генерации (самовозбуждения).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. В. П. Шестопалову за ценные указания, использованные в настоящей работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. Записки мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковского матем. об-ва, т. 30, 4, 1964.
2. Л. Н. Литвиненко. Дифракционные свойства плоских металлических решеток специальной формы с диэлектриком и экраном, Изв. вузов, «Радиофизика» (в печати).
3. А. П. Хапалюк, Б. И. Степанов. Изв. АН БССР, сер. физ.-тех., № 4, 132, 1961.
4. О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. Оптика и спектроскопия, т. XV, 5, 709, 1963.

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВОЙНОЙ СКРЕЩЕННОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

В. В. Щербак

1. На рис. 1 изображена периодическая структура, состоящая из двух ленточных решеток, расположенных параллельно, на расстоянии  $r$  друг от друга. Направления щелей верхней и нижней решеток взаимно перпендикулярны. Ленты предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими.

Пусть на эту систему сверху ( $z > 0$ ) нормально к решеткам падает плоская монохроматическая волна

$$E_{\text{пад}}, \vec{H}_{\text{пад}} \sim e^{-ikz}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

и нам нужно найти полное поле дифракции.

Из соображений симметрии следует, что это поле периодически с периодом  $a$  в направлении  $x$  и с периодом  $b$  в направлении  $y$  и поэтому может быть разложено в двойной ряд Фурье:

$$E, H \sim \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} C_{n, m}(z) e^{ih_n y + ig_m x}; \quad h_n = \frac{2\pi}{b} n; \quad g_m = \frac{2\pi}{a} m; \quad (2)$$

$C_{n, m}(z)$  находим из решения волнового уравнения. При этом учитываем, что в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ) искомое поле является наложением падающей волны и суммы отраженных волн, распространяющихся (или затухающих) в направлении  $-z$ , а в нижнем полупространстве ( $z < -r$ ) имеем прошедшие волны, распространяющиеся или затухающие в направлении  $z$ .

Тогда  $x$ -е составляющие полей в трех областях запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_x^1 &= A e^{-ikz} + \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} a_{nm} e^{i\gamma_{nm} z + ih_n y + ig_m x}; \\ E_x^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + d_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + ig_m x}; \\ E_x^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} b_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + ig_m x}; \\ H_x^1 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} a'_{nm} e^{i\gamma_{nm} z + ih_n y + ig_m x} + B e^{-ikz}; \\ H_x^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c'_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + d'_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + ig_m x}; \end{aligned} \quad (3)$$

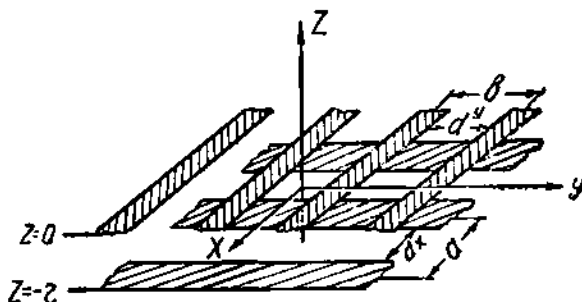


Рис. 1. Периодическая структура из двух ленточных решеток.

$$H_x^2 = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} b'_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i\beta_m x}. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_{nm} = \sqrt{k^2 - h_n^2 - g_m^2}$ ,  $A$  и  $B$  — амплитуды соответственно  $E_x$  и  $H_x$  составляющей падающей волны.

Остальные компоненты поля выражаются через  $E_x$  и  $H_x$  из уравнений Максвелла. Мы выпишем только выражения для  $y$ -х составляющих полей во второй ( $0 > z > -r$ ) и третьей ( $z < -r$ ) области:

$$\begin{aligned} H_y^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (C_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + D_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + i\beta_m x}; \\ H_y^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} B_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i\beta_m x}; \\ E_y^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (C'_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + D'_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + i\beta_m x}; \\ E_y^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} B'_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i\beta_m x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_{nm} &= -\frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} c_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} c'_{nm}; & C'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} c_{nm} + \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} c'_{nm}; \\ D_{nm} &= \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} d_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} d'_{nm}; & D'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} d_{nm} - \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} d'_{nm}; \\ B_{nm} &= \frac{-k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} b_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} b'_{nm}; & B'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} b_{nm} + \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} b'_{nm}. \end{aligned} \quad (5)$$

Амплитуды полей связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A\delta_n \delta_m + a_{nm} &= c_{nm} + e_{nm} d_{nm}; & -B\delta_n \delta_m + a'_{nm} &= -c'_{nm} + e_{nm} d'_{nm}; \\ b_{nm} &= c_{nm} e_{nm} + d_{nm}; & b'_{nm} &= c'_{nm} e_{nm} - d'_{nm} e_{nm} = e^{i\gamma_{nm}}; \end{aligned} \quad (6)$$

вытекающими из непрерывности составляющих  $E_x$  и  $E_y$  при  $z = 0$  и при  $z = -r$ .

Кроме того, имеем граничные условия, выполняющиеся на лентах и щелях решеток:

$$\begin{aligned} E_x^2 &= 0, & \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2}; & & H_x^2 &= H_x^1, & \frac{b-d^y}{2} < \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b}{2}; \\ \frac{\partial E_x^2}{\partial z} &= \frac{\partial E_x^1}{\partial z}, & |y| < \frac{d^y}{2}; & & \frac{\partial H_x^2}{\partial z} &= 0, & \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b-d^y}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

при  $z = 0$  и

$$\begin{aligned} E_y^3 &= 0, & \frac{d^x}{2} < |x| < \frac{a}{2}; & & H_y^3 &= H_y^2, & \frac{a-d^x}{2} < \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a}{2}; \\ \frac{\partial E_y^3}{\partial z} &= \frac{\partial E_y^2}{\partial z}, & |x| < \frac{d^x}{2}; & & \frac{\partial H_y^3}{\partial z} &= 0, & \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a-d^x}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

при  $z = -r$ .

Удовлетворяя этим граничным условиям, получим уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c_{nm} + e_{nm}d_{nm}) e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = A; \quad |y| < \frac{d^y}{2} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c'_{nm} e^{ih_n y + ig_m x} = B, \quad \frac{b-d^y}{2} < \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c'_{nm} - e_{nm}d'_{nm}) \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0; \quad \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b-d^y}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} D_{nm} e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{a-d^x}{2} < \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (D_{nm} - e_{nm}C_{nm}) \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0; \quad \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a-d^x}{2} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (D'_{nm} + e_{nm}C'_{nm}) e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{d^x}{2} < |x| < \frac{a}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} D'_{nm} \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0. \quad |x| < \frac{d^x}{2} \end{array} \right. \quad (12)$$

Рассмотрим первую пару этих уравнений. Так как (9) выполняются при любых  $x$ , то приравняв нулю коэффициенты при  $e^{ig_m x}$ , получим бесконечное количество пар более простых уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{np} + d_{np}e_{np}) e^{ih_n y} = 0, \quad \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{np} \frac{\gamma_{n,p}}{\gamma_{n,0}} e^{ih_n y} = A\delta_p, \quad |y| < \frac{d^y}{2} \end{array} \right. \quad (13)$$

каждую из которых решаем при помощи метода задачи Римана—Гильберта [1]. Подробно на решении уравнений (13) мы останавливаться не будем, поскольку уравнения, сходные с (13), исследованы в известных работах по дифракции. Заметим только, что при этом для каждой  $p$ -й пары уравнений (13) получается бесконечная система алгебраических уравнений (относительно  $e_{np}, d_{np}$ ). Всего, таким образом, имеем бесконечное количество таких систем. Вместе они образуют бесконечную двумерную систему уравнений

$$\begin{aligned} & - (1 - \delta_l) (c_{lp} + e_{lp}d_{lp}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{np} + e_{np}d_{np}) W_l^n \zeta_{np} = \\ & = A\delta_p W_l^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} e_{np} W_l^n (\zeta_{np} - |n|); \quad l, p = -\infty \dots \infty \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$W_l^n = V_l^n - V_0^n P_l, \quad l \neq 0; \quad W_0^n = V_0^n - 2V_0^n R_0; \quad u^y = \cos \frac{\pi d^y}{b};$$

$$\zeta_{np} = |n| + i \frac{x}{k} \gamma_{np}; \quad x = \frac{b}{\lambda};$$

а  $V_l^n$ ,  $V_0^n$ ,  $R_0$  — коэффициенты работы [1], выражающиеся через полиномы Лежандра  $P_n(u^y)$ .

Для уравнений (10) получим бесконечную систему ( $l, p = -\infty \dots \infty$ )

$$-(l - \delta_l)(c'_{lp} - \delta_l \delta_p B) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c'_{np} - \delta_n \delta_p B) \bar{W}_l^n \zeta_{np} =$$

$$= -B \delta_p \bar{W}_l^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} e_{np} \bar{W}_l^n (\zeta_{np} - |n|); \quad (15)$$

где  $\bar{W}_l^n(u^y) = (-1)^{l-n} W_l^n(-u^y)$ .

Для замыкания общей системы используем уравнения (11) и (12) из которых находим ( $l, p = -\infty \dots \infty$ ):

$$-(p - \delta_p) D_{lp} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{lm} \bar{W}_p^{1,0} \zeta'_{lm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{lm} e_{lm} \bar{W}_p^{1,m} (\zeta'_{lm} - |m|); \quad (16)$$

$$-(p - \delta_p) (D'_{lp} + e_{lp} C'_{lp}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (D'_{lm} + e_{lm} C'_{lm}) W_p^{1,m} \zeta'_{lm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_{lm} e_{lm} W_p^{1,m} (\zeta'_{lm} - |m|), \quad (17)$$

где  $\zeta'_{lm} = |m| + i \frac{x}{k} \frac{a}{b} \gamma_{lm}$ , а коэффициенты  $W_p^{1,m}$  и  $\bar{W}_p^{1,m}$  получаются соответственно из  $W_l^n$  и  $\bar{W}_l^n$  при замене  $u^y$  на  $u^x = \cos \frac{\pi d^x}{a}$ .

Уравнения (14)–(17) вместе с соотношениями (5) образуют замкнутую квазирегулярную систему. Эта система содержит два вида параметров малости,  $\frac{\zeta'_{np}}{n}$  и  $\frac{\zeta'_{lm}}{m}$  характеризуют взаимодействие между различными гармониками поля, возбужденными на одной из решеток, а  $e_{np}$  и  $e_{lm}$  характеризуют взаимодействие дифракционных волн, возбужденных на разных решетках. При численных расчетах полученная бесконечная система уравнений заменяется на конечную в результате отбрасывания малых величин. При этом чем больше (по сравнению с  $\lambda$  и  $r$ ) периоды  $a$  и  $b$  решеток, тем большее количество членов приходится удерживать.

2. Произведем дополнительные преобразования уравнений (14)–(17). Рассмотрим равенства (14). Считая в этой незамкнутой системе величины, стоящие справа, известными, применим к ней формулу Крамера. В результате выразим  $(c_{np} - e_{np} d_{np})$  через  $d_{np}$  и  $A$ .



Аналогично преобразуем (15), (16), (17). При этом получим новую квазирегулярную систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} c_{lp} &= A\delta_p T_{l-0}^{1,p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} R_{l-n}^{1,p} e_{np}, & (18) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c'_{lp} &= B\delta_p F_{l-0}^{1,p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_{np} K_{l-n}^{1,p} e_{np}, & (19) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{lp} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{lm} K_{p-m}^{2,l} e_{lm}, & (20) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D'_{lp} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_{lm} R_{p-m}^{2,l} e_{lm}, & (21) \end{aligned} \right.$$

содержащую только быстроубывающие параметры  $e_{np}$ ,  $e_{lm}$ .  
Здесь

$$R_{l-n}^{1,p} = T_{l-n}^{1,p} - \delta_{l-n}; \quad F_{l-n}^{1,p} = \delta_{l-n} - K_{l-n}^{1,p}.$$

$T_{l-n}^{1,p}$  — решение системы уравнений

$$-(l - \delta_l) T_{l-n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{k-n} W_l^k = W_l^n (c_{np} - |n|), \quad (22)$$

а  $K_{l-n}^{1,p}$  — решение системы, отличающейся от (22) заменой  $W_l^k$  на  $\overline{W}_l^k$ . При некоторых условиях удобно решать систему (5), (18) — (21) вместо системы (5), (14) — (17).

Заметим еще, что если падающая волна поляризована в направлении  $Ox$  ( $A$  или  $B$  равно нулю), то неизвестные амплитуды будут удовлетворять соответственно равенствам

$$C_{n,m} = C_{-n,m} = C_{n,-m}; \quad C'_{nm} = -C'_{-n,m} = -C'_{n,-m}$$

(аналогично для  $d_{nm}$ ,  $d'_{nm}$ )  
или

$$C_{n,m} = -C_{-n,m} = -C_{n,-m}; \quad C'_{n,m} = C'_{-n,m} = C'_{n,-m}.$$

Воспользовавшись этим, можем дополнительно преобразовать уравнения (18) — (21) так, что порядок системы сокращается вчетверо.

3. Для выяснения физического смысла коэффициентов (22) рассмотрим поведение поля на поверхности решеток ( $z=0$  и  $z=-r$ ). В установившемся режиме на первую решетку сверху набегают основная волна, а со стороны второй решетки — полный двумерный спектр дифракционных волн (с амплитудами  $d_{nm}$ ,  $d'_{nm}$ ). От решетки вниз также уходит полный спектр гармоник (амплитуды  $c_{nm}$ ,  $c'_{nm}$ ). Естественно, что амплитуда каждой из уходящих от решетки волн равна сумме амплитуд всех падающих волн, умноженных на соответствующие коэффициенты преобразования (волны с номером  $n, p$  в волну с номером  $l, p$ ). Аналогичные рассуждения — для волн приходящих и уходящих от второй решетки.

Таким образом, равенства (18) — (21) выражают связь между искомыми амплитудами и коэффициентами отражения, прохождения и преобразования при падении волн на одиночную решетку. При этом чем меньше расстояние  $r$  между решетками, тем большее количество приходящих волн вносит ощутимый вклад в каждую из уходящих, а значит, приходится в (18) — (21) учитывать большее количество членов.

В случае, когда взаимодействие между решетками происходит только на основной волне ( $\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda} < 1$ ;  $a$  достаточно велико), получим простое решение

$$\begin{aligned} c_{0,0} = -C_{0,0} &= A \frac{-T_{0-0}^{1,0}}{1 + R_{0-0}^{1,0} K_{0-0}^{2,0} (e_{0,0})^2}; & D_{0,0} = d_{0,0} &= c_{0,0} K_{0-0}^{2,0} e_{0,0} \\ c'_{0,0} = C'_{0,0} &= B \frac{F_{0-0}^{1,0}}{1 + R_{0-0}^{2,0} K_{0-0}^{2,0} (e_{0,0})^2}; & D'_{0,0} = -d'_{0,0} &= -c'_{0,0} R_{0-0}^{2,0} e_{0,0} \end{aligned} \quad (23)$$

Для  $c_{n,0}, c'_{n,0}, D_{0,m}, D'_{0,m}$  получаются аналогичные формулы. Остальные амплитуды в этом приближении равны нулю.

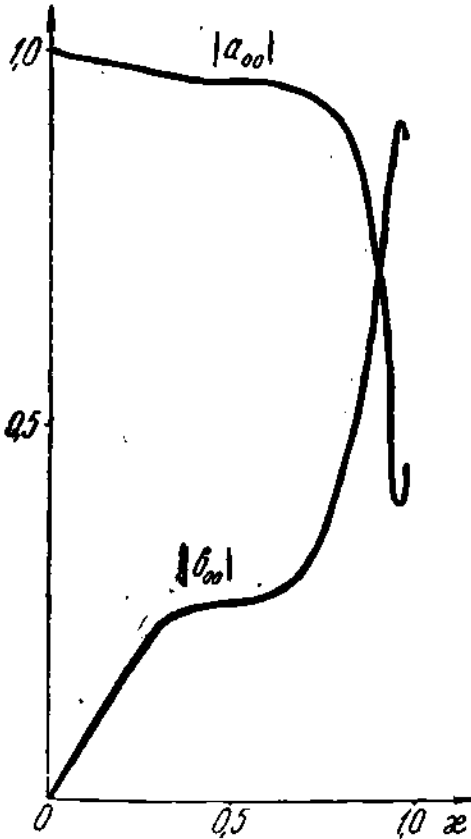


Рис. 2. Зависимость модулей коэффициента отражения  $|a_{00}|$  и коэффициента прохождения  $|b_{00}|$  от  $\frac{b}{\lambda}$  в случае падения  $E_x$ -поляризованной волны единичной амплитуды ( $A=1, B=0$ ) при  $U^x = U^y = 0, \frac{a}{b} = 1, \frac{r}{a} = 1$ . В данном частном случае эти кривые совпадают с кривыми для амплитуд  $a'_{00}, b'_{00}$ , отнесенных к  $B$ , в случае  $A=0, B=1$ .

Воспользовавшись соотношениями (6), по значениям амплитуд волн внутренней области ( $0 > z > -r$ ) определяем амплитуды  $b_n, b'_n$  прошедших и  $a_n, a'_n$  отраженных волн.

На рис. 2 представлены результаты, вычисленные с помощью формул (26), (6). Как и в случае обычных двойных решеток [4], в случае скрещенных проявляются резонансные явления, вызывающие «изрезанность» кривых.

Если решетки одинаковы ( $u^x = u^y; a = b$ ), то коэффициенты прохождения  $E_x$  и  $H_x$  — поляризованных волн совпадают в данном приближении (в общем случае — нет).

Существенное отличие рассмотренной в данной работе системы от приведенной в [4] заключается в том, что в дифракционном поле присутствуют обе поляризационные составляющие, даже если в падающем поле одна из них отсутствует ( $A$  или  $B$  равно нулю).

В случае малых  $r$  в (18) — (21) необходимо удерживать большее количество членов. Практически при этом можно получить решение для любых конечных  $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$  и даже при  $\frac{a}{r}, \frac{b}{r} \gg 1$  [3].

В заключение отметим, что уравнения (18) — (21) связывают решение для двойной скрещенной системы с решением для любых типов входящих в нее одинарных

решеток. Так, если одну или обе решетки в системе рис. 1 заменить решетками специальной геометрической формы, рассмотренными в работе [5] и [6], то достаточно подставить в (18) — (21) вместо коэффициентов (22) коэффициенты преобразования, соответствующие данным решеткам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 4, 1962.
2. Л. В. Конторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962, стр. 37.
3. М. И. Конторович, В. Ю. Петрунькина, Н. А. Есепкина, М. И. Астрахан. «Радиотехника и электроника», 7, 2, 1962.
4. О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 33, 10, 1962.
5. Л. Н. Литвиненко. «Известия вузов, Радиофизика», (в печати).
6. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов. Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковск. матем. об-ва, 30, 4, 1964.

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

В. А. Барегамян

1. Как известно, анизотропные среды можно характеризовать тензорами диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}_{ik}$  и магнитной —  $\hat{\mu}_{ik}$ , и связь между индукциями и напряженностями полей электромагнитных волн выражается формулой

$$\left. \begin{aligned} D_i &= \hat{\epsilon}_{ik} E_k \\ B_i &= \hat{\mu}_{ik} H_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обычно встречаются преимущественно среды с сильно выраженными магнитными (ферриты) или электрическими свойствами (кристаллы, плазма). В дальнейшем мы будем рассматривать последние. Таким образом, для диэлектрической анизотропной среды имеем

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z, \\ \vec{B} &= \vec{H}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Известно, что при определенном выборе систем координат тензор диэлектрической проницаемости принимает диагональный вид:

$$\hat{\epsilon}_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

т. е. свойства среды характеризуются тремя главными коэффициентами. В случае равенства двух из них ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_z$ ) анизотропная среда (кристалл) является одноосной.

Отметим, что при распространении в анизотропной среде плоские электромагнитные волны полностью линейно поляризованы в определенных плоскостях, за исключением оптических осей.

В настоящей работе строго решена задача о дифракции электромагнитных волн на металлической решетке, расположенной на полубесконечной диэлектрической анизотропной среде, являющейся одноосным кристаллом. Эта задача представляет значительный интерес не только в теории дифракции, но и при исследовании распространения электромагнитных волн в периодических структурах цилиндрического типа. Кроме того, она может быть использована для изучения черенковского излучения частиц.

2. На металлическую решетку, состоящую из периодически расположенных лент с шириной  $l-d$  ( $l$  — период решетки) падает в плоскости  $yoz$  плоская электромагнитная волна произвольной поляризации под любым углом. Решетка расположена в плоскости двух сред  $xoy$ . Ленты решетки параллельны оси  $ox$ . Первая среда является изотропным диэлектриком с показателем преломления  $n_1 = \sqrt{\epsilon}$  и расположена в полу-

пространстве  $z > 0$ ; вторая среда является анизотропным диэлектриком, заполняющим пространство  $z < 0$  (рис. 1).

В работе предполагается, что анизотропный диэлектрик является одноосным кристаллом с  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon$  и  $\epsilon_e$ . Оси координатной системы выбраны так, что ось кристалла параллельна оси  $oz$ . В данном случае волновые нормали падающей, отраженной, обыкновенной и необыкновенной волн остаются в плоскости падения (плоскость  $yoz$ ).

Предположим, что падает волна с амплитудами

$$\begin{aligned} \vec{E} &= A\vec{a} + B[\vec{n}\vec{a}], \\ \vec{H} &= A[\vec{m}\vec{a}] - Bn_1\vec{a}, \end{aligned} \tag{4}$$

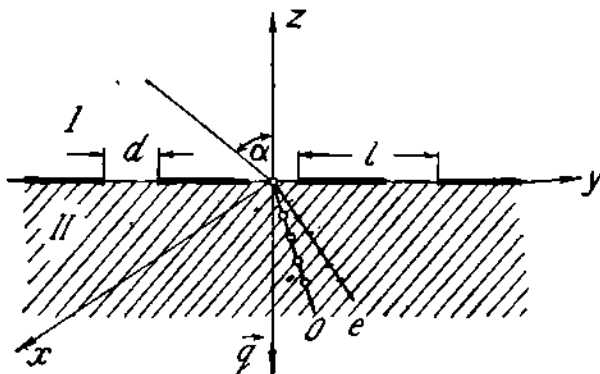


Рис. 1.

т. е., как видно из записи полей, векторы разложены на составляющие по направлению вектора  $\vec{a}$  и перпендикулярно к нему;  $\vec{a}$  — постоянный вектор, определяемый формулой

$$\vec{a} = [\vec{m}\vec{q}] = [\vec{m}'\vec{q}] = [\vec{m}_0\vec{q}] = [\vec{m}_e\vec{q}], \tag{5}$$

где  $\vec{q}(0, 0, -1)$  — нормаль к границе раздела двух сред, а  $\vec{m}$ ,  $\vec{m}'$ ,  $\vec{m}_0$ ,  $\vec{m}_e$  — векторы рефракции падающей, отраженной, обыкновенной и необыкновенной волн соответственно [4].

Чтобы получить падающую волну единичной амплитуды, обозначим

$$\begin{aligned} aA &= \cos \psi, \\ aB &= \sin \psi, \end{aligned} \tag{6}$$

тогда в новых обозначениях падающая волна имеет вид

$$\begin{cases} E_x = -\cos \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \\ E_y = \cos \alpha \sin \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \\ E_z = \sin \alpha \sin \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = n_1 \sin \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \\ H_y = n_1 \cos \alpha \cos \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \\ H_z = n_1 \sin \alpha \cos \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0y)} \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} h_0 &= n_1 k_0 \sin \alpha, \\ \gamma_{01} &= n_1 k_0 \cos \alpha \end{aligned} \tag{8}$$

( $\alpha$  — угол падения, а временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен).

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны (7) на решетке с анизотропным безграничным диэлектриком, запол-

няющим пространство  $z < 0$ . Так как решетка однородна вдоль направления  $ox$ , то искомые поля не будут зависеть от  $x$ . Они будут периодическими по направлению  $oy$ , т. е. постоянные распространения по оси  $oy$  можно представить в виде

$$h_{ni} = h_{0i} + \frac{2\pi n}{l}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (9)$$

Индекс  $i$  относится к разным волнам. Можно показать, что все  $h_{0i}$  равны между собой; тогда в дальнейшем можем опустить индекс  $i$ .

Воспользовавшись периодичностью решетки по направлению  $oy$ , разложим возникшие в результате дифракции составляющие полей в ряды Фурье. Эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{для отраженной волны } E_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(\gamma_{n1}z + h_{n1}y)}, \\ H_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\gamma_{n1}z + h_{n1}y)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{для обыкновенной волны } E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(-\gamma_{n20}z + h_{n1}y)},$$

$$\text{для необыкновенной волны } H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i(-\gamma_{n2e}z + h_{n1}y)}.$$

Остальные составляющие отраженных и прошедших волн получим из уравнений Максвелла, записанных отдельно для каждой волны. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{для отраженной волны } E_y &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n1}}{k_0 \epsilon} c_n e^{i(\gamma_{n1}z + h_{n1}y)}, \\ H_y &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n1}}{k_0} a_n e^{i(\gamma_{n1}z + h_{n1}y)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{для обыкновенной волны } H_y = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n20}}{k_0} b_n e^{i(-\gamma_{n20}z + h_{n1}y)},$$

$$\text{для необыкновенной волны } E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n2e}}{k_0 \epsilon_0} d_n e^{i(\gamma_{n2e}z + h_{n1}y)}.$$

В формулах (10) и (11)  $\gamma_{n1}$ ,  $\gamma_{n20}$  и  $\gamma_{n2e}$  определяются из решения волновых уравнений, написанных отдельно для отраженной, обыкновенной и необыкновенной волны соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} \gamma_{n1} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\epsilon x^2 - (n_1 x \sin \alpha + n)^2}, \\ \gamma_{n20} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\epsilon_0 x^2 - (n_1 x \sin \alpha + n)^2}, \\ \gamma_{n2e} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\epsilon_0 x^2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (n_1 x \sin \alpha + n)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x = \frac{l}{\lambda}$ .

Под значением корня в выражениях (12) понимаем те значения, которые дают затухающие волны в бесконечности или распространяющиеся от решетки в бесконечность.

3. Коэффициенты в выражениях (10) можем найти, используя граничные условия, т. е. равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля на металлических лентах, непрерывность тангенциальных составляющих магнитного поля и непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля на щелях.

Использование граничных условий приводит к следующим двум системам уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\cos \psi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} \\ n_1 \cos \alpha \cos \psi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n1}}{k_0} a_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n20}}{k_0} b_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} \quad (\text{на щелях}), \\ -\cos \psi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = 0 \quad (\text{на металле}) \end{array} \right. \quad (13)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \sin \psi - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n1}}{k_0 \epsilon} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n2e}}{k_0 \epsilon_0} d_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} \\ n_1 \sin \psi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} \quad (\text{на щелях}), \\ \cos \alpha \sin \psi - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n1}}{k_0 \epsilon} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n2e}}{k_0 \epsilon_0} d_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = 0 \quad (\text{на металле}). \end{array} \right. \quad (14)$$

В обеих системах первое и третье уравнения совпадают при всех значениях  $y$ , поэтому их коэффициенты должны тождественно совпадать, т. е. имеем

$$\begin{aligned} -\cos \psi + a_0 &= b_0; \quad a_n = b_n; \quad (n \neq 0) \\ n_1 \sin \psi - c_0 &= \frac{\epsilon \gamma_{02e}}{\epsilon_0 \gamma_{01}} d_0; \quad c_n = - \frac{\epsilon \gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{n1}} d_n. \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (15)$$

Это позволяет получить следующие системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_{n1} + \gamma_{n20}) b_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = -2n_1 k_0 \cos \alpha \cos \psi \quad (\text{на щелях}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = 0 \quad (\text{на металле}) \end{array} \right. \quad (16)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{\epsilon \gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{n1}} \right) d_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = 2n_1 \sin \psi \quad (\text{на щелях}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{n2e} d_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y} = 0 \quad (\text{на металле}). \end{array} \right. \quad (17)$$

Системы уравнений (16) и (17), как известно, приводятся к задаче Римана—Гильберта, решение которой впервые получено и детально разработано в [1].

4. Приведем решение уравнений (16), (17). Для этого обозначим

$$\xi_n^E = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon x^2}{(n_1 x \sin \alpha + n)^2} - 1} + \sqrt{\frac{\epsilon_0 x^2}{(n_1 x \sin \alpha + n)^2} - 1} \right\}, \quad (18)$$

$$x_n = b_n (n_1 x \sin \alpha + n), \quad \varphi = \frac{2\pi y}{l}$$

( $\xi_n^E \rightarrow 0$  как  $\frac{1}{n^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

Система уравнений (16) теперь принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n_1 x \sin \alpha + n|}{n_1 x \sin \alpha + n} x_n e^{in\varphi} = i n_1 x \cos \alpha \cos \varphi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n_1 x \sin \alpha + n|}{n_1 x \sin \alpha + n} \xi_n^E x_n e^{in\varphi} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\text{на металле}). \end{cases} \quad (19)$$

(на щелях),

К системе (19) необходимо добавить еще одно уравнение, которое получается из первого уравнения (16) при  $y = \frac{l}{2}$ :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{x_m}{n_1 x \sin \alpha + m} = 0. \quad (20)$$

Опуская промежуточные преобразования (19) [7], получим решение в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \bar{R}_s x_m = i n_1 x \cos \alpha \cos \varphi [\bar{R}_s V_m^0 - R_m \bar{V}_s^0] - 2 \sum_{n=-1}^{-1} x_n [\bar{R}_s V_m^n - R_m \bar{V}_s^n] + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n_1 x \sin \alpha + n|}{n_1 x \sin \alpha + n} x_n \xi_n^E [\bar{R}_s V_m^n - R_m \bar{V}_s^n], \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\bar{R}_s$ ,  $\bar{V}_s^n$ ,  $R_m$  и  $V_m^n$  имеют аргумент  $u = \cos \theta = \cos \frac{\pi d}{l}$ , а

$$\bar{R}_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{R_m}{n_1 x \sin \alpha + m}; \quad \bar{V}_s^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{V_m^n}{n_1 x \sin \alpha + m}. \quad (22)$$

Коэффициенты  $R_m$  и  $V_m^n$  имеют те же значения, что и в работе [1]. Решение системы (17) производим по аналогии с решением системы (16).

Обозначим

$$\xi_n^E = 1 + i \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon}}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_{n2e}}{(n_1 x \sin \alpha + n) \left(1 + \frac{\epsilon \gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{n1}}\right)}; \quad (23)$$

$$x_n = (n_1 x \sin \alpha + n) \left(1 + \frac{\epsilon \gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{n1}}\right) d_n, \quad \varphi = \frac{2\pi}{l} y;$$



тогда вместо (17) получаем

$$\begin{aligned} \bar{R}_\sigma X_m = & -2\epsilon x \sin \alpha \sin \psi [\bar{R}_\sigma V_m^0 - R_m \bar{V}_\sigma^0] - 2 \sum_{n=-1}^{-l} x_n [\bar{R}_\sigma V_m^n - R_m \bar{V}_\sigma^n] + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n_1 x \sin \alpha + n|}{n_1 x \sin \alpha + n} x_n \xi_n^H [\bar{R}_\sigma V_m^n - R_m \bar{V}_\sigma^n], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

где  $X_0 = x_0 - 2\epsilon x \sin \alpha \sin \psi$ ;  $X_m = x_m$ ,  $m \neq 0$ .

Здесь коэффициенты  $\bar{R}_\sigma$ ,  $\bar{V}_\sigma^n$ ,  $R_m$ ,  $V_m^n$  имеют аргумент

$$v = \cos(\pi - \theta) = \cos \frac{\pi(l-d)}{l} = -\cos \theta.$$

5. Для нахождения коэффициентов отражения (прохождения) обыкновенных и необыкновенных волн в длинноволновом приближении ( $x \ll 1$ ) достаточно взять системы уравнений (21) и (24) при  $m = 0$  соответственно:

$$x_0 \bar{R}_\sigma = i n_1 x \cos \alpha \cos \psi [\bar{R}_\sigma V_0^0 - R_0 \bar{V}_\sigma^0] + x_0 \xi_0^E [\bar{R}_\sigma V_0^0 - R_0 \bar{V}_\sigma^0], \quad (25)$$

$$X_0 \bar{R}_\sigma = -2\epsilon x \sin \alpha \sin \psi [\bar{R}_\sigma V_0^0 - R_0 \bar{V}_\sigma^0] + x_0 \xi_0^H [\bar{R}_\sigma V_0^0 - R_0 \bar{V}_\sigma^0], \quad (26)$$

где  $X_0 = x_0 - 2\epsilon x \sin \alpha \sin \psi$ .

Заметим, что коэффициенты  $\bar{R}_\sigma$ ,  $\bar{V}_\sigma^n$ ,  $R_0$ ,  $V_0^n$  в формуле (25) зависят от аргумента  $u$ , а в формуле (26) — от  $v$ .

Из уравнений (25) и (26) получим коэффициенты прохождения для обыкновенных и необыкновенных волн соответственно:

$$b_0 = \frac{i n_1 x \cos \alpha \cos \psi \ln \frac{1+u}{2}}{i \eta_0^E \ln \frac{1+u}{2} - 1}; \quad (27)$$

$$d_0 = A_0 \frac{1}{1 + i \eta_0^H \ln \frac{1+v}{2}}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_0^E &= \frac{x}{2} \{n_1 \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_0 - (n_1 \sin \alpha)^2}\}; \\ \eta_0^H &= (\epsilon + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_e}) \frac{x \gamma_{01} \sqrt{\epsilon_0 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (n_1 \sin \alpha)^2}}{\epsilon_0 \gamma_{01} + \epsilon \gamma_{02e}}; \\ A_0 &= 2 n_1 \sin \psi \frac{\epsilon_0 \gamma_{01}}{\epsilon_0 \gamma_{01} + \epsilon \gamma_{02e}}. \end{aligned} \quad (29)$$

6. Выражения тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей для основной гармоники в рассматриваемой нами задаче имеют вид

$$\begin{aligned} E_{x1} &= -\cos \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0 y)} + a_0 e^{i(\gamma_{01}z + h_0 y)}; \\ E_{x2} &= b_0 e^{i(-\gamma_{02e}z + h_0 y)}; \\ E_y &= \cos \alpha \sin \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0 y)} - \frac{\gamma_{01}}{k_0 \epsilon} c_0 e^{i(\gamma_{01}z - h_0 y)}; \\ E_{y2} &= \frac{\gamma_{02e}}{\epsilon_0 k_0} d_0 e^{i(-\gamma_{02e}z + h_0 y)}; \\ H_{x1} &= n_1 \sin \psi e^{i(-\gamma_{01}z + h_0 y)} + c_0 e^{i(\gamma_{01}z + h_0 y)}; \\ H_{x2} &= d_0 e^{i(-\gamma_{02e}z + h_0 y)}; \\ H_{y1} &= n_1 \cos \alpha \cos \psi e^{i(\gamma_{01}z + h_0 y)} + \frac{\gamma_{01}}{k_0} a_0 e^{i(\gamma_{01}z + h_0 y)}; \\ H_{y2} &= -b_0 \frac{\gamma_{02e}}{k_0} e^{i(-\gamma_{02e}z + h_0 y)}. \end{aligned} \quad (30)$$

В формулах (30) индексами 1 и 2 обозначены поля в первой и второй среде соответственно. Так как тангенциальные составляющие электрического поля непрерывны во всех точках плоскости раздела (щель + металл), т. е. на всем периоде решетки, то

$$\begin{aligned} E_{x1}|_{z=0} &= E_{x2}|_{z=0} = E_x|_{z=0}, \\ E_{y1}|_{z=0} &= E_{y2}|_{z=0} = E_y|_{z=0}. \end{aligned} \quad (31)$$

Учитывая (31), из (30) получим после несложных преобразований следующие эквивалентные граничные условия для магнитных составляющих поля:

$$|H_{y1} - H_{y2}|_{z=0} = \frac{1}{k_0} \frac{2\gamma_{01} \cos \psi + (\gamma_{01} + \gamma_{02}) b_0}{b_0} E_x|_{z=0}; \quad (32)$$

$$|H_{x1} - H_{x2}|_{z=0} = \frac{k_0}{\gamma_{01} \cdot \gamma_{02}} \cdot \frac{\epsilon_0 \gamma_{01} \cdot 2n_1 \sin \psi - (\epsilon_0 \gamma_{01} + \epsilon \gamma_{02})}{d_0} E_y|_{z=0}. \quad (33)$$

Они связаны между собой параметром  $\psi$ , который меняется при изменении ориентации векторов поля падающей волны в пространстве; тем самым изменяются соотношения между амплитудами обыкновенных и необыкновенных волн.

7. Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть первая среда имеет диэлектрическую постоянную, равную единице ( $\epsilon = n_1^2 = 1$ ), т. е. верхнее полупространство ( $z > 0$ ) заполнено воздухом, и решетка находится на границе раздела вакуум — изотропная среда. Тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды есть скалярная величина, т. е. в любой прямоугольной системе координат всегда является диагональным тензором с одинаковыми элементами. Обозначим этот элемент через  $\epsilon_1$ . Согласно сказанному выше, анизотропная среда превратится в изотропную, если ее параметры  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_z$  равны между собой, т. е. имеет место  $\epsilon_1 = \epsilon_0 = \epsilon_z$ . Предположим, что на решетку падает под углом  $\alpha$   $E$ -поляризованная волна, для чего достаточно взять  $\cos \psi = -1$ . Здесь минус показывает направление вектора электрической напряженности падающей волны; при таком выборе направление  $E_x$  совпадает с направлением, выбранным в работе [2].

При  $\sin \psi = 1$  падающая волна, как видно из (7), является  $H$ -поляризованной волной. Если  $\cos \psi = -1$  или  $\sin \psi = 1$ , наша задача превратится в задачу, решенную в работе [2], соответственно случаю  $E$ - или  $H$ -поляризации, если положить  $a \rightarrow \infty$ .

Полученные нами уравнения (21) для обыкновенных волн переходят в систему уравнений (12), а уравнения для необыкновенных волн (24) — в систему уравнений (21) работы [2] при  $a \rightarrow \infty$ .

Ясно, что при этом все выводы и результаты работы [2] остаются в силе для случая  $a \rightarrow \infty$ .

При  $a = 0$  анизотропная среда в нашей задаче ведет себя как изотропная, и в этом случае полученные результаты будут совпадать с результатами работы [1], если предполагать, что  $\epsilon_1 = 1$ , т. е. решетка находится в свободном пространстве.

Коэффициент прохождения (отражения) (27) обыкновенной волны в длинноволновом приближении переходит в коэффициент прохождения (отражения) (2)  $E$ -поляризованной волны работы [6]. Здесь мы предполагали, что решетка находится в свободном пространстве ( $\epsilon = \epsilon_1 = 1$ ). Эти коэффициенты отражения и прохождения при  $a = 0$  переходят в коэффициенты, впервые полученные Ламбом.

Коэффициент прохождения (отражения) необыкновенной волны (28) в длинноволновом приближении ( $k \ll 1$ ) переходит в коэффициент (4)  $H$ -поляризованной волны работы [6], если считать, что решетка находится в свободном пространстве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.
  2. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIII, вып. 6, 641, 1963.
  3. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. «Радиотехника и электроника», 1963, 8, 6, 950.
  4. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред, Минск, Изд-во АН БССР, 1958.
  5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М., ГИИТЛ, 1957.
  6. Н. Н. Смирнов. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1494, 1958.
  7. Г. Н. Гестрян, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 34, 12, 1964.
-

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ИСКУССТВЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ ЛЕНТОЧНОГО ТИПА

В. М. Скурлов

Свойства искусственных диэлектриков за последнее время изучены достаточно широко. В [1]—[7], а также в ряде других работ рассматриваются искусственные диэлектрики различных типов, различными способами вычисляются их параметры. Показано, что они могут обладать показателем преломления как большим, так и меньшим 1. Исследованы анизотропные свойства искусственных диэлектриков [4], [5], [7].

При анализе таких диэлектриков использовалось несколько методов. В методе Лоренца поле в среде находится как сумма приложенного поля и усредненного по объему ячейки поля, индуцированного всеми частицами. Эта идея лежит в основе работ Л. Л. Левина [5] и Н. А. Хижняка [6], [7], хотя у Хижняка она реализуется иначе. В электростатическом методе вводится фиктивная передающая линия, совпадающая с границами ячейки, и вычисляются емкость и индуктивность ячейки без рассеивающей частицы и при наличии ее. Отношения соответствующих емкостей и индуктивностей дают эффективные диэлектрические проницаемости среды. Довольно широко использовался метод, в котором искусственная среда сводится к периодически нагруженной линии или цепочке четырехполюсников, для расчета которых существуют достаточно эффективные методы анализа [2; 3; 4].

В настоящей работе вычисляются характеристики искусственной среды, состоящей из идеально проводящих бесконечно тонких металлических лент при произвольных поляризациях и углах падения. Исходным пунктом является точное решение электродинамической задачи о дифракции плоской волны на ленточной структуре достаточно произвольной конфигурации с помощью метода, разработанного в работе [8]. Эффективные характеристики ленточной среды находятся из сопоставления отраженных и прошедших полей для обычных диэлектриков и для рассматриваемой ленточной структуры.

1. Исследуемый искусственный диэлектрик представляет собой слой, состоящий из плоских периодических ленточных решеток. В каждой из них ленты бесконечны вдоль оси  $ox$ , периодичны с периодом  $l$  вдоль оси  $oy$  и предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими. На рис. 1 ленточная система изображена в поперечном разрезе. В каждой из плоскостей  $z = 0, z = z_2 \dots z = z_s \dots z = z_p$  решетка характеризуется шириной лент  $d_s$  и промежутком между лентами (щелью).  $s$  — номер некоторой произвольной внутрилежащей решетки. Последние расположены на произвольных расстояниях друг от друга ( $w_2, \dots w_s, \dots w_p$ ) и могут быть произвольно сдвинуты по отношению друг к другу на расстояния  $C_s$ . Ось  $z$  проходит через середину щели первой решетки, что не нарушает общности рассуждений. Сдвиг  $C_s$  центров щелей остальных решеток отсчитывается от оси  $z$ ; при сдвиге в сторону положительных  $y$   $C_s > 0$ , при сдвиге в сторону отрицательных  $y$   $C_s < 0$ . Под сдвигом понимается

наименьшее из возможных расстояний между осью  $z$  и центром щели решетки.

Номера решеток отсчитываются от верхней решетки:  $1, 2, \dots, s, \dots, p$ ; номера областей, на которые они разбивают пространство, обозначим  $1, 2, \dots, s, \dots, p, p+1$ . Область, лежащая над отдельной решеткой, имеет номер этой решетки; номер самой нижней области  $p+1$ .

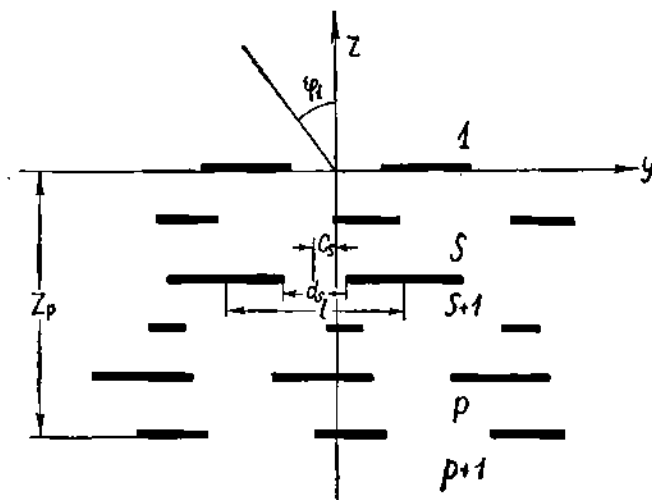


Рис. 1.

На этот слой под углом  $\varphi_1$  падает электромагнитная волна единичной амплитуды с вектором  $\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}$ , где

$$H_x = e^{-ikz \cos \varphi_1 + ik \sin \varphi_1 e^{-i\omega t}} \quad (1)$$

(множитель  $e^{-i\omega t}$  в дальнейшем будем опускать).

Решение для случая  $E$ -поляризации проводится аналогично решению для  $H$ -поляризации; последнее представляет несколько больший интерес, так как в этом случае среда должна вести себя как диэлектрик с магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ ; кроме того, этот случай рассматривался во многих работах и полученные результаты можно сравнивать с другими работами.

Поля, возникающие при наличии такой системы, должны быть периодичными по  $y$  и удовлетворять волновому уравнению, поэтому их следует искать в виде

$$\begin{aligned} H_x^1 &= e^{-i\gamma_1 z + ih_0 y} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n1} e^{i\gamma_n z} e^{ih_n y}, \\ H_x^s &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_{ns} e^{-i\gamma_n(z-z_s-1)} + a_{ns} e^{i\gamma_n(z-z_s)} e^{ih_n y}, \\ H_x^{p+1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n, p+1} e^{-i\gamma_n(z-z_p)} e^{ih_n y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}$ ,  $h_0 = k \sin \varphi_1$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}$ ,

$n$  — номер гармоники Фурье,

$a_{ns}$  — коэффициент отражения от  $s$ -й решетки для  $n$ -й гармоники (в области  $s$ );

$b_{ns}$  — коэффициент прохождения через  $(s - )$ -ю решетку для  $n$ -й гармоники (в области  $s$ ).

Из равенства нулю на лентах тангенциальной составляющей электрического поля и непрерывности полей на щелях решетки вытекают следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x^1}{dz} = \frac{dH_x^2}{dz} = 0, \quad \frac{d_1}{2} < |y + nl| \leq \frac{l}{2} \\ \frac{dH_x^1}{dz} = \frac{dH_x^2}{dz} \\ H_x^1 = H_x^2 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq |y + nl| \leq \frac{d_1}{2} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{dH_x^1}{dz} = \frac{dH_x^2}{dz} = 0, \quad \frac{d_1}{2} < |y + nl| \leq \frac{l}{2} \\ \frac{dH_x^1}{dz} = \frac{dH_x^2}{dz} \\ H_x^1 = H_x^2 \end{aligned}} \right\} z = 0,$$

$$\frac{dH_x^s}{dz} = \frac{dH_x^{s+1}}{dz} = 0, \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{l}{2} + C_s \leq y + nl < -\frac{d_s}{2} + C_s, \\ \frac{d_s}{2} + C_s < y + nl \leq \frac{l}{2} + C_s; \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\frac{dH_x^s}{dz} = \frac{dH_x^{s+1}}{dz} \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{d_s}{2} + C_s \leq y + nl \leq \frac{d_s}{2} + C_s \\ s = 2, 3, \dots, p \end{aligned} \right.$$

Если ввести  $y_s = y - C_s$  и  $\varphi_s = \frac{2\pi y_s}{l}$ , то металлу  $s$ -й решетки будет соответствовать  $\theta_s < |\varphi_s| < \pi$ , а щели той же решетки  $|\varphi_s| \leq \theta_s$ , где  $\theta_s = \frac{\pi d_s}{l}$ .

Граничные условия (3) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} & \gamma_0 \delta_{0n} \delta_{s1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n \omega_s} - a_{ns}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (b_{n, s+1} - g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n \omega_{s+1}}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = \begin{cases} 0, & \theta_s < |\varphi_s| < \pi; \\ \neq 0, & |\varphi_s| \leq \theta_s; \end{cases} \\ & \delta_{0n} \delta_{s1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n \omega_s} + a_{ns}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_{n, s+1} + g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n \omega_{s+1}}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s}, \quad |\varphi_s| \leq \theta_s. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta_{0n} = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ 1, & n = 0; \end{cases}$   $\delta_{s1} = \begin{cases} 0, & s \neq 1; \\ 1, & s = 1; \end{cases}$   $g_{s1} = \begin{cases} 1, & s \neq 1; \\ 0, & s = 1; \end{cases}$

$$g_{sp} = \begin{cases} 1, & s \neq p; \\ 0, & s = p; \end{cases} \quad a_n = \frac{2\pi n}{l}; \quad z_s - z_{s-1} = -\omega_s; \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

На основании равенства разложений Фурье согласно первым двум уравнениям (4), которое выполняется на всем периоде, получаем соотношение между коэффициентами

$$\delta_{0n} \delta_{s1} + g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n \omega_s} - a_{ns} = b_{n, s+1} - g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n \omega_{s+1}},$$

или

$$\delta_{0n} \delta_{s1} + g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n \omega_s} - b_{n, s+1} = a_{ns} - g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n \omega_{s+1}}. \quad (5)$$

Тогда третье уравнение (4) эквивалентно двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{0n}\delta_{s1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (g_{sp}b_{n, s+1}e^{i\gamma_n\omega_s+1} - b_{n, s+1}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{ns} - g_{sp}a_{n, s+1}e^{i\gamma_n\omega_s+1}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = 0 \end{aligned} \right\} |\varphi_s| \leq \theta_s. \quad (6)$$

Запишем первые два уравнения системы (4) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (g_{sp}a_{n, s+1}e^{i\gamma_n\omega_s+1} - b_{n, s+1}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} = 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (a_{ns} - b_{ns}e^{i\gamma_n\omega_s} g_{s1}) e^{i\alpha_n C_s} e^{i n \varphi_s} - \gamma_0 \delta_{0n} \delta_{s1} = 0 \end{aligned} \right\} \theta_s < |\varphi_s| \leq \pi. \quad (7)$$

Добавив к обеим частям первого уравнения (6) по

$$\gamma_0 \delta_{0n} \delta_{s1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n\omega_s + i\alpha_n C_s + i n \varphi_s},$$

а во втором уравнении (6) — по

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n\omega_s + 1 + i\alpha_n C_s + i n \varphi_s}$$

и введя

$$\left. \begin{aligned} D_{ns} &= (g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n\omega_s} - g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n\omega_s+1}) e^{i\alpha_n C_s}, \\ B_{ns} &= (g_{s1} b_{ns} e^{i\gamma_n\omega_s} - b_{n, s+1}) e^{i\alpha_n C_s} + \delta_{0n} \delta_{s1}, \\ A_{ns} &= (a_{ns} - g_{sp} a_{n, s+1} e^{i\gamma_n\omega_s+1}) e^{i\alpha_n C_s}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

получим две одинаковые системы уравнений. Система, в которой неизвестными считаются коэффициенты  $A_{ns}$  при фиксированном  $s$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ns} e^{i n \varphi_s} = 0, \quad |\varphi_s| \leq \theta_s \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ns} \gamma_n e^{i n \varphi_s} = \gamma_0 \delta_{0n} \delta_{s1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{ns} \gamma_n e^{i n \varphi_s}, \quad \theta_s < |\varphi_s| \leq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для неизвестных  $B_{ns}$  при фиксированном  $s$  получается точно такая же по виду система, в которой  $A_{ns}$  заменены на  $B_{ns}$ . Поэтому достаточно рассмотреть только систему (9). Заметим, что в работе [9], где рассмотрена многослойная структура более частного вида, вторая система вида (9) не решалась; вместо нее использовалась система уравнений вида (5). Мы поступим так потому, что решение системы для неизвестных  $B_{ns}$  получается без всяких затруднений формальной заменой левых частей в выражениях для  $A_{ns}$  на  $B_{ns}$ , а окончательная система для коэффициентов отражения и прохождения гармоник будет более симметричной, чем в [9].

Систему [9] будем решать, основываясь на результатах работы [10]. Введем  $h'_n = x \sin \varphi_1 + n$ ,  $\gamma'_n = \sqrt{x^2 - (x \sin \varphi_1 + n)^2}$ ;  $x \sin \varphi_1 = q + \delta$ , где  $q$  — целая часть  $x \sin \varphi_1$ ,  $x \sin \varphi_1 \geq 0$ ;  $|\delta| < 1$ ;

$$n + q = j; \quad x'_j = A_{(j-q)}, \quad h'_{(j-q)}; \quad \varepsilon_j = 1 + i \sqrt{\frac{x^2}{(j+\delta)^2} - 1}, \quad j \neq 0; \quad (10)$$

$\gamma'_j = \sqrt{x^2 - (j + \delta)^2}$ ;  $x = \frac{l}{\lambda}$ ,  $\lambda$  — длина волны.

Для коэффициентов  $x_j^s$  получим систему

$$-x_0^s = -i\gamma'_q \delta_{qj} \delta_{s1} V_{[0]s}^0 - i \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{(j-q),s} \gamma'_j V_{[0]s}^j + ix_0^s \frac{\gamma'_0}{\delta_0} +$$

$$+ \sum_{j \neq 0} x_j^s \frac{|j|}{i} \epsilon_j V_{[0]s}^j + 2x_{-1}^s R_{[0]s}, \quad (11)$$

$$x_m^s = -i\gamma'_q \delta_{qj} \delta_{s1} V_{ms}^0 - i \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{(j-q),s} V_{ms}^j + ix_0^s \frac{\gamma'_0}{\delta_0} +$$

$$+ \sum_{j \neq 0} x_j^s \frac{|j|}{i} \epsilon_j V_{ms}^j + 2x_{-1}^s R_{ms}, \quad m = 0, +1, \pm 2, \pm 3 \dots,$$

где  $V_{[0]s}^j$ ,  $V_{ms}^j$ ,  $R_{[0]s}$ ,  $R_{ms}$  имеют тот же вид, что и в (10), но их аргументами являются  $u_s = \cos(\pi - \theta_s) = -\cos \theta_s = -\cos \frac{\pi d_s}{l}$ . В правой части (1) стоят две суммы с убывающими коэффициентами:

$$\epsilon_j \sim \frac{1}{j^3} \text{ при } j \rightarrow \infty, \quad D_{(j-q),s} \sim e^{-|j| \frac{2\pi}{l} (w_s)_{\min}}.$$

Если отношение  $\frac{(w_s)_{\min}}{l}$  достаточно велико, так что коэффициенты  $D_{(j-q),s}$  убывают быстрее, чем  $\epsilon_j$ , то при решении системы (11) методом редукции в обеих суммах следует брать одинаковое число членов.

Решение системы (11) имеет вид:

$$x_m^s = -i\gamma'_q \delta_{qj} \delta_{s1} F_{0ms} - i \sum_{j=-N}^N D_{(j-q),s} \gamma'_j F_{jms}, \quad (12)$$

где  $F_{jms} = \frac{\Delta_{jms}}{\Delta_s}$ ,  $\Delta_s$  — определитель системы (11);  $\Delta_{jms}$  — определитель, получающийся из определителя системы (11), если в нем на место  $m$ -го столбца поставить столбец

$$\begin{pmatrix} V_{[0]s}^j \\ V_{0s}^j \\ \vdots \\ V_{ms}^j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Из (12) следует

$$A_{ns} = \frac{1}{h_n'} \left[ -i\gamma'_q \delta_{0n} \delta_{s1} F_{0, n+q, s} - i \sum_{j=-N}^N D_{(j-q),s} \gamma'_j F_{j, n+q, s} \right].$$

Так же записываются коэффициенты  $B_{ns}$ . В длинноволновом приближении  $q = 0$ ;  $D_j = 0$ ,  $j \neq 0$ ;

$$\begin{cases} A_{0s} = \frac{1}{h_0'} [-i\gamma'_0 \delta_{s1} F_{00s} - iD_{0s} \gamma'_0 F_{00s}] = -\frac{\gamma'_0}{h_0'} (\delta_{s1} + D_{0s}) F_{00s}; \\ B_{0s} = -\frac{\gamma'_0}{h_0'} (\delta_{s1} + D_{0s}). \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, что в этом приближении поле системы не зависит от сдвига решеток.



Подставив в (13) значения  $A_{0s}$ ,  $B_{0s}$ ,  $D_{0s}$  согласно (8) и вводя обозначения

$$G_s^b = i \frac{\gamma_0'}{k_0'} g_{s1} e^{i\gamma_0' z_s}; \quad H_s^b = g_{s1} e^{i\gamma_0' z_s} \left( 1 + i \frac{\gamma_0'}{k_0'} \right);$$

$$G_s^a = -g_{s2} e^{i\gamma_0' z_{s+1}} \frac{i\gamma_0'}{k_0'}; \quad H_s^a = -g_{s2} e^{i\gamma_0' z_{s+1}} \left( 1 + \frac{i\gamma_0'}{k_0'} \right),$$

приходим к простой системе уравнений для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\left. \begin{aligned} a_{0s} + G_s^b b_{0s} + H_s^a a_{0, s+1} &= -i \frac{\gamma_0'}{k_0'} \delta_{s1} \\ H_s^b b_{0s} + G_s^a a_{0, s+1} - b_{0, s+1} &= -i \left( 1 + \frac{i\gamma_0'}{k_0'} \right) \end{aligned} \right\} s = 1, 2, \dots, p.$$

В определителе этой системы все элементы, за исключением расположенных на центральной диагонали и на двух диагоналях, примыкающих к ней справа, равны нулю; в матрице свободных членов только верхние два элемента отличны от нуля, поэтому решение такой системы не составляет большого труда.

Вычисление поля в этой системе при падении на нее под тем же углом волны с вектором  $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$  принципиально не отличается от приведенного выше решения, поэтому в дальнейшем мы будем считать обе задачи решенными.

2. Воспользуемся указанным решением электродинамической задачи для вычисления эффективных характеристик ленточной структуры. Если на такую структуру падает  $H$ -поляризованная волна, то в лентах могут возникнуть только дипольные индуцированные моменты, и на падающее поле эта структура должна воздействовать как диэлектрик с некоторой эффективной диэлектрической проницаемостью. Поскольку мы предполагаем ленты идеально проводящими, потери в такой структуре отсутствуют, поэтому можно считать, что  $\text{Im} \epsilon_{\text{эф}} = 0$ . Ленточный слой конечной толщины можно рассматривать как слой диэлектрика с эффективной диэлектрической проницаемостью, для которого известны отраженное и прошедшее поля. Последние представлены в виде суперпозиции гармоник. Потребуем, чтобы мощность отраженного электрического поля распространяющихся гармоник ленточной структуры была равна мощности, отраженной от диэлектрического слоя той же толщины с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , на который падает волна единичной амплитуды под тем же углом, что и на ленточную структуру. Удовлетворив граничным условиям на обеих границах диэлектрического слоя, получим следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$A = \frac{[(\gamma_1 \epsilon)^2 - \gamma_2^2] (1 - e^{2i\gamma_2 |z_p|})}{(\gamma_1 \epsilon + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \epsilon - \gamma_2)^2 e^{2i\gamma_2 |z_p|}}, \quad (14)$$

$$D = \frac{4\gamma_1 \epsilon \gamma_2 e^{i(\gamma_2 - \gamma_1) |z_p|}}{(\gamma_1 \epsilon + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \epsilon - \gamma_2)^2 e^{i\gamma_2 |z_p|}}, \quad (15)$$

где  $\gamma_1 = k \cos \varphi_1$ ;  $\gamma_2 = k \sqrt{\epsilon} \cos \varphi_2$ .

Тогда требование равенства мощностей электрического поля диэлектрического и ленточного слоев сводится к следующему:

$$|A|^2 = \sum_{n=-N}^N |a_{n1}|^2, \quad (16)$$

$$|D|^2 = \sum_{n=-N}^N |b_{n, \rho+1}|^2. \quad (17)$$

Из (14) и (15) следует

$$|\sin \gamma_2 |z_p|| = \frac{2\gamma_1 \epsilon \gamma_e}{|(\gamma_1 \epsilon)^2 - \gamma_2^2|} \left| \frac{A}{D} \right|,$$

или

$$|\sin K_2 n| = \frac{2n \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{|(n \cos \varphi_1)^2 - \cos^2 \varphi_2|} \left| \frac{A}{D} \right|; \quad (18)$$

здесь  $n = \sqrt{\epsilon}$ ,  $K_2 = k \cos \varphi_2 |z_p|$ .

Для упрощения выкладок рассмотрим случай нормального падения. Тогда  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = 1$  и (18) переходит в уравнения относительно  $n$ .

$$|\sin K_2 n| = \frac{2n}{|n^2 - 1|} \left| \frac{A}{D} \right|. \quad (19)$$

$|A|$  и  $|D|$  определяются из уравнений (16) и (17).

Уравнение (19) имеет бесконечное множество решений.

В длинноволновом приближении, когда учитывается только нулевая гармоника, поле ленточной структуры имеет такой же вид, как и поле обычного диэлектрика. Именно в этом случае наиболее целесообразно и удобно пользоваться эффективной проницаемостью. Приравняв коэффициент отражения нулевой гармоники коэффициенту отражения от диэлектрического слоя, можно однозначно найти  $\epsilon$ .

Действительно, в (14)  $A = \text{Re } A + i \text{Im } A$ . Легко получить из (14)

$$\text{ctg } \gamma_2 |z_p| = - \frac{\text{Im } A}{\text{Re } A}. \quad (20)$$

На основании (19) и (20)

$$\frac{|\text{Re } A|}{|A|} = \frac{2n}{|n^2 - 1|} \frac{|A|}{|D|}.$$

Считая  $n > 1$ , отсюда нетрудно получить

$$n = \frac{|A|^2 + \sqrt{|A|^4 + |\text{Re } A| |D|}}{|\text{Re } A| |D|}. \quad (21)$$

При вычислении показателя преломления по формуле (21) следует считать

$$\begin{aligned} \text{Re } A + i \text{Im } A &= \text{Re } a_{01} + i \text{Im } a_{01}, \\ \text{Re } D + i \text{Im } D &= \text{Re } b_{0, \rho+1} + i \text{Im } b_{0, \rho+1}. \end{aligned}$$

По закону сохранения энергии для диэлектрического слоя  $|A|^2 + |D|^2 = 1$ ; таким образом, если с хорошей степенью точности выполняется соотношение

$$|a_{01}|^2 + |b_{0, \rho+1}|^2 = 1, \quad (22)$$

то для вычисления показателя преломления по формуле (21) достаточно пользоваться только коэффициентом отражения (или коэффициентом прохождения) для ленточного слоя. Заметим, что соотношение (22) хорошо выполняется для многих типов ленточных структур при  $x < 1$  вплоть до  $x \sim 0,90 \div 0,95$ .

3. Рассмотрим случай, когда на ленточный слой конечной толщины падает произвольно поляризованная волна, причем плоскостью падения по-прежнему считаем плоскость  $xy$ . Такую волну всегда можно представить как суперпозицию двух волн —  $E$ -поляризованной и  $H$ -поляризованной. В  $E$ -поляризованной волне при наклонном падении имеется компонента магнитного поля, нормальная к плоскостям лент, поэтому в лентах будут индуцироваться магнитные моменты. В результате ленточная структура должна проявлять вместе с диэлектрическими и магнитными свойствами и характеризоваться как диэлектрической, так и магнитной проницаемостями. Наряду с таким подходом ленточную структуру можно рассматривать формально, как некоторую среду, которая чувствительна к поляризации падающей волны, не интересуясь механизмом, вызывающим эту чувствительность. С другой стороны, чувствительностью к поляризации падающей волны обладают кристаллы, диэлектрическая проницаемость которых имеет вид тензора. Поэтому ленточную структуру можно рассматривать не только как среду с эффективными диэлектрической и магнитной проницаемостями, но и как анизотропный кристалл с магнитной проницаемостью, равной единице.

Будем считать аналогом искусственного диэлектрика одноосный кристалл, компоненты тензора которого необходимо вычислить. Пусть оси тензора эквивалентного кристалла совпадают с осями координат  $x, y, z$ ; тогда тензор должен быть диагональным. В общем случае падения волны на анизотропный кристалл в нем возникают две волны: обыкновенная и необыкновенная, отличающиеся друг от друга показателем преломления и поляризацией. Показатель преломления обыкновенной волны не зависит от направления падения и равен  $n = \sqrt{\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0$  — двукратное собственное значение тензора  $\hat{\epsilon}$  одноосного кристалла. Показатель преломления необыкновенной волны зависит от взаимной ориентации волновой нормали  $\vec{n}$  и оси кристалла  $\vec{c}$  и имеет вид [9]

$$n_e = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_c}{\epsilon_0 (\vec{n}, \vec{c}) + \epsilon_c (\vec{n}, \vec{c})}}, \quad (23)$$

где  $\epsilon_c$  — однократное собственное значение тензора  $\hat{\epsilon}$ .

Ось кристалла следует выбирать так, чтобы чувствительность к поляризации падающей волны сохранилась и для нормального падения. Это условие выполняется, если ось направлена параллельно к плоскости раздела и лежит в плоскости падения. При этом, согласно [9], обыкновенная волна поляризована нормально к плоскости падения, необыкновенная волна — в плоскости падения.

Пусть на ленточный слой, как и на кристалл, падает произвольно поляризованная волна. Для простоты будем считать, что обе ее компоненты —  $E$ -поляризованная и  $H$ -поляризованная волны — имеют единичную амплитуду. В п. 1 приведено решение задачи о падении  $H$ -поляризованной волны на ленточный слой; аналогично решается задача о  $E$ -поляризованной волне.

При падении на кристалл  $E$ -поляризованной волны в нем возникает только обыкновенная волна. При падении  $H$ -поляризованной волны — только необыкновенная волна. Выбрав оси координат, как показано на рис. 2, мы должны считать, что ось кристалла совпадает с направле-

нием  $oy$ . Угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$  ( $\widehat{(\vec{n}, \vec{c})} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ )  $[\vec{n}, \vec{c}] = \cos \varphi_1$ ,  $(\vec{n}, \vec{c}) = \sin \varphi_1$ ; при этом

$$n_e = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_e}{\epsilon_0 \cos^2 \varphi_1 + \epsilon_e \sin^2 \varphi_1}}, \quad n = \sqrt{\epsilon_0}.$$

Тензор диэлектрической проницаемости кристалла имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Задача о падении произвольно поляризованной волны на кристалл распадается, таким образом, на две:

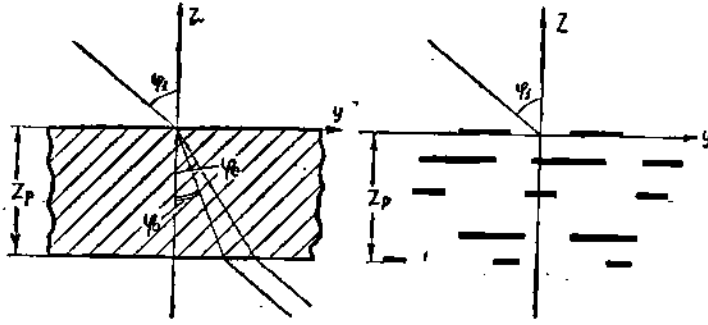


Рис. 2.

а) Граничная задача для  $H$ -поляризованной волны, преломляющейся в кристалле с показателем преломления  $n_e$ , который имеет вид (23);

б) Задача для  $E$ -поляризованной волны, показатель преломления которой  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ .

Решив эти две граничные задачи, получим соответствующие коэффициенты отражения и прохождения:

$$A_0 = \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_0^2)(1 - e^{2i\gamma_0 |z_p|})}{(\gamma_0 + \gamma_1)^2 - (\gamma_0 - \gamma_1)^2 e^{2i\gamma_0 |z_p|}};$$

$$D_0 = \frac{4\gamma_0 \gamma_1 e^{i(\gamma_0 - \gamma_1) |z_p|}}{(\gamma_0 + \gamma_1)^2 - (\gamma_0 - \gamma_1)^2 e^{2i\gamma_0 |z_p|}},$$

где индекс 0 означает: для обыкновенной волны.

$$A_e = \frac{[(\gamma_1 \epsilon_e)^2 - \gamma_e^2](1 - e^{2i\gamma_e |z_p|})}{(\gamma_1 \epsilon_e + \gamma_e)^2 - (\gamma_1 \epsilon_e - \gamma_e)^2 e^{2i\gamma_e |z_p|}},$$

$$D_e = \frac{4\gamma_1 \epsilon_e \gamma_e e^{i(\gamma_e - \gamma_1) |z_p|}}{(\gamma_1 \epsilon_e + \gamma_e)^2 - (\gamma_1 \epsilon_e - \gamma_e)^2 e^{2i\gamma_e |z_p|}}$$

(индекс  $e$  означает: для необыкновенной волны).

$$\gamma_1 = k \cos \varphi_1, \quad \gamma_e = kn_e \cos \varphi_e, \quad \gamma_0 = k \sqrt{\epsilon_0} \cos \varphi_0.$$

Найдя  $n_e$  и  $n_0$  таким же образом, как и в п. 2, получим два уравнения, из которых легко найти  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_e$ .

4. Изложенный способ вычисления диэлектрических проницаемостей был применен к ленточной системе в частном случае: число решеток — две, падение нормальное, сдвиг решеток друг относительно друга равен нулю. Использовались зависимости коэффициентов отражения и прохождения от  $x$  для двойной решетки, полученные с помощью ЭВМ. В диапазоне для  $x = 0,1 \div 0,95$  влияние гармоник пренебрежимо мало; это следует из того, что в этом диапазоне с большой степенью точности выполняется соотношение

$$|a_{01}|^2 + |b_{03}|^2 = 1.$$

Поэтому расчеты производились по формуле (21). Так как диэлектрические свойства искусственного диэлектрика можно характеризовать

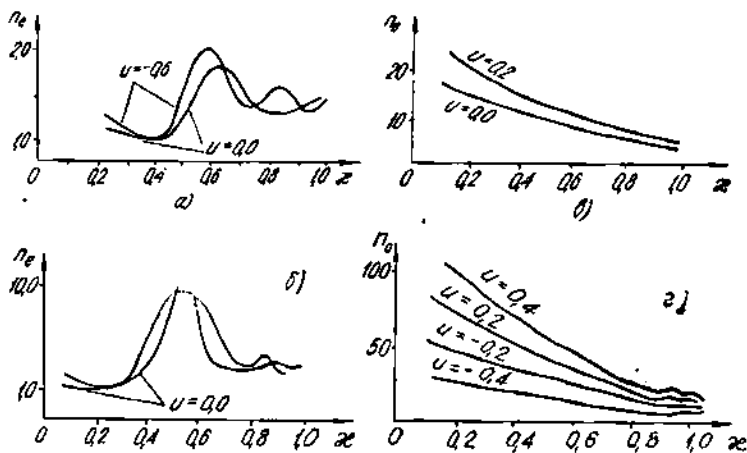


Рис. 3.

показателем преломления, то во всех случаях вычислялась именно эта величина; для нее же строились кривые дисперсии. Кривые дисперсии, построенные для  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн, показаны на рис. 3. Здесь для  $H$ -поляризации: а)  $\frac{W_2}{l} = 0,5$ ; б)  $\frac{W_2}{l} = 1,0$ ; для  $E$ -поляризации: в)  $\frac{W_2}{l} = 0,125$ ; г)  $\frac{W_2}{l} = 0,5$ . Из кривых следует:

1. Эффективный показатель преломления при  $E$ -поляризации гораздо больше, чем при  $H$ -поляризации.
2. С уменьшением щелей в ленточной структуре эффективные показатели преломления увеличиваются (уменьшение щелей соответствует изменению  $u = -\cos \frac{\pi d}{l}$  от отрицательных к положительным значениям при  $E$ -поляризации и обратному изменению при  $H$ -поляризации).
3. С ростом расстояния между решетками показатели преломления также увеличиваются в этом диапазоне. Из рис. 3 видно, что для  $H$ -поляризации при  $x = 0,25 \div 0,6$  и  $\frac{W_2}{l} = 1,0$  имеется участок нарастания показателя преломления, качественно совпадающий с результатами [2] и [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. E. Kock. Bell. Syst. Tech. J., 27, № 1, 58—82, 1948.
  2. S. B. Cohn, I. Appl. Ph., 20, 257—262, March, 1949.
  3. I. Brown. Proc. IEE, 97, pt. 3, p. 45—48, Jan. 1950.
  4. N. I. Kolettis, R. E. Collin. IRE trans. on MTT, v. MTT—9, № 5, Sept. 1961.
  5. Л. Л. Левин. Современная теория волноводов, ИЛ, 1954.
  6. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 27, 9, 2006—2037, 1957.
  7. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 29, 5, 604, 1959.
  8. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 4, 1962.
  9. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Изд-во АН БССР, Минск, 1958.
  10. Л. Н. Гейвандов, О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов. «Радиотехника и электроника», 8, 8, 1361, 1963.
  11. Е. Н. Подольский. «Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и ХМО» 30, 1964.
-

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА УПОРЯДОЧЕННЫХ РЕШЕТКАХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Н. А. Хижняк

Задача о рассеянии электромагнитных волн на упорядоченных решетках диэлектрических и металлических тел при произвольном соотношении между размерами тел и длиной рассеиваемой волны представляет большой теоретический и прикладной интерес. За последнее время появились интересные исследования; в некоторых случаях они доведены до конечных формул — при рассмотрении рассеяния электромагнитных волн на простейших решетках металлических полос. С другой стороны, широкие возможности в исследовании простейших задач на рассеяние открыла вычислительная техника [1]. В настоящей работе рассматривается ряд общих интегральных соотношений задачи о рассеянии, позволяющих в некоторых случаях значительно упростить формулировку задач о рассеянии волн на упорядоченных системах диэлектрических тел. Показано, как можно свести задачу о рассеянии плоской волны на плоской решетке бесконечных диэлектрических полос к решению двух связанных интегро-дифференциальных уравнений, и найдено ядро этих уравнений.

## 1. Общие интегральные уравнения задачи о рассеянии

С помощью интегральных уравнений работы [2] можно построить интегральные уравнения задачи о рассеянии электромагнитных волн на упорядоченной решетке однотипных рассеивающих тел.

Пусть  $\vec{r}_{\lambda\mu\nu}$  — радиус-вектор центра рассеивающего тела, расположенного на  $\lambda\mu\nu$ -м узле пространственной решетки. Пусть  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  есть тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей вещества, из которого изготовлен рассеивающий элемент. Пусть решетка занимает полностью или частично полупространство  $z > 0$  и не ограничена по направлению  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим общее соотношение, характеризующее отражение или прохождение монохроматической волны, зависящей от времени как  $e^{i\omega t}$  и падающей на решетку из полупространства  $z < 0$ .

Обозначим через  $\vec{E}_0(\vec{r})$  и  $\vec{H}_0(\vec{r})$  векторы напряженности электрического и магнитных полей этой волны, которые были бы в точке  $\vec{r}$  при отсутствии рассеивающих тел.

Тогда при наличии рассеивающих тел напряженности электрического и магнитного поля равны:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0(\vec{r}) + \sum_{\lambda\mu\nu} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}), \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_0(\vec{r}) + \sum_{\lambda\mu\nu} \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}),\end{aligned}\tag{1}$$

где суммирование производится по всем элементам решетки рассеивающих тел.

В случае  $k \rightarrow 0$  суммы, стоящие под интегралами, приводятся к известным в теории кристаллических решеток суммам Эвальда. В некоторых частных случаях указанные суммы можно свернуть и при  $k \neq 0$  получить интегральные уравнения, допускающие аналитические решения.

Однако прежде чем переходить к исследованию конкретных задач, сделаем ряд замечаний. Уравнения (6) и (7) по своей структуре и смыслу являются интегральными уравнениями Фредгольма. В соответствии с этим мы можем говорить о распространении в системе собственных или вынужденных электромагнитных колебаний.

Решения этих уравнений при  $\vec{E}_0 = \vec{H}_0 = 0$  возможны лишь при некоторых значениях фазовых множителей. Обозначим этот множитель через  $\lambda = e^{i\psi}$ . Тогда можно положить  $\psi_{im} = \psi_0 + \theta_{im}$ , где  $\theta_{im}$  — фаза, изменяющаяся на целое кратное  $2\pi$  при переходе от одного узла решетки к другому. Смысл величины  $\psi_0$  очевиден, она определяет фазовую скорость поверхностных волн в решетке. При решении вынужденной задачи, когда  $\vec{E}_0 \neq 0$ ,  $\vec{H}_0 \neq 0$ , фазовый сдвиг полей в узлах решетки определяется полями  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$ . Поэтому можно переформулировать основные теоремы теории Фредгольма о решениях уравнений первого и второго рода для случая рассеяния электромагнитных волн на упорядоченных решетках и высказать аналогичные теоремы о связи собственных и вынужденных колебаний в системе, а также сформулировать условия возбуждения поверхностных волн в решетках. Если рассеивающими элементами являются полосы или стержни, ось которых параллельна оси  $x$ -ов, уравнения допускают дальнейшее упрощение. Пусть волна падает на решетку таким образом, что не содержит переменной  $x$ . Тогда результирующее поле также не содержит переменной  $x$ , и в уравнениях (6) и (7) возможно одно интегрирование:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}|\vec{r}-\vec{r}'|} dx}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-iks\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sqrt{(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{s^2-1}} ds.$$

Дальнейшее упрощение можно получить в случае, когда рассеивающие элементы имеют в направлении  $z$  размеры малые по сравнению с  $L$ -периодом структуры по  $y$  и длиной волны в окружающем пространстве  $\lambda$ . Тогда

$$\sqrt{(nL+y-y')^2+(z-z')^2} = nL+y-y'$$

для значений суммы с  $n \neq 0$ . Учитывая эти обстоятельства, уравнение (6) — (7) приведем к окончательному виду:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{\eta}) = & \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2\epsilon_1\mu_1) \int_s \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{\xi}) \Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|) d\vec{\xi} - \\ & - \frac{ik\mu_1}{4\pi} \text{rot} \int_s \left( \frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{\xi}) \Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|) d\vec{\xi}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{\eta}) = & \vec{H}_0 + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2\epsilon_1\mu_1) \int_s \left( \frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{\xi}) \Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|) d\vec{\xi} + \\ & + \frac{ik\epsilon_1}{4\pi} \text{rot} \int_s \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{\xi}) \Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|) d\vec{\xi}, \end{aligned} \quad (9)$$



где интегрирование в плоскости  $yOz$  производится по поперечному сечению стержня. Функция  $\Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|)$  с учетом предыдущих замечаний имеет вид

$$\Phi(|\vec{\eta} - \vec{\xi}|) = \pi i H_0^{(2)}(k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} |\vec{\xi} - \vec{\eta}|) - \\ - 4 \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \frac{\exp\{-ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} s [L + (\xi - \eta)_z] + \psi_0\}}{1 - \exp\{-ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} s [L + (\xi - \eta)_z + \psi_0]\}},$$

где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка. Здесь первое слагаемое характеризует функцию Грина уравнений Максвелла для двухмерных задач рассеяния [5], а второе слагаемое учитывает влияние решетки. Фазовый множитель  $\psi_0$  определяется просто через угол падения плоской волны на решетку:

$$\psi_0 = ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} L \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол падения плоской волны в плоскости  $yOz$ . При этом тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей стержней должны быть таковы, чтобы при рассеянии не нарушался двухмерный характер задачи. В интегральных уравнениях (8) — (9) производные по  $x$  тождественно равны нулю, и трехмерная запись оставлена лишь для симметрии.

Таким образом, из ядра интегральных уравнений выделено слагаемое, характеризующее рассеяние волн на отдельном элементе, и интерференционные слагаемые, обусловленные влиянием других элементов решетки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32 4, 1962.
2. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, 7, 1958.
3. К. С. Шифрин. Рассеяние света в мутной среде, Гостехтеориздат, М.—Л, 1951
4. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 27, 9, 1957.
5. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 29, 5, 1959.

## ОТРАЖЕНИЕ (ПРОХОЖДЕНИЕ) ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ РЕШЕТКИ, ШИРИНА ЛЕНТЫ МЕТАЛЛА КОТОРОЙ РАВНА ШИРИНЕ ЩЕЛИ

*А. В. Провалов*

Плоская металлическая решетка, образованная параллельно проводящими лентами, при нормальном падении на нее электромагнитных волн для  $\lambda \gg L$  является фильтром, отражающим  $E$ -поляризованную и пропускающим  $H$ -поляризованную волну, а для  $\lambda < L$  — дифракционной решеткой. При этом в таких решетках для случая  $\lambda < L$  приблизительно половина мощности падающей волны передается дифракционным спектром.

В работе [3] методом Винера—Хопфа [4] дано строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на плоской металлической решетке при нормальном падении волны и равенстве ширины лент металла и щелей между ними. Этим же методом решена аналогичная задача в работе [1]. Анализ графиков зависимости коэффициента прохождения  $|b_0|$  (отражения  $|a_0|$ ) от  $x = \frac{L}{\lambda}$  показывает, что имеется существенное расхождение в поведении коэффициентов прохождения  $|b_0|$  (отражения —  $|a_0|$ ) при  $x > 1,8$ , определенное в работах [3] и [1]. В то время как согласно [3] при  $x > 1,8$   $|a_0|$  и  $|b_0|$  приближаются к 0,5, совершая при этом затухающие зигзагообразные колебания, причем  $|a_0|$  приближается к 0,5 снизу, а  $|b_0|$  сверху, в работе [1] показано, что при  $x > 1,8$   $|a_0|$  и  $|b_0|$  колеблются вблизи 0,5, принимая значения как больше, так и меньше 0,5 (например, для  $2 \leq x \leq 4$   $|a_0|$  всегда меньше 0,5, а  $|b_0|$  — больше 0,5).

В работе [2] решена задача о дифракции волн на плоских ленточных решетках, находящихся в однородных, изотропных и свободных от пространственных зарядов диэлектрических средах при любом соотношении между шириной лент металла и шириной щелей между ними. Для частного случая, когда диэлектрические среды с обеих сторон решетки имеют значение  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ , а ширина щели  $\Delta$  равна ширине ленты металла ( $\Delta = \frac{L}{2}$ ), расчет, произведенный для  $|b_0|$  и  $|a_0|$ , показал, что поведение  $|b_0|$  и  $|a_0|$  в зависимости от  $x$  близко к поведению  $|b_0|$  ( $|a_0|$ ) в работе [1]. В связи с этим был поставлен специальный эксперимент для изучения поведения  $|b_0|$  и  $|a_0|$  в зависимости от  $x$  при  $1 \leq x \leq 4$ . Проведенные исследования подтвердили справедливость выводов работ [1] и [2].

### 1. Результаты теоретического исследования

Если на плоскую периодическую решетку (рис. 1), образованную бесконечно тонкими идеально проводящими металлическими лентами и помещенную в однородные, изотропные и свободные от пространственных зарядов диэлектрические среды со значениями  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , со стороны  $z > 0$  нормально к решетке падает плоская электромагнитная волна,

то для волны с  $E$ -поляризацией (вектор электрического поля направлен параллельно оси  $Ox$ ) задача об отыскании поля над решеткой и под решеткой сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} = 0; \quad \frac{\pi\Delta}{L} < |\varphi| < \pi; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n |n| (1 - \delta_n) e^{in\varphi} = ix (b_0 \epsilon_{cp} - \sqrt{\epsilon_1}); \quad |\varphi| < \frac{\pi\Delta}{L}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $b_0 = 1 + a_0$  — искомые коэффициенты прохождения и отражения соответственно, а  $b_n = a_n$  — комплексные амплитуды волн дифракционных спектров;

$$\epsilon_{cp} = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2});$$

$$\delta_n = 1 + \frac{i}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{\epsilon_1}}{n}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{\epsilon_2}}{n}\right)^2 - 1} \right\}.$$

В работе [2] решение системы (1) для случая, когда соотношение между шириной ленты металла и шириной щелей между ними произвольно, свелось к решению задачи Римана — Гильберта [5]. В частном случае, когда  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$  и  $\Delta = \frac{L}{2}$ , для коэффициентов прохождения и отражения имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{ixd}{ixd + D}; \quad b_0 = 1 + a_0; \\ \delta_n &= 1 + i \sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2)$$

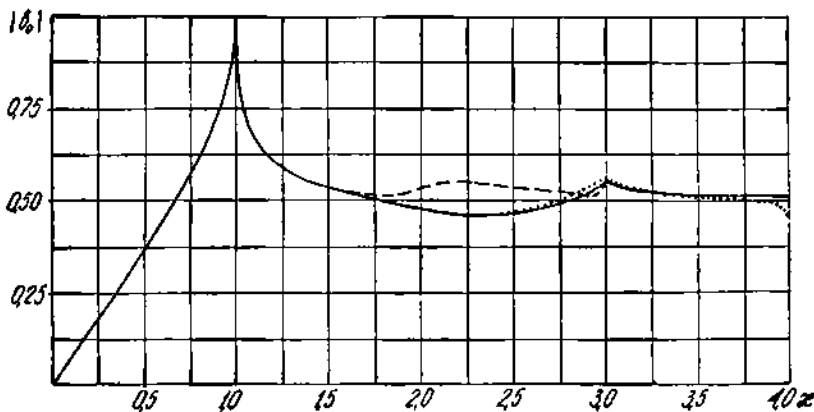


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения от параметра  $x$ .

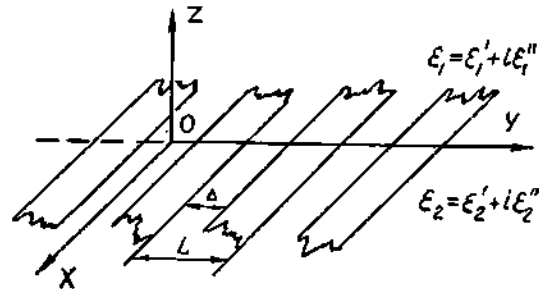


Рис. 1 Дифракционная решетка.

где

$$D = -0,5 + \frac{3}{8} \delta_1 + \frac{7}{32} \delta_2 + \frac{9}{32} \delta_3 - \frac{13}{128} \delta_1 \delta_2 - \frac{105}{512} \delta_1 \delta_3 - \frac{39}{512} \delta_2 \delta_3 + \frac{63}{8192} \delta_1 \delta_2 \delta_3; \quad (3)$$

$$d = D \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \delta_1 + \frac{1}{32} \delta_2 + \frac{1}{48} \delta_3 - \frac{9}{128} \delta_1 \delta_2 - \frac{27}{192} \delta_1 \delta_3 - \frac{65}{1536} \delta_2 \delta_3 + \frac{131}{24576} \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

По формулам (2) и (3) построены графики зависимости  $|b_0|$  от  $x$ . На рис. 2 сплошная кривая — график, рассчитанный согласно (2), (3); точечная кривая взята из работы [1], пунктирная — из [3].

## 2. Экспериментальная установка

Экспериментальное исследование дифракционных свойств решеток проведено на экспериментальной установке, осуществленной на базе измерительной машины ИЗА—10. Эта установка включает передающее устройство, приемное устройство, механизм крепления и юстировки дифракционных решеток. На рис. 3 приведена блок-схема установки.

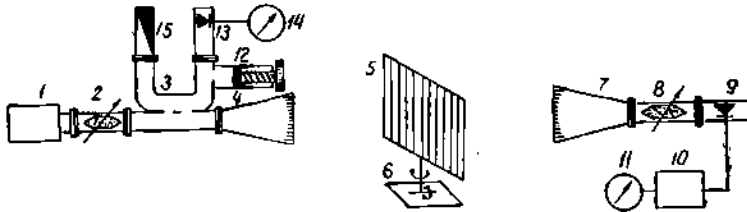


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — генератор СВЧ; 2 — развязывающий аттенуатор; 3 — направленный ответвитель; 4 — передающий рупор; 5 — исследуемая решетка; 6 — юстирующее устройство; 7 — приемный рупор; 8 — аттенуатор приемного тракта; 9 — детектор; 10 — усилитель постоянного тока; 11 — индикатор; 12 — резонансный волномер; 13 — детектор; 14 — индикатор; 15 — поглощающая нагрузка.

От источника СВЧ мощности, развязанного с основным трактом аттенуатором до 50 децибел, волна типа  $H_{01}$  передается по прямоугольному волноводу к излучающему рупору. Часть энергии через направленный ответвитель (ослабление 20 децибел) поступает в тракт контроля частоты. Контроль частоты осуществляется резонансным волномером, точность градуировки которого контролировалась волномером высокой точности.

Прошедшая через решетку СВЧ мощность попадает в приемную часть установки, где и регистрируется.

Расстояние между элементами экспериментальной установки выбирается из условия работы их в зоне дифракции Фраунгофера, где распространяющаяся электромагнитная энергия имеет характер плоской волны. Эта зона определяется из условия  $r > \alpha \frac{q^2}{8\lambda_0}$  ( $r$  — расстояние вдоль нормали к элементам установки,  $q$  — ширина щели,  $\lambda_0$  — длина волны в свободном пространстве,  $\alpha = 8 \div 32$  — коэффициент, выбираемый в зависимости от необходимой точности измерения).

При применении коррекции фазового фронта в раскрыве рупоров эти расстояния составляют  $(80 \div 100)\lambda$ . При конструировании антенн

экспериментальной установки исходили из условий обеспечения: а) необходимой диаграммы направленности; б) плоского фазового фронта; в) широкополосности; г) максимальной простоты изготовления. В соответствии с этими требованиями антенны установки имеют ширину диаграммы направленности в плоскости  $H - 10^\circ$ , в плоскости  $E - 7^\circ$ . Коррекция фазового фронта осуществлялась металло-пластинчатыми линзами.

В приемной части экспериментальной установки используются кристаллические детекторы с последующим усилением по постоянному току ( $K_y \approx 200$ ). Большое усиление позволяет вести экспериментальные

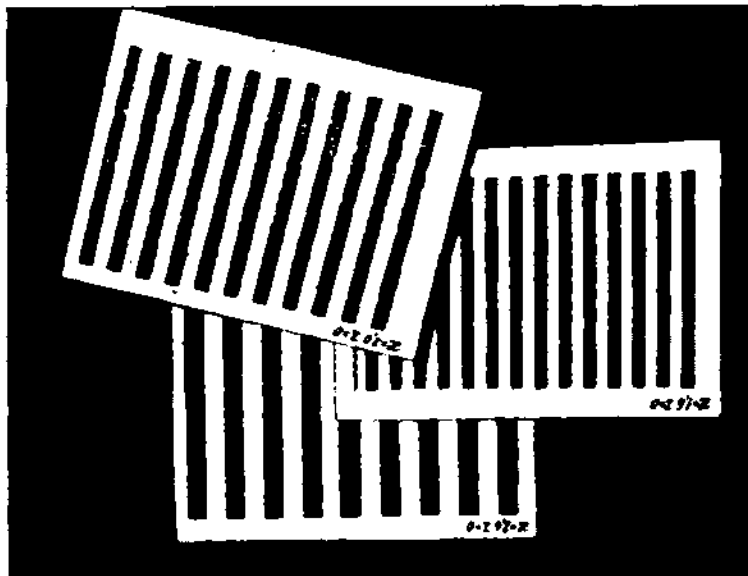


Рис. 4. Образцы дифракционных решеток.

исследования на малых уровнях мощности, где характеристику детектора, с достаточной для эксперимента точностью, можно считать квадратичной. Поскольку при измерении коэффициентов прохождения сравнивается мощность СВЧ, прошедшая через решетку и достигшая детектора, и мощность, достигающая детектора при прямом прохождении (без решетки), то отпадает необходимость градуировки детектора по абсолютному стандарту.

Исследование различных конструкций решеток позволило определить как их оптимальные размеры, так и конструкцию, обеспечивающую наибольшую точность их изготовления при высоком качестве зеркал. Дифракционные решетки, на которых производились исследования, представляют собой набор медных лент толщиной 0,05 мм, наклеенных на пластины беспрессового пенополистирола ( $\epsilon = 1,02 \div 1,03$ ;  $\text{tg } \delta = 2,4 \times 10^{-4}$ ; удельный вес 0,05 г/см<sup>3</sup>).

Незначительные потери в пенополистироле и неучтенные при теоретических расчетах потери в металле лент учитываются как систематическая погрешность в процессе исследования решеток. Образцы дифракционных решеток приведены на рис. 4.

В соответствии с поставленной задачей были изготовлены и исследованы решетки с параметрами  $Z = 0 \left( Z = \cos \frac{\pi x}{L} \right)$ ;  $x = 1,0; 1,6; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0; 3,4; 3,8$ .

### 3. Обсуждение результатов экспериментальных исследований

В процессе эксперимента проводилось многократное измерение коэффициента прохождения  $|b_0|$  с целью исключения влияния на точность измерения случайных колебаний мощности СВЧ. Кроме того, примененное специальное юстирующее устройство позволило ориентировать исследуемые решетки по отношению к падающей волне точно в соответствии с поставленной задачей. Одновременно особое внимание уделялось тщательной юстировке приемного и передающего рупоров.

Результаты проведенных измерений представлены в таблице. В этой же таблице для сравнения приведены значения коэффициентов прохождения  $|b_0|$ , полученные из теоретического решения задачи на основании формул (2) и (3).

Таблица

$x$	1.0	1.6	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$ b_0 $ экспериментальное	0,952	0,516	0,456	0,461	0,460	0,475	0,49	0,536
$ b_0 $ теоретическое	0,954	0,525	0,476	0,463	0,466	0,477	0,496	0,547

В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Проведенные экспериментальные исследования с достаточно высокой степенью точности подтвердили справедливость выводов работ [1] и [2].

2. Небольшое расхождение экспериментально полученных и вычисленных коэффициентов прохождения объясняется незначительными потерями мощности в металле и диэлектрике, учет которых в [2] не производился.

3. Анализ графиков зависимости коэффициента прохождения  $|b_0|$  от  $x$  показывает, что согласно [1] и [2] кривые практически полностью совпадают; в то же время между ними и кривой работы [3] имеется расхождение. Область наиболее существенного расхождения лежит в пределах  $10 \leq x \leq 8,0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Baldwin, A. E. Heins. *Math. Scand.*, 1954, 2, № 1, 103.
2. А. И. Адонина, А. В. Провалов, В. П. Шестопалов. *Труды радиофизич. ф-та ХГУ*, т. 6, 1962.
3. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос, *ЖТФ*, 1955, т. XXV, в. 5.
4. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода «Сов. радио», М., 1953.
5. С. Г. Михлин. *Интегральные уравнения*, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРЕСТООБРАЗНЫХ ЩЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ИХ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ

*Ю. В. Шубарин, Л. П. Яцук*

При создании волноводно-щелевых антенн круговой поляризации с наперед заданным амплитудным распределением необходимо знать зависимость коэффициентов излучения щелей от их длины. При этом желательно в какой-то степени учесть взаимное влияние щелей.

В общем случае взаимное влияние излучателей осуществляется, во-первых, за счет воздействия полей, излучаемых всеми остальными излучателями на данный излучатель, и, во-вторых, через общую передающую линию.

Второй путь имеет место тогда, когда излучатели, питаемые общей передающей линией, не согласованы с ней. Отраженные от их входов волны приходят к каждому излучателю, вызывая изменение амплитуды и фазы излучаемых им полей. Такое взаимное влияние должно возникать в системе несогласованных с общей линией вибраторов или в волноводно-щелевой антенне с несогласованными щелями. Так как крестообразные ортогональные кругополяризованные щели согласованы с волноводом, то взаимное влияние между щелями возникает за счет излучаемых ими полей.

В литературе [1] отсутствует решение задачи, учитывающей взаимное влияние нерезонансных крестообразных щелей. Даже после теоретического решения такой задачи заранее следует ожидать значительных расхождений получаемых результатов с экспериментом, поскольку неизбежны естественные допущения, что щели бесконечно узкие и прорезаны в безграничной идеально проводящей плоскости.

Поэтому немалый интерес представляет экспериментальное определение коэффициентов излучения щелей с учетом их взаимного влияния.

### Коэффициенты излучения щелей

Рассмотрим систему из  $N$  кругополяризованных крестообразных щелей, прорезанных в широкой стенке прямоугольного волновода, нагруженного на согласованную нагрузку.

Пусть  $\nu$  — порядковый номер щели, если счет вести от генератора. Квадрат модуля коэффициента излучения  $\nu$ -й щели  $|S_{\Sigma\nu}|^2$  определим как отношение излученной этой щелью мощности  $P_{\Sigma\nu}$  к мощности  $P_{\text{пад } \nu}$ , падающей на нее:

$$|S_{\Sigma\nu}|^2 = \frac{P_{\Sigma\nu}}{P_{\text{пад } \nu}}. \quad (1)$$

Найдем  $P_{\Sigma\nu}$  и  $P_{\text{пад } \nu}$ .

Введем амплитудное распределение вдоль системы  $A_{\Sigma}^2$ , определяемое равенством

$$A_{\Sigma}^2 = \frac{P_{\Sigma\nu}}{P_{\Sigma \text{ макс}}}, \quad (2)$$

где  $P_{\Sigma \max}$  — мощность максимально излучающей щели.

Тогда

$$P_{\Sigma \nu} = P_{\Sigma \max} A_{\nu}^2. \quad (3)$$

Мощность, падающая на  $\nu$ -ю щель, представляет собой разницу между мощностью  $P$ , затрачиваемой в антенне, и мощностью, расходуемой от начала системы до указанной щели на излучение и потери в стенках волновода. Если обозначить мощность, теряемую в стенках волновода на промежутке от  $\nu$ -й до  $\nu + 1$ -й щели через  $\Delta P_{\nu}$  (рис. 1), то

$$P_{\text{пад } \nu} = P - P_{\Sigma \max} \sum_{i=1}^{\nu-1} A_i^2 - \sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta P_i. \quad (4)$$

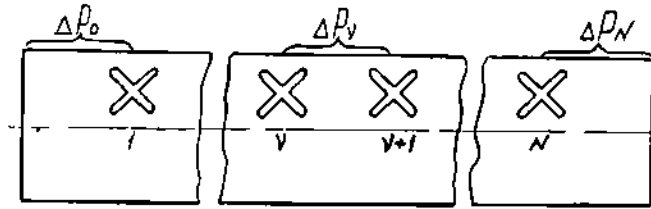


Рис. 1.

Мощность  $P_{\Sigma \max}$  найдем из уравнения баланса мощности на входе антенны. Затрачиваемая в антенне мощность  $P$  расходуется на излучение в свободное пространство и потери в нагрузке ( $P_n$ ) и в стенках волновода ( $P_{\text{ст}} = \sum_{i=0}^N \Delta P_i$ ). Обозначив  $P_n = P_n + P_{\text{ст}}$ , имеем:

$$P = \sum_{i=1}^N P_{\Sigma i} + P_n = P_{\Sigma \max} \sum_{i=1}^N A_i^2 + P_n, \quad (5)$$

откуда

$$P_{\Sigma \max} = \frac{P - P_n}{\sum_{i=1}^N A_i^2}. \quad (6)$$

Подставляя (3) и (4) с учетом (6) в (1), выражаем коэффициент излучения щелей через амплитудное распределение в системе и отношение мощности потерь к мощности, затрачиваемой на входе антенны:

$$|S_{\Sigma \nu}|^2 = \frac{A_{\nu}^2 \left(1 - \frac{P_n}{P}\right)}{\left(1 - \frac{\sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta P_i}{P}\right) \sum_{i=1}^N A_i^2 - \left(1 - \frac{P_n}{P}\right) \sum_{i=1}^{\nu-1} A_i^2}. \quad (7)$$

Мощность  $P$ , затрачиваемая на входе антенны, равна падающей на вход антенны мощности  $P_{\text{вх}}$ , если система согласована. Если исследуемая система на входе характеризуется коэффициентом стоячей волны (к. с. в.)  $k_{\text{с. в.}}$ , которому соответствует коэффициент отражения

$$\Gamma_{\text{с. в.}} = \frac{k_{\text{с. в.}} - 1}{k_{\text{с. в.}} + 1}. \quad (8)$$



то в антенне затрачивается мощность

$$P = P_{\text{вх}} (1 - |\Gamma_{\text{вх}}|^2) = P_{\text{вх}} \frac{4k_{c \text{ вх}}}{(k_{c \text{ вх}} + 1)^2}. \quad (9)$$

По той же причине мощность, идущая в нагрузку, связана с падающей на нагрузку мощностью  $P_{\text{вых}}$  соотношением

$$P_{\text{н}} = P_{\text{вых}} \frac{4k_{c \text{ н}}}{(k_{c \text{ н}} + 1)^2}, \quad (10)$$

где  $k_{c \text{ н}}$  — к. с. в. нагрузки.

Если предположить, что длина системы невелика и проводимость стенок волновода приближается к идеальной, то потерями в них можно пренебречь. Принимая такое предположение (противный случай подлежит специальному рассмотрению) и учитывая равенства (9) и (10), представим выражение (7) для коэффициента излучения  $i$ -й щели в следующем виде:

$$|S_{\Sigma, i}|^2 \approx \frac{A_i^2 \left[ 1 - \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} \cdot \frac{k_{c \text{ н}}}{k_{c \text{ вх}}} \cdot \left( \frac{k_{c \text{ вх}} + 1}{k_{c \text{ н}} + 1} \right)^2 \right]}{\sum_{i=1}^N A_i^2 - \left[ 1 - \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} \cdot \frac{k_{c \text{ н}}}{k_{c \text{ вх}}} \cdot \left( \frac{k_{c \text{ вх}} + 1}{k_{c \text{ н}} + 1} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^{N-1} A_i^2}. \quad (11)$$

Полученная формула дает возможность определить коэффициенты излучения щелей в антенне. Необходимыми данными для этого являются измеренные амплитудное распределение вдоль системы щелей, отношение мощностей на входе и выходе волноводной линейки, а также к. с. в. согласованной нагрузки и к. с. в. на входе линейки с этой нагрузкой.

Таким образом, по экспериментальным данным можно рассчитать график зависимости коэффициентов излучения щелей от их длины с учетом взаимного влияния соседних щелей.

### Экспериментальное определение коэффициентов излучения

При экспериментальном определении коэффициентов излучения щелей с учетом взаимного влияния возможны два варианта. Во-первых, логично было бы испытать несколько волноводных линеек со щелями одинаковой длины в каждой и таким образом получить зависимость величины коэффициента излучения от длины щелей. Во-вторых, для этой цели можно использовать одну волноводную линейку с постепенно увеличивающимися (или уменьшающимися) длинами щелей.

Первый путь очень трудоемок и, строго говоря, ему не следует отдавать предпочтение, поскольку в реальных антеннах соседние щели бывают разными по длине. Основную роль во взаимном влиянии играют ближайшие щели, причем практически в большинстве случаев соседние щели мало различаются по длине; поэтому можно остановиться на втором варианте.

Нами исследовалась волноводная линейка с 15 крестообразными щелями, длины которых изменялись от 8 до 15,7 мм. Щели прорезаны на широкой стенке волновода сечением  $12,6 \times 28,5$  мм<sup>2</sup>, на расстоянии длины волны в волноводе  $\lambda_d = 38,6$  мм, что соответствует частоте 9375 МГц. Центры щелей удалены от оси широкой стенки на 8,85 мм. С одного конца антенна запитывалась от кластерного генератора, к другому

концу присоединялась согласованная нагрузка с к. с. в.  $k_{сн} = 1,08$ . Коэффициенты эллиптичности щелей и амплитудное распределение вдоль линейки измеряли с помощью волноводного зонда. Последний представлял собой отрезок круглого волновода с пластиной, поглощающей нежелательную компоненту. К зонду подключались детекторная секция и измерительный усилитель.

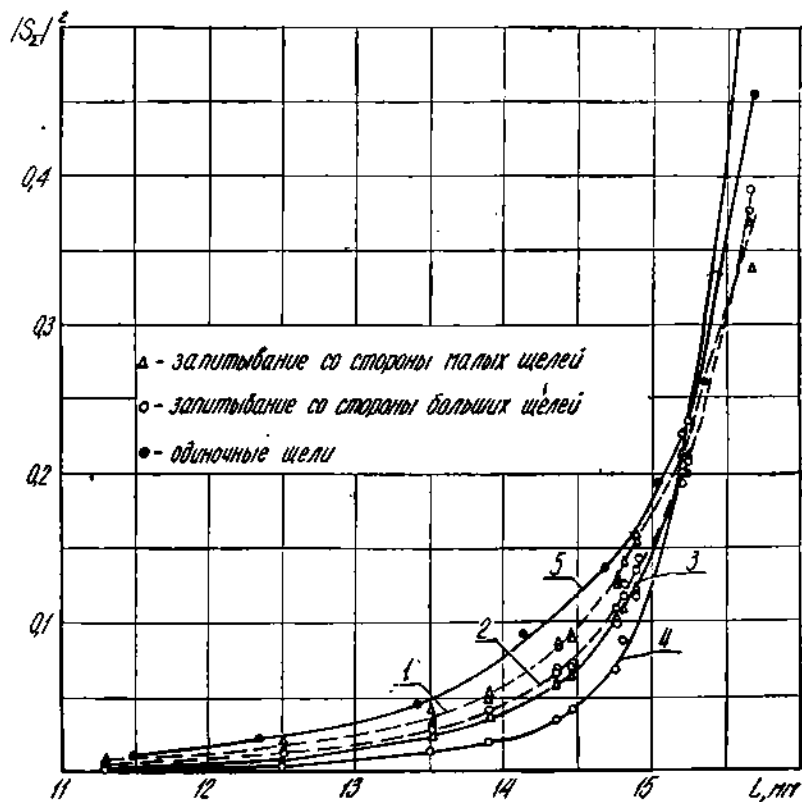


Рис. 2.

В качестве амплитудного распределения брали нормированную к максимальному значению сумму мощностей, излучаемых ортогональными щелями. Перепад мощности на входе и выходе антенны измерялся с помощью поляризационного аттенюатора.

Измерения были проведены на двух частотах: 9375 и 9272 МГц; при этом линейка запитывалась как со стороны меньших, так и со стороны больших щелей.

Ввиду того, что кругополяризованные щели являются согласованными, к. с. в. на входе антенны был достаточно хорошим:  $k_{с вх} = 1,28 \div 1,12$  (коэффициенты эллиптичности большинства щелей были не меньше 0,8). Поэтому при расчете коэффициентов излучения по формуле (11) множитель  $\frac{k_{сн}}{k_{с вх}} \left( \frac{k_{с вх} + 1}{k_{сн} + 1} \right)^2$  принимался равным единице, так как он отличался от нее на  $1 \div 2\%$ .

По экспериментальным данным рассчитаны коэффициенты излучения щелей (рис. 2) на частоте 9272 Мгц при запитывании антенн со стороны меньших (кр. 1) и больших (кр. 2) их длин, а также на частоте 9375 Мгц (кр. 3, 4 — соответственно при запитывании со стороны малых и больших щелей). Для сравнения на том же рисунке приведены результаты измерения коэффициентов излучения одиночных щелей на частоте 9375 Мгц (кр. 5)\*.

Как видно из рис. 2, взаимное влияние выражается в уменьшении коэффициентов излучения у большинства щелей линейки по сравнению с одиночными щелями тех же длин.

Как и следовало ожидать, наиболее сильно влияют друг на друга щели, находящиеся в середине линейки. На излучении крайних щелей взаимное влияние сказывается в меньшей степени.

Интересно отметить, что при запитывании линейки со стороны больших щелей коэффициенты излучения оказываются несколько меньшими, чем при запитывании со стороны малых.

Кроме того, неожиданным является тот факт, что коэффициенты излучения малых и средних щелей на частоте 9375 Мгц меньше, чем на частоте 9272 Мгц. Здесь, по-видимому, играют роль два противоречивых явления: с одной стороны, уменьшение коэффициентов излучения за счет увеличения взаимного влияния на частоте 9375 Мгц, с другой, — увеличение коэффициентов излучения с увеличением частоты. Поэтому зависимость коэффициента излучения от длины щели и частоты носит сложный характер.

Полученный график (рис. 2) можно использовать для расчета волноводно-щелевых антенн с заданным амплитудным распределением. Необходимые коэффициенты излучения щелей следует вычислять по формуле (11), подставляя в нее заданное амплитудное распределение. При этом  $k_{с\text{ вх}}$  нужно полагать равным единице, а отношение  $\frac{P_n}{P}$  выбирать таким образом, чтобы коэффициент излучения не превышал максимального возможного значения.

Описанный метод можно использовать в случае любых неотражающих щелей. При этом результаты будут тем больше приближаться к истинным, чем лучше согласованы щели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Simmons A. I. Trans. IRE, V. A—P—5, № 1, 1957, p. 31.

\* Измерены Ю. А. Колтаковым.

**К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА  
ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ НАД СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ  
РАЗДЕЛА**

*Э. И. Черняков, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов*

В последнее время вызывает интерес излучение электромагнитных волн, обусловленное движением электронного потока или отдельного электрона над периодической структурой. Механизм такого излучения наглядно объясняется с помощью модели «мигающего» диполя [1]–[3], которая остается пригодной и для рассматриваемого случая дифракционной решетки, лежащей на границе полубесконечного диэлектрика с произвольным значением проницаемости  $\epsilon$ . Такая задача представляет определенный интерес, поскольку наличие диэлектрика влияет на амплитуду и направление излучения движущегося заряда или системы зарядов.

Впервые излучение заряда, движущегося над дифракционной решеткой, экспериментально наблюдалось Смитом и Парселлом в 1953 г. [2]. Оценка этого эффекта как источника светового и инфракрасного излучения содержится в работе [3].

Теоретическое рассмотрение излучения, обусловленного движением плоского монохроматического электронного потока над дифракционной решеткой, впервые проведено в работе [4].

В настоящей работе приводится строгое математическое решение задачи об излучении плоского монохроматического электронного потока, движущегося над бесконечно протяженной ленточной решеткой, помещенной на границе раздела вакуум-диэлектрик.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим электронный пучок с переменной составляющей комплексной амплитуды

$$\rho = \rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}, \quad (1)$$

который движется в вакууме над металлической решеткой вдоль оси  $Oy$  с постоянной скоростью  $\vec{v} = \vec{j}v$ ; решетка расположена на границе диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  в плоскости  $z = -a$ . Здесь введены следующие обозначения:

$\rho_0$  — амплитуда модуляции пучка,

$\omega$  — частота модуляции,

$c$  — скорость света,

$$k = \frac{\omega}{v};$$

$\delta(z)$  — дельта-функция Дирака;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты прямоугольной системы координат.

Период решетки  $l$  и ширина лент  $d$ ; образующие лент параллельны оси  $Ox$ .

Для удобства рассмотрения обозначим полупространство над решеткой ( $\epsilon = 1$ ) через область I, а полупространство под решеткой ( $\epsilon \neq 1$ ) через область II.

Векторный и скалярный потенциалы для области находятся из решения уравнений

$$\square \vec{A}_1 = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2)$$

$$\square \Phi_1 = -4\pi\rho, \quad (3)$$

где ток  $\vec{J} = \vec{j} \rho \beta c$ .

Из (2) и (3) следует простая связь между их частными решениями:

$$a_1 = \vec{j} \beta \varphi_1. \quad (4)$$

Следовательно, для области 1 задача сводится к отысканию общего решения уравнений (2), (3) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\square \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}. \quad (5)$$

Разделив на оператор Даламбера, получим решение в виде, аналогичном приведенному в [5]:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho_0}{q} e^{-q|z|} e^{i(ky - \omega t)}, \quad (6)$$

где  $q = k\beta = k\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Используя свойство градиентной инвариантности потенциала, общее решение уравнений (2), (3) будем искать в виде

$$\vec{a}_1^0 \neq 0; \quad \varphi_1^0 = 0. \quad (7)$$

Ввиду однородности структуры пучок—решетка вдоль оси и периодичности вдоль оси  $Oy$  вектор  $\vec{a}_1^0$  должен иметь только  $y$ - и  $z$ -компоненты, которые целесообразно представить в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 = & \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ny} e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y} + \\ & + \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Постоянная распространения  $q_n = k\beta_n = k\sqrt{\beta^2 - \left(1 + n\frac{\beta}{x}\right)^2}$  находится из подчинения (8) однородному уравнению (2). Здесь и дальше подразумевается зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ .

Связь между неизвестными коэффициентами определяется из условия Лоренца:

$$a_{ny} = -a_n \frac{\beta_n}{1 + n\frac{\beta}{x}} = -a_n \tau_n,$$

где  $x = \frac{l}{\lambda}$ ;  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ .

Во второй области ( $\epsilon \neq 1$ ) векторный и скалярный потенциалы подчиняются однородным уравнениям

$$\square \vec{A}_{11} = 0, \quad (9)$$

$$\square \Phi_{11} = 0. \quad (10)$$

Решение их находится в следующей форме:

$$\Phi_{II} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{II} = & \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y} + \\ & + \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подчинив  $\vec{A}_{II}$  однородному уравнению (9), найдем

$$q_{2n} = k\theta_{2n} = k \sqrt{\epsilon\beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2}.$$

Из условия Лоренца легко получим

$$b_{ny} = b_n \frac{\theta_{2n}}{1 + n \frac{\beta}{x}} = b_n \tau_{2n}.$$

Электромагнитное поле для каждой области определится через векторный и скалярный потенциалы  $-\vec{A}_I = \vec{a}_I + \vec{a}_I^0$ ;  $\Phi_I = \varphi_I + \varphi_I^0$ ;  $\vec{A}_{II}$ ;  $\Phi_{II}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_I = & \left(-i\theta \vec{j} + \frac{d|z|}{dz} \vec{k}\right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\tau_n \vec{j} + \vec{k}) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\vec{H}_I = \vec{e} \left\{ \beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y} \right\}; \quad (14)$$

$$\vec{E}_{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau_{2n} \vec{j} + \vec{k}) B_n e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}; \quad (15)$$

$$\vec{H}_{II} = \vec{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}. \quad (16)$$

где  $F = 2\pi\beta$ ,  $A_n = ik\beta a_n$ ;  $B_n = ik\beta b_n$ .

Излучение возможно только в том случае, когда величины  $q_n$  и  $q_{2n}$  вещественны, что имеет место при

$$\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2 \quad \text{и} \quad \epsilon\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2. \quad (17)$$

Когда выполняются оба условия, излучение существует в обеих областях. Соответствующим выбором соотношения между диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$ , скоростью пучка  $\beta$  и параметром  $x$  можно добиться существования излучения только в области II. Заметим, что в отличие от случая решетки в свободном пространстве [4], где условие излучения выполняется только для  $n < 0$ , в рассматриваемом случае излучение возможно и при  $n > 0$ . Когда  $n = 0$ , наблюдается эффект Вавилова — Черенкова.

Из анализа поля обнаруживается простая связь между длиной волны излучения и направлением ее распространения:

$$\cos \gamma_n = \frac{1}{\beta} + n \frac{\lambda}{l}; \quad (18)$$

$$\cos \gamma_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \frac{1}{\beta} + n \frac{\lambda}{l} \right), \quad (19)$$

где  $\gamma_n$  — угол между плоскостью решетки и направлением излучения, отсчитываемый в положительном направлении, а  $\gamma_{2n}$  — в отрицательном.

Для количественного анализа излучения необходимо определить коэффициенты Фурье поля  $A_n$  и  $B_n$ , подчинив уравнения (13) — (16) граничным условиям на одном из периодов решетки, например,  $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ .

Потребуем выполнения точных граничных условий: равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на металле и непрерывности всего электромагнитного поля на щелях:

$$z = -a \quad E_{II} = E_{III} = 0 \quad (\text{на металле}); \quad (20)$$

$$E_{II} = E_{III}; \quad H_{II} = H_{III} \quad (\text{на щели}). \quad (21)$$

Подставляя выражения для поля (13) — (16) в (20) — (21), получим равенства для коэффициентов  $A_n, B_n$ :

$$F_n + A_n = -B_n \frac{\theta_{2n}}{\theta_0}; \quad A_n = -B_n \frac{\theta_{2n}}{\theta_n}, \quad (22)$$

где  $F_n = Fe^{-na}$ ;  $\theta_{2n} = \sqrt{\epsilon\beta^2 - 1}$ ;  $\theta_0 = \sqrt{\beta^2 - 1}$ ,  
и пару уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \tau_n e^{i(k+2\pi \frac{n}{l})y} = -i\theta F_0 e^{iky}; \quad |y| < \frac{d}{2}; \quad (23)$$

$$\left[ A_0 \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) - F_0 \left( 1 - \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) \right] e^{iky} + \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{1 + n \frac{\beta}{x}} \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}} \right) e^{i(k+2\pi \frac{n}{l})y} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

Вводя новые коэффициенты

$$2C_0 = A_0 \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) - F_0 \left( 1 - \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right);$$

$$2C_n = A_n \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}} \right)$$

и сделав соответствующие преобразования в (23) и (24), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{1 + n \frac{\beta}{x}} e^{i(k+2\pi \frac{n}{l})y} = 0; \quad (25)$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\tau_n}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} e^{i \left( k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y} = - \frac{i \theta F_a}{1 + \varepsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}}} e^{iky}, \quad (26)$$

$$|y| < \frac{d}{2}$$

## 2. Решение граничной задачи

Продифференцировав (25) по  $y$  и проделав некоторые преобразования с (26), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \quad (27)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\left| 1 + n \frac{\beta}{x} \right|}{1 + n \frac{\beta}{x}} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2} - 1} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = -i\mathcal{E}, \quad (28)$$

$$|y| < \frac{d}{2},$$

где

$$\mathcal{E} = \theta \mathcal{E}_0 = \theta \frac{F_a (1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}}} \text{ и } 1 + n \frac{\beta}{x} \neq 0.$$

К равенствам (27) — (28) добавим еще одно, получающееся после подстановки в (25) конкретного значения  $y$ , например,  $y = \frac{l}{2}$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{1 + n \frac{\beta}{x}} = 0. \quad (29)$$

Обозначим

$$g_n = \frac{\left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)}{1 + n \frac{\beta}{x}} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2} - 1};$$

$$\chi_n = 1 + i \frac{|n|}{n} g_n; \quad \delta = \pi \frac{d}{l}; \quad \psi = 2\pi \frac{y}{l}. \quad (30)$$

Заметим, что  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$  и

$$g_n = i \frac{|n|}{n} (1 - \chi_n). \quad (31)$$

Уравнения (27) — (28) с учетом (30) — (31) примут вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\psi} = 0; \quad \delta < |\psi| < \pi; \quad (32)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n} (1 - \chi_n) e^{in\psi} = -\mathcal{E}; \quad |\psi| < \delta. \quad (33)$$



Эта пара уравнений образует задачу Римана — Гильберта, подробности решения которой приведены в работе [7]. Окончательное решение уравнений (32), (33) совместно с (29) запишем в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье и неизвестной промежуточной константы С

$$\left. \begin{aligned} 2CR_s + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_s^n &= \mathcal{E}V_s^0 \\ 2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left( \frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= \mathcal{E}V_m^0 \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Величины  $R_m$ ,  $V_m^n$ ,  $R_s$  и  $V_s^n$  вычислены в работах [6] и [7].

Система (34) допускает получение решения методом редукции. При всех достижимых значениях диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и относительной скорости  $\beta$  можно найти такое  $N$ , что  $\chi_n \rightarrow 0$  для всех  $|n| > N$  и, следовательно, в (34) слагаемыми с  $|n| > N$  можно пренебречь. Это выполняется при  $\beta \sqrt{\epsilon} \ll \left| 1 + n \frac{\beta}{z} \right|$ .

Следовательно, бесконечную систему уравнений (34) можно свести к ограниченной. Для отыскания численных значений необходимо использовать ЭВМ.

### 3. Энергетические характеристики излучения

Определим среднее значение вектора Умова — Пойнтинга  $\vec{S}$  на единичной площадке произвольной плоскости  $z = h$ ; для этого достаточно найти его среднюю величину на участке

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}:$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_I = \sum_{n=-1}^{-N} \left( \vec{j} \frac{1}{\eta+n} + \vec{k} \frac{V_{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2}}{(\eta+n)^2} \right) \frac{V_{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2}}{(\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2} + \epsilon V_{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2})^2} \times \\ \times \frac{\epsilon c}{2\pi} |C_n|^2 \text{ при } h > -a; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_{II} = \left( \vec{j} \frac{1}{\eta} - \vec{k} \frac{V_{\epsilon x^2 - \eta^2}}{\eta^2} \right) \frac{x^2 - \eta^2}{(\sqrt{\epsilon x^2 - \eta^2} + \epsilon V_{\epsilon x^2 - \eta^2})^2} - \frac{\epsilon x c}{2\pi} |C_0 + F_s|^2 + \\ + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \left( \vec{j} \frac{1}{\eta+n} - \vec{k} \frac{V_{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2}}{(\eta+n)^2} \right) \frac{x^2 - (\eta+n)^2}{(\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2} + \epsilon V_{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2})^2} \times \\ \times \frac{\epsilon x c}{2\pi} |C_n|^2 \text{ при } h < -a, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\eta = \frac{z}{\beta}$  и индекс  $n$  принимает все значения, для которых выполняются условия излучения.

Таким образом, монохроматический электронный поток при движении над периодической структурой, расположенной на плоской границе раздела вакуум — диэлектрическая среда, возбуждает электромагнитные колебания (13) — (16), частота которых совпадает с частотой модуляции

пучка, а направление излучения образует дискретный спектр, аналогичный дифракционному спектру. Из анализа уравнений (18) — (19) и (35) — (36) следует, что излучение является несимметричным относительно границы раздела и по направлению и по амплитуде, в отличие от излучения пучка, движущегося над решеткой в свободном пространстве [4]. Необходимо отметить принципиальную возможность излучения на пространственных гармониках с индексом  $n \geq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Желли. Черенковское излучение, ИЛ, 1960.
  2. S. J. Smith, E. M. Purcell. Phys. Rev., 92, № 4, 1069 (1953).
  3. K. Ishiguro, T. Tako. International Journal Optica Acta, 8, 1 (1961).
  4. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопапов. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
  5. M. Dapos. Journal Appl. Phys., 26, № 1 (1955).
  6. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
  7. А. И. Адонья, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 33, № 6 (1963).
-

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОГРАНИЧЕННЫМ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ НАД ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

А. И. Цвык, О. А. Третьяков

1. Рассмотрим плоский электронный пучок ширины  $2b$ , движущийся с постоянной скоростью  $\vec{v} = \vec{j}\beta c$  вдоль оси  $Oy$  над бесконечной ленточной металлической решеткой (рис. 1). Переменная составляющая плотности потока определяется выражением

$$\rho = \rho_0 f(x) \delta(z) e^{i(xy - \omega t)},$$

Здесь

$\rho_0$  — амплитуда модуляции потока;

$c$  — скорость света;

$\omega$  — частота модуляции;

$k = \frac{\omega}{v}$  — волновое число вдоль оси  $Oy$ ;

$\delta(z)$  — дельта-функция Дирака;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты прямоугольной системы координат;

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < b \\ 0 & |x| > b. \end{cases}$$

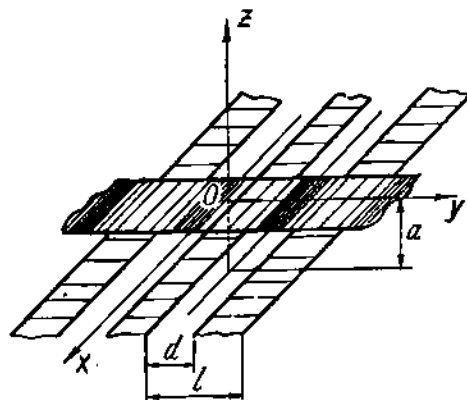


Рис. 1.

Введем следующие обозначения:  $l$  — период решетки,  $d$  — ширина щелей,  $a$  — расстояние между решеткой и щелью.

Векторный и скалярный потенциал находятся из решения уравнений

$$\Delta \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}; \quad (2)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (3)$$

где  $\vec{J} = \vec{j}\beta\rho c$  — плотность тока электронного пучка.

Воспользовавшись интегральным представлением функции

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin hb}{h} e^{ihx} dh, \quad (4)$$

решение уравнений (2) и (3) будем искать в виде

$$\vec{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_h(x, y, z, h, \omega, t) dh; \quad (5)$$

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(x, y, z, h, \omega, t) dh, \quad (6)$$

где  $h$  — волновое число вдоль оси  $Ox$ .

После подстановки (5) и (6) в (2) и (3) получим уравнения относительно компонент Фурье

$$\Delta \vec{A}_h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_h}{\partial t^2} = 4j\vec{\beta}\rho_0 \delta(z) \frac{\sin hb}{h} e^{i(hx+ky-\omega t)}; \quad (7)$$

$$\Delta \Phi_h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial t^2} = 4\rho_0 \delta(z) \frac{\sin hb}{h} e^{i(hx+ky-\omega t)}. \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (2) и (3) для монохроматического пучка конечной ширины свелись к уравнениям (7) и (8) для бесконечно протяженного плоского электронного потока, гармонического вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . Решение уравнений можно получить таким же путем, как и для электронного потока, монохроматического только вдоль оси  $Oy$  (см., например, работу [2]).

Для верхнего полупространства  $|z > -a|$  решение (7), (8) для фиксированного значения  $h$  имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{A}_h &= \vec{j} 2\rho_0 \beta \frac{\sin hb}{hq} e^{-q|z|} e^{i(hx+ky)} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{i} a_{nx} + \vec{j} a_{ny} + \vec{k} a_{nz}] e^{i q_n (z+a)} e^{i h x} e^{i \left( k + 2\pi \frac{n}{T} \right) y}; \quad (9) \\ \Phi_h &= 2\rho_0 \frac{\sin hb}{hq} e^{-q|z|} e^{i(hx+ky)}. \end{aligned}$$

Для нижнего полупространства  $|z < -a|$  векторный и скалярный потенциалы равны

$$\begin{aligned} \vec{B}_h &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{i} b_{nx} + \vec{j} b_{ny} + \vec{k} b_{nz}] e^{-i q_n (z+a)} e^{i h x} e^{i \left( k + 2\pi \frac{n}{T} \right) y}; \\ \Psi_h &= 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} q &= k \sqrt{1 - \beta^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}; \\ q_n &= k \theta_n = k \sqrt{\beta^2 - \left[ \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2 \right]} \end{aligned}$$

и имеется связь между коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_{ny} &= -\frac{\frac{h}{k}}{1 + n \frac{\beta}{x}} a_{nx} - \frac{\theta_n}{1 + n \frac{\beta}{x}} a_{nz}; \\ b_{ny} &= -\frac{\frac{h}{k}}{1 + n \frac{\beta}{x}} b_{nx} + \frac{\theta_n}{1 + n \frac{\beta}{x}} b_{nz}. \end{aligned}$$

Зависимость от времени в виде  $e^{-i\omega t}$  подразумевается.

Электромагнитное поле определяется через потенциалы (9), (10) для каждого полупространства следующим образом:

$$\vec{E}_h^I = \left[ -\vec{i} \frac{ih}{q} - \vec{j} \frac{i}{\beta} (1 - \beta^2) + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right] P \exp [i(hx + ky) - q|z|] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \vec{i} \mu - \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1 + n \frac{\beta}{x}} \Theta_n + \vec{k} \right] A_n \exp \left\{ i \left[ hx + \left( k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (11)$$

$$\vec{H}_h^I = \left[ \vec{i} \frac{d|z|}{dz} + \vec{k} \frac{ih}{q} \right] \beta P \exp [i(hx + ky) - q|z|] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \vec{i} \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} - \vec{k} \frac{\mu\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} \right] A_n \exp \left\{ i \left[ hx + \left( k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (12)$$

$$\vec{E}_h^{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -\vec{i} \mu + \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1 + n \frac{\beta}{x}} \Theta_n + \vec{k} \right] B_n \exp \left\{ i \left[ hx + \left( k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (13)$$

$$\vec{H}_h^{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \vec{i} \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} + \vec{k} \frac{\mu\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} \right] B_n \exp \left\{ i \left[ hx + \left( k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y - q_n (z + a) \right] \right\} \quad (14)$$

где  $P = 2\rho_0 \frac{\sin hb}{h}$ ;  $A_n = ik\beta a_{nx}$ ;  $B_n = ik\beta b_{nx}$ ;  $\mu = \frac{h}{q_n}$ , а связь между коэффициентами

$$a_{nx} = \mu a_{nz}; \quad b_{nx} = -\mu b_{nz}$$

определяется из условия  $H_y = 0$ , которое следует из соображений симметрии.

Часть электромагнитного поля (11) — (14), представленная в виде ряда Фурье, обусловлена наличием решетки вблизи траектории электронного потока. Легко видеть, что излучение электромагнитного поля возникает лишь при условии, что  $q_n$  вещественно, т. е.

$$\beta^2 > \left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left( \frac{h}{k} \right)^2 \quad (15)$$

Это возможно только для  $n < 0$ ; условие излучения (15) для ограниченного пучка при  $h = 0$  переходит в ранее полученное в [1] для неограниченного электронного потока. Для  $h \neq 0$  излучение возникает при больших значениях скорости  $\beta$ , если величина  $n \frac{\beta}{x}$  остается постоянной. Для фиксированных значений  $x$ ,  $\beta$ ,  $n$  излучение будет наблюдаться в следующем интервале значений:

$$\left( \frac{h}{k} \right)^2 < \beta^2 - \left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 \quad (15a)$$

Чтобы установить энергетические характеристики излучения, необходимо определить коэффициенты Фурье поля  $A_n$  и  $B_n$ . Для этого подчиним поле (11) — (14) граничным условиям на поверхности решетки при  $z = -a$ :

$$\begin{aligned} E_t^I &= E_t^{II} = 0 && \text{(металл);} \\ E_t^I &= E_t^{II}; \quad H_t^I &= H_t^{II} && \text{(щель).} \end{aligned}$$

После некоторых преобразований получим систему уравнений относительно коэффициентов Фурье  $A_n$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{1+n\frac{\beta}{x}} e^{i(k+2\pi\frac{n}{l})y} &= 0, \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Theta_n}{1+n\frac{\beta}{x}} A_n e^{i(k+2\pi\frac{n}{l})y} &= -i\varepsilon, \quad |y| < \frac{d}{2} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

и связь между коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$

$$\varepsilon_0 + A_0 = -B_0, \quad (18)$$

$$A_n = -B_n, \quad (19)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{1-\beta^2}{\theta}$ ;  $\varepsilon_0 = Pe^{-qa}$ .

Значит, задача свелась к системе уравнений, аналогичных (1) — (5).

Воспользовавшись полученными там результатами, запишем решение (16) — (17) в виде бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} 2CR_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_0^n &= \varepsilon V_0^0; \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left( \frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= \varepsilon V_m^0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3, \dots$

$$\chi_n = 1 + iG_n; \quad G_n = \frac{|n|}{n} \sqrt{\frac{\beta^2 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} - 1}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

а величины  $R_0; R_m; V_0^0; V_m^0$  те же, что и в работах [1] — [3].

2. Определим среднее значение вектора Умова — Пойнтинга  $\vec{S}$  на единичной площадке произвольной плоскости  $z = \xi$ . Запишем среднюю величину  $\vec{S}_h$  для электромагнитного поля (11) — (14) на участке  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ :

$$\vec{S}_h^I = \frac{c}{8\pi} \beta \sum_{n=-1}^{\infty} \left[ \vec{i} \frac{\mu^2+1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \cdot \frac{h}{k} + \vec{j} \frac{\mu^2+1}{1+n\frac{\beta}{x}} + \vec{k} \frac{\mu^2+1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \Theta_n \right] |A_n|^2; \quad (22)$$

$$\vec{S}_h^{II} = \frac{c}{8\pi} \beta \sum_{n=-1}^{\infty} \left[ \vec{i} \frac{\mu^2+1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \cdot \frac{h}{k} + \vec{j} \frac{\mu^2+1}{1+n\frac{\beta}{x}} - \vec{k} \frac{\mu^2+1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \Theta_n \right] |A_n|^2;$$

Индекс  $n$  принимает все значения, при которых выполняется условие излучения (15).

Направление излучения образует дискретный спектр, аналогичный дифракционному спектру, каждая гармоника излучения характеризуется амплитудой  $A_n$ , которая определяется из системы уравнений (20) — (21). Из формул (22) можно определить направление излучения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\gamma_{nx} = \pm \operatorname{arctg} \frac{k}{h} \sqrt{\beta^2 - \left[ \left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left( \frac{h}{k} \right)^2 \right]}; \quad (23)$$

$$\gamma_{ny} = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta^2 - \left[ \left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left( \frac{h}{k} \right)^2 \right]}}{1 + n \frac{\beta}{x}}. \quad (24)$$

Таким образом, электронный поток при своем движении над дифракционной решеткой излучает электромагнитные волны под углами  $\gamma_{nx}$  и  $\gamma_{ny}$  к оси  $Ox$  и  $Oy$ . В соотношениях (23) — (24) знак «+» соответствует верхнему полупространству, а знак «-» — нижнему. Из формулы (24) легко находится длина волны излучения

$$\lambda = \frac{v}{n} \left\{ \cos \gamma_{ny} \left[ 1 + \left( \frac{h}{k\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta} \right\}. \quad (25)$$

Следует заметить, что (23) — (25) при  $h = 0$  переходит в соотношения для неограниченного плоского потока, монохроматического вдоль оси  $Oy$  [1].

Чтобы получить всю излучаемую потоком энергию, необходимо формулы (22) для фиксированного значения  $h$  проинтегрировать по всем возможным величинам  $h$ .

Следует учесть, что условие (15) выполняется в интервале значений  $h$  (15a) для составляющих  $\vec{S}_y$  и  $\vec{S}_z$  и в интервале

$$0 < h < k \sqrt{\beta^2 - \left( 1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2}$$

для значения  $\vec{S}_x$ .

3. Рассмотрим частный случай, когда условие излучения выполняется только для 1-й гармоники. Амплитуда  $A_{-1}$  определяется из решения системы уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} 2CR_0 - A_{-1} \chi_{-1} V_0^{-1} &= \epsilon V_0^0 \\ 2CR_{-1} - A_{-1} (\chi_{-1} V_{-1}^{-1} - 1) &= \epsilon V_{-1}^0 \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Легко убедиться, что

$$A_{-1} = \frac{\zeta \left[ \zeta (1+u) \ln \frac{1+u}{2} + u - 1 \right]}{4 \left[ \zeta \ln \frac{1+u}{2} \left( \frac{1}{2} \zeta \chi_{-1} - 1 \right) - 1 \right]} \epsilon, \quad (28)$$

где  $\zeta$  — малая добавка  $\frac{x}{\beta} = 1 + \zeta$ , относительно которой раскладываются в ряд Тейлора функции Лежандра, входящие в уравнение (27). В этом случае, когда  $\zeta = 0$ , движущийся пучок излучает энергию

строго по нормали к решетке. Интегральная мощность излучения минус первой гармоники в этом случае вычисляется по формуле

$$\vec{S}_2 = \pm \vec{k} \frac{c}{32\pi} \frac{z^2 \rho^2}{\beta} (u-1) (1-\beta^2)^2 \left[ \beta^2 - \left(1 - \frac{\beta}{z}\right)^2 \right] \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\sin hb}{h}\right)^2 \times \\ \times \frac{e^{-2qa}}{\theta \sqrt{\beta^2 - \left[ \left(1 - \frac{\beta}{z}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2 \right]}} dh,$$

где  $\zeta \ln \frac{1+u}{2} \ll u-1$ ;  $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ , а пределы интегрирования определяются условием (15а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопапов. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
2. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопапов (см. настоящий сборник).
3. О. А. Третьяков. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 4, 1962.



## ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Ю. В. Гандель

Задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в бесконечно тонком идеально проводящем плоском экране посвящено очень большое число работ, библиография которых до 1960 года приведена в работе [1].

Были получены приближенные решения в области как длинных, так и коротких волн.

В настоящей работе доказывается, что рассматриваемая задача может быть сведена, и притом точно, к интегральному уравнению вида

$$g(t) + \frac{i}{\pi} \int_0^a \left( \frac{\text{sh } k(t+x)}{t+x} + \frac{\text{sh } k(t-x)}{t-x} \right) g(x) dx = f(x), \quad (1)$$

которое нужно решать два раза: при двух различных правых частях  $f(x)$ .

Впервые интегральное уравнение (1) появилось в статье Н. И. Ахиезера и А. Н. Ахиезера [2]\*. В этой статье приведена одна система спаренных интегральных уравнений, решение которой сводится к решению уравнения (1), после чего указанные спаренные уравнения применяются для отыскания первого длинноволнового приближения в интересующей нас задаче дифракции электромагнитных волн. Построение дальнейших приближений методом, предложенным в [2], и исследование вопроса сходимости представляют большие трудности. Все эти трудности отпадают, если задача точно сведена к уравнениям вида (1).

Нужно заметить, что скалярная задача дифракции звуковых волн уже была точно сведена к уравнению (1) в статье Н. И. Ахиезера [4], посвященной спаренным интегральным уравнениям.

### 1. Постановка задачи

Экран расположен в плоскости  $xOy$ , отверстие в нем — круг радиуса  $a$  с центром в начале координат.

Пусть при отсутствии отверстия в экране поле в полупространстве  $z < 0$  имеет вид

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}_0 e^{-i\omega t},$$

где

$$\vec{E}_0 = \{2i \sin kz, 0, 0\}, \quad \vec{H}_0 = \left\{0, 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos kz, 0\right\} \quad (2)$$
$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}.$$

\* Недавно уравнение (1) совсем из других соображений, но в связи с родственной задачей дифракции получено в работе [3].

Эта стоячая волна представляет собой сумму падающей и отраженной волн. В полупространстве  $z > 0$  в этом случае поле отсутствует.

Наличие отверстия изменяет поле. Будем искать  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , полагая, что зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ , в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}^- \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}^- \end{aligned} \right\} \quad (\text{в полупространстве } z < 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^+ \\ \vec{H} &= \vec{H}^+ \end{aligned} \right\} \quad (\text{в полупространстве } z > 0)$$

Поскольку экран предполагается идеально проводящим, то на нем обращается в нуль тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля. Связь между падающим полем и дифрагированным в отверстии мы получим из условия непрерывности полей. Таким образом, приходим к следующим краевым условиям [5]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^+(x, y, +0) = E_y^+(x, y, +0) = \\ = H_z^+(x, y, +0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} > a), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_z^+(x, y, +0) = H_x^+(x, y, +0) = 0 \\ H_y^+(x, y, +0) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } r < a) \quad (4)$$

Поля  $\vec{E}^+(x, y, z)$  и  $\vec{H}^+(x, y, z)$  выражаются через магнитный вектор Герца:

$$\vec{E}^+ = i \operatorname{rot} \vec{\Pi}, \quad \vec{H}^+ = \frac{1}{\omega\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}. \quad (5)$$

Вектор  $\vec{\Pi}$  ищется в виде (5):

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{M}(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - \gamma z} \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}}, \quad (6)$$

где  $\vec{M} = \{M_x, M_y, 0\}$  подлежит определению.

Условие излучения требует, чтобы радикал  $\gamma \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}$  был взят со знаком плюс, если  $\lambda^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 > k^2$ , а при  $\lambda^2 < k^2$  его мнимая часть должна быть отрицательной.

Легко показать, что если в формуле (6) всюду перед радикалом  $\gamma$  поменять знак на противоположный, то она при той же вектор-функции  $\vec{M}(\alpha, \beta)$  представит вектор Герца для полей  $\vec{E}^-$  и  $\vec{H}^-$ .

Выразим две из компонент поля  $\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$  через вектор-функцию  $\vec{M}$ :

$$H_z^+(x, y, z) = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - \gamma z} d\alpha d\beta; \quad (7)$$

$$E_y^+(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} M_x(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - \gamma z} d\alpha d\beta, \quad (8)$$

где для краткости положено [2]

$$\Phi(\alpha, \beta) = \alpha M_x(\alpha, \beta) + \beta M_y(\alpha, \beta). \quad (7')$$

Кроме того, введем обозначение [2]

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} M_x(\alpha, \beta). \quad (8')$$

Прежде чем идти дальше, необходимо указать функциональный класс, которому должна принадлежать искомая вектор-функция  $\vec{M}$ . Это должно быть сделано на основании физических соображений. Мы их приведем несколько ниже, а здесь сформулируем результат. Функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  и  $\Psi(\alpha, \beta)$  должны удовлетворять соотношениям

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{|\gamma|} < \infty, \quad (9)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\beta \Psi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{|\gamma|} < \infty. \quad (10)$$

Благодаря этому требованию правые части формул (7), (8) имеют пределы при  $z \rightarrow +0$  и, учитывая условия (3), (4), мы приходим к выводу, что должны иметь место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta) \beta e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \end{aligned} \right\} (r > a) \quad (11)$$

$$(12)$$

Эти интегралы, подобно аналогичным дальнейшим, рассматриваются как результат предельного перехода  $z \rightarrow +0$ .

Дальнейшие уравнения для определения вектор-функции  $\vec{M}(\alpha, \beta)$  получаются аналогично и имеют следующий вид:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = k^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} M_x e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}; \quad (13)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = k^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} M_y e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} - 4\pi^2 k; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta) (\alpha^2 + \beta^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = \\ = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \Phi(\alpha, \beta)}{\beta} e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \quad (\text{при } r < a) \end{aligned} \quad (15)$$

Сведением системы спаренных интегральных уравнений (11, 12), (13, 14, 15) к уравнениям Фредгольма мы займемся в следующих параграфах.

Обратимся теперь к обоснованию условий (9), (10), а именно, покажем, что эти условия выражают конечность энергии. Следовательно, они эквивалентны обычно вводимым условиям Майкснера [6]. В связи с этим

заметим, что из (7), (8) в силу равенства Парсеваля следуют соотношения

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx dy &= \frac{1}{4\pi^2 \omega^2 \mu^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+\bar{\gamma})} d\alpha d\beta; \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx dy &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |M_x(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+\bar{\gamma})} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по  $z$  от 0 до  $\infty$  и замечая, что  $\gamma + \bar{\gamma} = 0$  при  $\alpha^2 + \beta^2 < k^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx dy &= \frac{k}{4\pi^2 \omega^2 \mu^2} \iint_{\alpha^2 + \beta^2 < k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta + \\ &+ \frac{1}{8\pi^2 \omega^2 \mu^2} \iint_{\alpha^2 + \beta^2 > k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\alpha d\beta; \\ \int_0^{\infty} dz \iint_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx dy &= \frac{k}{4\pi^2} \iint_{\alpha^2 + \beta^2 < k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta + \\ &+ \frac{1}{8\pi^2} \iint_{\alpha^2 + \beta^2 > k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}. \end{aligned}$$

Вспомнивая выражение для энергии электромагнитного поля, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Заметим теперь, что в [2] вместо наших условий (9), (10) приняты другие условия, заменяющие требования Майкснера, а именно:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta < \infty, \quad (9')$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\beta \Psi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta < \infty, \quad (10')$$

где число  $p > 2$  сколь угодно близко к 2.

Покажем теперь, что из этих последних условий вытекают условия (9), (10).

Пусть, например, выполнено условие (9'). Чтобы получить (9), докажем, что при достаточно большом  $R$

$$\iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\lambda} < \infty,$$

где область  $(R)$  есть внешность круга радиуса  $R$  с центром  $\alpha = \beta = 0$ . Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\lambda} &< \left[ \iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta \right]^{\frac{2}{p}} \times \\ &\times \left[ \iint_{(R)} \frac{d\alpha d\beta}{\lambda^{\frac{p}{p-2}}} \right]^{\frac{p-2}{p}}. \end{aligned}$$

Если только  $2 < p < 4$ , то из справедливости (9') при любом сколь угодно близком к 2, но большем его  $p$  неравенство (9) также будет справедливо.

## 2. Сведение задачи к решению системы спаренных интегральных уравнений специального вида

Примем как известный факт, что рассматриваемая нами краевая задача имеет единственное решение при условиях (9), (10), равносильных условиям Майкснера.

Наша задача состоит в нахождении решения, точнее говоря, в построении уравнений, удобных для решения.

Воспользуемся единственностью решения следующим образом: заменим во всех уравнениях (11, 12), (13—15)  $x$  на  $-x$ , а затем заменим переменную интегрирования  $\alpha$  на  $-\alpha$ . Из рассмотрения получающихся таким образом уравнений благодаря единственности решения можно заключить, что

$$\Phi(-\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(-\alpha, \beta) = -\Psi(\alpha, \beta).$$

Аналогично получим равенства

$$\Phi(\alpha, -\beta) = -\Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(\alpha, -\beta) = \Psi(\alpha, \beta).$$

Этим соотношениям можно удовлетворить, полагая

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta E(\lambda), \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda).$$

Сделав предположение, покажем, что оно приведет нас к решению, после чего остается снова воспользоваться единственностью.

Мы можем положить

$$E(\lambda) = C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda),$$

так что, благодаря соотношениям (7'), (8'),

$$M_x = \alpha \beta D(\lambda), \quad M_y = C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda) \quad (16)$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)], \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda). \quad (17)$$

После подстановки выражений (16), (17) в систему уравнений (11, 12), (13—15) приходим к следующим уравнениям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{dad\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta \left[ \frac{C(\lambda)}{\gamma} + \gamma D(\lambda) \right] e^{i(\alpha x + \beta y)} dad\beta = 0 \quad (r < a); \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} dad\beta = 0 \quad (r > a); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 \gamma D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} dad\beta = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma} C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} dad\beta - 4\pi^2 k \quad (r < a); \quad (21) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} dad\beta = 0 \quad (r > a), \quad (22)$$

которые после несложных преобразований приводятся к виду

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \quad (23)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta \gamma D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r < a); \quad (24)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a); \quad (25)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \gamma [C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = -4\pi^2 k \quad (r < a); \quad (26)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a). \quad (27)$$

Вводя в плоскости  $\alpha, \beta$  полярные координаты  $\lambda, \psi$ , мы сможем во всех двойных интегралах выполнить интегрирование по полярному углу, после чего останутся простые интегралы.

Уравнения (24), (25) непосредственно приводятся к виду

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = A J_2(kr) \quad (r < a); \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a). \quad (29)$$

С помощью (25) приведем (27) к виду

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a), \quad (30)$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a). \quad (31)$$

После ряда преобразований из (27) и (23) получим

$$\int_0^{\infty} \lambda \left[ C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda) \right] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2} J_0(kr) \quad (r < a); \quad (32)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 C(\lambda) J_1(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = 0 \quad (r < a). \quad (33)$$

Можно показать, что (32) является следствием остальных уравнений при условии, что

$$\int_0^{\infty} \lambda \left[ C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda) \right] \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2}. \quad (34)$$

Таким образом, мы получили два спаренных интегральных уравнения для определения функций  $D(\lambda)$  и  $C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)$ :

$$(I) \begin{cases} \int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda} = A J_2(kr) & (r < a); \\ \int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) d\lambda = 0 & (r > a); \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda} = A k J_1(kr) & (r < a); \\ \int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 & (r > a). \end{cases}$$

Константу  $A$ , которая появилась при интегрировании, можно найти из условия (34). Остается преобразовать неравенства, выражающие условие Майкснера. Это легко приводит к следующему результату:

$$\int_N^{\infty} |C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda^3 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} < \infty, \tag{35}$$

$$\int_N^{\infty} |\lambda^3 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} < \infty.$$

Эти условия будут удовлетворены, если, как отмечалось выше, при  $\rho > 2$

$$\int_0^{\infty} |\lambda [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]|^\rho \lambda d\lambda < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} |\lambda^3 D(\lambda)|^\rho \lambda d\lambda < \infty.$$

Однако мы примем условия (35).

### 3. Интегральные уравнения Фредгольма для рассматриваемой задачи

Спаренные уравнения (I) и (II) могут быть сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с вещественным симметричным ядром и чисто мнимым параметром. Этот вопрос подробно рассмотрен в статье [4], где изучаются также и более общие спаренные уравнения. Для удобства мы приведем здесь формулировку\* нужной нам теоремы из статей [2] и [4].

\* Здесь внесено лишь одно изменение, а именно: в статье [2] вместо условия (35) требуется, чтобы при любом

$$\int_0^{\infty} |\varphi(\lambda) \lambda^m|^\rho \lambda d\lambda < \infty.$$

Даны спаренные уравнения

$$\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} d\lambda = 0 \quad (r > a);$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} \frac{d\lambda}{\lambda} = F(r) r^m \quad (0 \leq r < a),$$

где  $m (\geq 0)$  целое число,  $\gamma$  определено, как выше,  $F(r)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) — гладкая функция.

Ищется решение  $\varphi(\lambda)$ , удовлетворяющее условию

$$\int_0^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \lambda^{2m} d\lambda < \infty. \quad (36)$$

Это решение единственно и имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(t) \cos(t\gamma) dt,$$

где  $g(t)$  есть решение уравнения

$$g(t) + \frac{t}{\pi} \int_0^a \left[ \frac{\operatorname{sh} k(t+x)}{t+x} + \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} \right] g(x) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch}(k \sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr,$$

и  $f(r)$  находится при помощи квадратур по формуле

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^m f(r) = (-1)^m F(r),$$

а произвольные постоянные в составе  $f(r)$  однозначно определяются из условия, чтобы функция  $\varphi(\lambda)$  удовлетворяла соотношению (36).

Для пояснения заметим, что неравенство (36) при заданном  $m$  требует определенной гладкости функции  $g(t)$  и удовлетворения некоторым условиям ею и ее производными до определенного порядка на концах интервала  $[0, a]$ . Для этого и нужны произвольные постоянные в составе  $f(r)$ . Если  $m = 0$ , то, конечно, никаких постоянных не будет, но и условие (36) будет выполнено автоматически.

При  $m = 1$  условие (36) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$g(a) = 0.$$

Ниже мы на этом еще остановимся.

Для системы (I) функция  $f(r)$ , входящая в правую часть интегрального уравнения, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 f(r) = A \frac{J_2(kr)}{r^2},$$

которое дает для  $f(r)$  следующее выражение:

$$f(r) = A \left[ \frac{J_0(kr)}{k} + B_1 r^2 + B_2 \right];$$



возникшие здесь постоянные интегрирования  $B_1$  и  $B_2$  должны быть найдены из условия

$$\int_0^{\infty} |D(\lambda) \lambda^2|^2 d\lambda < \infty.$$

Как это сделать, мы укажем ниже.

Для вычисления правой части интегрального уравнения воспользуемся вторым определенным интегралом Сонина [7]:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu}(z \sin \theta) J_{\nu}(\zeta \cos \theta) \sin^{\mu+1\theta} \cos^{\nu+1\theta} d\theta = \\ & = \frac{z^{\mu} \zeta^{\nu} J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{z^2 + \zeta^2})}{(\sqrt{z^2 + \zeta^2})^{\mu+\nu+1}} \quad (\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1). \end{aligned}$$

Полагая  $\mu = 0$ ,  $\nu = -1/2$ ,  $\zeta = ikt$ , получаем

$$\int_0^t r J_0\left(\frac{z}{t} r\right) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = t \frac{\sin \sqrt{z^2 - (kt)^2}}{\sqrt{z^2 - (kt)^2}}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при  $z \rightarrow kt$ , будем иметь

$$\int_0^t r J_0(kr) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = t.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} & \int_0^t r \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{\operatorname{sh} kt}{k}; \\ & \int_0^t r^2 \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{2}{k^2} t \operatorname{ch} kt - \frac{2}{k^3} \operatorname{sh} kt. \end{aligned}$$

Окончательно получаем следующий результат. Решение системы (I) имеет вид

$$D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g_1(t) \cos(t\gamma) dt,$$

где  $g_1(t)$  подлежит определению из интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром

$$\begin{aligned} & g_1(t) + \frac{t}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} g_1(x) dx = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{k} [1 + B_1 \operatorname{ch} kt + 2B_2 t \operatorname{sh} kt]. \end{aligned}$$

Аналогично для системы (II) будем иметь

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g_2(\lambda) \cos(t\gamma) dt,$$

где  $g_2(t)$  подлежит определению из уравнения

$$g_2(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\text{sh } k(t-x)}{t-x} g_2(x) dx = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kA [1 + B \text{ch } kt],$$

а постоянная  $B$  может быть найдена из условия

$$\int_0^{\infty} |[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] \lambda|^2 d\lambda < \infty. \quad (37)$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \frac{\sin \gamma a}{\gamma} g_2(a) - \int_0^a g_2'(t) \frac{\sin \gamma t}{\gamma} dt,$$

где  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$  и для выполнения (37) достаточно положить  $g_2(a) = 0$ . Это условие и даст возможность вычислить  $B$ .

Аналогично находим, что для определения постоянных  $B_1$  и  $B_2$  нужно потребовать  $g_1(a) = g_1'(a) = 0$ .

Подробным расчетом дифрагированного поля на основе изложенного здесь метода мы предполагаем заняться в следующей статье.

В заключение автор выражает благодарность Н. И. Ахиезеру за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Eggmann. Higher — Order Evaluation of Electromagnetic Diffraction by Circular Disks. IRE trans. on microwave theory and techn., September (1961).
2. Н. И. Ахиезер и А. Н. Ахиезер. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, 109 (1956).
3. A. E. Heins. Function — theoretic Aspects of Diffraction Theory. Electromagnetic Waves, Madison, 1962.
4. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та ХГУ и Харьк. матем. об-ва, т. XXV (1957).
5. K. Westphal. Zur strengen Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an ebenen Schirmen allgemeiner Gestalt. Zs. Phys., 141, 3 (1955).
6. I. Meixner. Die Kantenbedingungen in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitender ebenen Schirmen. Ann. Phys. B. 6, s. 2 (1949).
7. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, ч. II, М., 1963.

## К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

С. С. Калмыкова, В. И. Курилко

1. Задачи распространения электромагнитных волн в однородных волноводах в настоящее время исследованы достаточно подробно [1]. В значительно меньшей степени изучены вопросы рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях диэлектрических волноводов, представляющие значительный теоретический и прикладной интерес. Дело в том, что в однородном диэлектрическом волноводе каждая плоская волна удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, так что задача сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения, которым определяется зависимость волнового числа от частоты.

В случае волновода с резко изменяющимися вдоль направления распространения волны диэлектрическими свойствами граничные условия на скачке диэлектрических постоянных могут быть удовлетворены только суперпозицией плоских волн. Для определения амплитуд этих волн приходится решать систему интегральных уравнений, что значительно усложняет возможности аналитического исследования характеристик решения.

Впервые строгие решения задач рассеяния были получены М. А. Леонтовичем, Г. А. Гринбергом и В. А. Фоком при изучении береговой рефракции [2], а также Л. А. Вайнштейном при исследовании излучения из открытого конца волновода [3]. В этих работах существенно использовалось то обстоятельство, что свойства среды в направлении распространения волны оставались неизменными, а разрывы имели место лишь в граничных условиях на бесконечно тонких поверхностях внутри структуры.

2. Ниже мы рассмотрим задачу о рассеянии поверхностной волны на скачке тензора диэлектрических постоянных цилиндрического анизотропного диэлектрического волновода ( $r < a$ ):

$$\hat{\epsilon}(z > 0, r < a) = (\epsilon_{||}^{(1)}, \epsilon_{\perp}^{(1)}); \quad \hat{\epsilon}(z < 0, r < a) = (\epsilon_{||}^{(2)}, \epsilon_{\perp}^{(2)}).$$

При этом будем предполагать, что однородные участки волновода разделены бесконечно тонкой идеально проводящей диафрагмой ( $z = 0$ ,  $0 < r < a$ ). Пространство между рассматриваемым волноводом и проводящим кожухом (радиуса  $b$ ) заполнено вакуумом  $\hat{\epsilon} \equiv 1$ . Со стороны  $z > 0$  распространяется аксиально-симметричная поверхностная  $E$ -волна с характеристическим числом  $\gamma = \frac{\omega}{V_{\phi}}$ , которое определяется решением дисперсионного уравнения бесконечного волновода с диэлектрическими постоянными, тождественно равными  $\hat{\epsilon}^{(1)}$ . Будем искать решения уравнений Максвелла в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= e^{-\gamma z} + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) [I_0(vb) K_1(va) + I_1(va) K_0(vb)] e^{itx} dt; \\ E_z &= qe^{-\gamma z} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t) [I_0(va) K_0(vb) - K_0(va) I_0(vb)] e^{itx} dt. \end{aligned} \tag{1}$$

$-\infty < z < +\infty; \quad r = a + 0.$

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi}^n &= 2A_n \cos \gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) J_1(\beta_n a) e^{it^2} dt \\ E_z^n &= 2qA_n \cos \gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_n}{k\epsilon_{\parallel}^{(n)}} h_n(t) J_0(\beta_n a) e^{it^2} dt \\ E_r^n &= 2 \frac{i\gamma}{k\epsilon_{\perp}^{(n)}} A_n \sin \gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{k\epsilon_{\perp}^{(n)}} h_n(t) J_1(\beta_n a) e^{it^2} dt \end{aligned} \right\} r = a - 0, \quad (2)$$

где индекс  $n$  принимает значения 1, 2, которые соответствуют областям  $z > 0$  и  $z < 0$ , причем  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ , а

$$\begin{aligned} v(t) &= (t^2 - k^2)^{1/2}; \quad \beta_n(t) = \left[ \frac{\epsilon_{\parallel}^{(n)}}{\epsilon_{\perp}^{(n)}} (\epsilon_{\perp}^{(n)} k^2 - t^2) \right]^{1/2}; \quad k = \frac{\omega}{c}; \\ q &\equiv Z_{\perp}(\gamma); \quad Z_n(t) = \frac{i\beta_n}{k\epsilon_{\parallel}^{(n)}} \cdot \frac{J_0(\beta_n a)}{J_1(\beta_n a)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в выражении для полей в области  $r < 0$ ,  $z > 0$  соответствует приближению геометрической оптики, второе слагаемое, представленное в виде суперпозиции плоских волн, учитывает отклонения от геометрической оптики.

В качестве граничных условий используем равенство тангенциальных компонент полных полей на поверхности диэлектрического волновода:

$$\begin{aligned} E_z^{(1)}(r = a - 0) - E_z(r = a + 0) &\equiv H_{\varphi}^{(1)}(r = a - 0) - H_{\varphi}(r = a + 0) \equiv 0, & z > 0; \\ E_z^{(2)}(r = a - 0) - E_z(r = a + 0) &\equiv H_{\varphi}^{(2)}(r = a - 0) - H_{\varphi}(r = a + 0) \equiv 0, & z < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условия обращения в ноль тангенциальных компонент электрического поля на поверхности идеально проводящей диафрагмы:

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(1)}(z = 0) &= 0 \\ E_r^{(2)}(z = 0) &= 0 \end{aligned} \right\} 0 < r < a. \quad (4)$$

Подставляя поля (2) в граничные условия (3), получим следующие соотношения для определения  $H(t)$  и  $h_{1,2}(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \Delta_{10}(t) e^{it^2} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t) J_1(\beta_1 a) e^{it^2} dt + e^{i\gamma z} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t) \Delta_{00}(t) e^{it^2} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_1}{k\epsilon_{\parallel}^{(1)}} h_1(t) J_0(\beta_1 a) e^{it^2} dt + qe^{i\gamma z} \end{aligned} \right\} z > 0. \\ \begin{aligned} \Delta_{10}(t) &= I_1(va) K_0(vb) + K_1(va) I_0(vb), \\ \Delta_{00}(t) &= I_0(va) K_0(vb) - I_0(vb) K_0(va). \end{aligned} \quad (5) \\ \left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \Delta_{10}(t) e^{it^2} dt + e^{-i\gamma z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) J_1(\beta_2 a) e^{it^2} dt \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t) \Delta_{00}(t) e^{it^2} dt + qe^{-i\gamma z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_2}{k\epsilon_{\parallel}^{(2)}} h_2(t) J_0(\beta_2 a) e^{it^2} dt \end{aligned} \right\} z < 0.$$

Согласно [4] из этих соотношений неизвестные амплитуды  $H(t)$ ,  $h_{1,2}(t)$  могут быть выражены через граничные значения на контуре  $Imt = 0$  функций, аналитичных в верхней (+) и нижней (-) полуплоскостях комплексной переменной  $t$ :

$$J_1(\beta_1 a) h_1(t) = \frac{1}{D_1} \left\{ \psi^+ - Z_0 \varphi^+ - \frac{Z_0 - q}{2\pi i (t - \gamma)} \right\}; \quad (6a)$$

$$J_1(\beta_2 a) h_2(t) = \frac{1}{D_2} \left\{ \xi^- - Z_0 \chi^- - \frac{Z_0 - q}{2\pi i (t + \gamma)} \right\}; \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{10}(t) H(t) &= \frac{1}{D_2} \left\{ \xi^- - Z_0 \chi^- - \frac{Z_2 - q}{2\pi i (t + \gamma)} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{D_1} \left\{ \psi^+ - Z_1 \varphi^+ - \frac{Z_1 - q}{2\pi i (t - \gamma)} \right\}; \quad D_{1,2} = Z_0 - Z_{1,2}; \quad Z_0 = \frac{iv}{k} \cdot \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{00}}. \end{aligned} \quad (6c)$$

Последнее равенство (6с) дает граничную задачу для определения неизвестных функций  $\psi^+$ ,  $\varphi^+$ ,  $\xi^-$  и  $\chi^-$ . Недостающие соотношения между этими функциями могут быть определены из граничных условий (4)\*:

$$\begin{aligned} \psi^+(t) &= -\xi^-(-t), & \varphi^+(t) &= -\chi^-(-t), \\ \psi^+(-t) &= -\xi^-(t), & \varphi^+(-t) &= -\chi^-(t). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом было использовано граничное условие Зоммерфельда конечности магнитного и интегрируемости электрического поля вблизи края идеально проводящей диафрагмы. Таким образом, окончательно граничная задача для определения неизвестных амплитуд плоских волн принимает вид

$$\frac{1}{D_1} \left\{ Z_1 \varphi_1^+ - \psi_1^+ + \frac{\gamma Z_1 - q}{\pi i t^2 - \gamma^2} \right\} = \frac{1}{D_2} \left\{ Z_2 \varphi_1^- - \psi_1^- - \frac{\gamma Z_2 - q}{\pi i t^2 - \gamma^2} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^+ &= \psi^+ + \frac{q}{2\pi i (t + \gamma)}; & \varphi_1^+ &= \varphi^+ + \frac{1}{2\pi i (t + \gamma)}; \\ \varphi_1^- &= \varphi_1^+(-t); & \psi_1^- &= \psi_1^+(-t); \\ \Delta_{10}(t) H(t) &= \frac{1}{D_1} \left\{ Z_1 \varphi_1^+ - \psi_1^+ + \frac{\gamma Z_1 - q}{\pi i t^2 - \gamma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Частный случай этого соотношения ( $\varepsilon_1 = 1$ ,  $Z_2 = 0$ ) был получен и исследован Джонсом при рассмотрении рассеяния электромагнитных волн на проводящей полосе конечной толщины в плоском волноводе с проводящими стенками [6]. При этом в работе Джонса было показано, что соответствующая граничная задача эквивалентна бесконечной системе алгебраических уравнений, если коэффициенты задачи имеют особенности типа полюса. Решение этой системы даже при наличии малого параметра удается найти только численно.

Ниже мы покажем, что задача (8) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма. Действительно, заменив  $t$  на  $-t$  в (8) и используя формулы Сохоцкого — Племеля, для неизвестной функции

$$\psi_1(t) \equiv \psi_1^+(t) - \psi_1^-(t)$$

\* Требование симметрии амплитуд  $h_n(t)$ , из которого вытекают соотношения (7), является лишь необходимым условием выполнения граничных условий (4). Мы предполагаем, что оно является также и достаточным, хотя строгое доказательство проведено только для прямоугольного клина [5].

получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(t') dt'}{t' - t} + \frac{Z_0(t)}{2} \left[ \frac{Z_1(t)}{D_1(t)} + \frac{Z_2(t)}{D_2(t)} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{Z_0(t')} - \frac{1}{Z_0(t')} \right] \frac{\psi_1(t') dt'}{t' - t} =$$

$$= - \frac{\gamma Z_0(t)}{t^2 - \gamma^2} \left[ \frac{Z_2(t) - q}{D_2(t)} + \frac{Z_1(t) - q}{D_1(t)} \right]. \quad (9)$$

Индекс уравнения [7] равен нулю, поэтому согласно [8] оно эквивалентно следующему уравнению Фредгольма:

$$\psi_1(t) + \frac{1}{2(\pi i)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0(t') dt'}{t' - t} \left[ \frac{Z_0(t')}{D_1(t')} + \frac{Z_2(t')}{D_2(t')} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{Z_0(t')} - \frac{1}{Z_0(t')} \right] \frac{\psi_1(t') dt'}{t' - t} =$$

$$= - \frac{\gamma}{(\pi i)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0(t') dt'}{(t' - t) \cdot (t'^2 - \gamma^2)} \cdot \left[ \frac{Z_2(t') - q}{D_2(t')} + \frac{Z_1(t') - q}{D_1(t')} \right]. \quad (10)$$

Это уравнение может быть в общем случае решено численно, а при наличии малого параметра — и аналитически.

3. Применим полученные выше общие соотношения для решения конкретной задачи о согласовании плазменного волновода с коаксиальным. В этом случае в формулах предыдущего раздела следует устремить  $\epsilon_{||}^{(1)}$  к бесконечности ( $Z_1 \rightarrow 0$ ), а тензор  $\hat{\epsilon}^{(2)}$  положить равным тензору диэлектрических проницаемостей плазмы. Строго говоря, при произвольной величине постоянного магнитного поля, параллельного оси волновода, необходимо было бы учитывать гиротропию плазмы. Однако последняя оказывается существенной только при частотах, близких к гирочастоте электрона  $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$  [9], так что пренебрежение гиротропией возможно, если рабочая частота велика либо мала по сравнению с гирочастотой.

В первом случае  $\epsilon_{||}^{(2)} = \epsilon_{\perp}^{(2)} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m} \right)$ ,  $n$  — плотность плазмы, во втором случае  $\epsilon_{||}^{(2)} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ ,  $\epsilon_{\perp}^{(2)} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2}$ .

Исследуем прежде всего дисперсионное уравнение плазменного волновода:

$$\frac{\epsilon_{||}^0 J_1(\beta a)}{\beta J_0(\beta a)} - \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{00}} = 0;$$

$$\beta^2 = \frac{\epsilon_{||}}{\epsilon_{\perp}} (\epsilon_{\perp} k^2 - l^2); \quad \epsilon_{\perp} = \epsilon_{\perp}^{(2)}, \quad \epsilon_{||} = \epsilon_{||}^{(2)}.$$

Это уравнение имеет вещественные решения, соответствующие объемным волнам (поля которых осциллируют по радиусу волновода) только в случае сильного магнитного поля ( $\omega_1 \omega_0 \ll \omega_H$ ). Волновые числа этих волн определяются соотношением

$$\gamma_m^2 = \epsilon_{\perp} k^2 \left( 1 - \frac{\lambda_m^2}{\epsilon_{||} k^2 a^2} \right), \quad (11)$$

где  $\lambda_m$  — корни уравнения

$$\frac{\epsilon_{\perp} \rho_m a J_1(\lambda_m)}{\lambda_m J_0(\lambda_m)} - \frac{\Delta_{10}(\gamma_m)}{\Delta_{00}(\gamma_m)} = 0, \quad (11a)$$

$$\rho_m = (\gamma_m^2 - k^2)^{1/2}.$$

Из соотношений (11) видно, что при большой погонной плотности плазмы ( $\frac{\omega_0^2 a^2}{c^2} \gg 1$ ) фазовые скорости этих волн в широком диапазоне частот, за исключением узкой полосы вблизи  $\omega \sim \omega_0$  с шириной порядка  $\frac{c^2}{\omega_0 a^2} \ll 1$ , слабо зависят от частоты. Если, кроме того, магнитное поле достаточно велико, так что  $\epsilon_{\perp} - 1 \ll 1$ , то фазовые скорости этих волн близки к скорости света.

Рассмотрим задачу о возбуждении этих волн основной волной коаксиальной линии (ТЕМ-волной), для которой  $q = 0$  и  $\gamma = k$ .

1. При низких частотах ( $\frac{c}{\omega_0} = \delta \ll a < b \ll \lambda$ ) в наиболее существенной области  $k \sim l \ll \frac{1}{\delta}$  импеданс плазменного волновода  $Z_2$  мал, так что решение интегрального уравнения задачи

$$\begin{aligned} \psi_1(t) + \frac{1}{2(\pi i)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt' (t' - t)^{-1}}{Z_0^{-1}(t') - Z_2^{-1}(t')} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{Z_0(t'')} - \frac{1}{Z_0(t'')} \right] \psi_1(t'') \frac{dt''}{t'' - t'} = \\ = - \frac{k}{(\pi i)^2 a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt' (t' - t)^{-1}}{(t'^2 - k^2) [Z_0^{-1}(t') - Z_2^{-1}(t')]} \end{aligned} \quad (10a)$$

можно найти методом интегриации. В нулевом приближении, пренебрегая вторым слагаемым в левой части (10a), найдем

$$\begin{aligned} \psi_{10}^+(t) = \frac{1}{\pi i a} \sum_m \frac{\gamma_m a}{(\gamma_m + l)(\gamma_m^2 - k^2)} \left\{ \frac{1}{v_m^2} - \frac{2\Delta_{10}(v_m)}{v_m^2 a \Delta_{00}(v_m)} - \right. \\ \left. - \frac{\Delta_{10}^2(v_m)}{v_m^2 \Delta_{00}(v_m)} + \frac{1}{v_m^2 a^2 \Delta_{00}^2(v_m)} + \frac{\epsilon_{\parallel}^2}{\epsilon_{\perp} \beta_m^2} \left[ 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2J_1(\beta_m a)}{\beta_m a J_0(\beta_m a)} + \frac{J_1^2(\beta_m a)}{J_0^2(\beta_m a)} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (11b)$$

Наибольший вклад в (11), как легко видеть, дают слагаемые, для которых  $\lambda_m < \frac{a}{\delta}$ . Поля соответствующих волн слабо убывают от поверхности плазменного волновода, поэтому они дают существенный вклад в граничные условия в плоскости  $z = 0$ .

Из (11) и (6с) для коэффициента отражения  $R$  коаксиальной волны и амплитуд  $T_m$  возбуждаемых в плазменном волноводе волн получим в нулевом приближении следующие выражения:

$$R = - \frac{\delta}{2a \ln \frac{b}{a}} \left\{ 1 - \frac{2}{3} (\epsilon_{\perp} - 1)^{1/2} \right\} \left[ 1 + 0 \left( \frac{\delta}{a}, \epsilon_{\perp} - 1 \right) \right], \quad (12)$$

$$T_m = \begin{cases} \frac{2}{\left( \lambda_m^2 + \ln^2 \frac{b}{a} \right) \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{a} & \lambda_m^2 \gg (\epsilon_{\perp} - 1) \frac{a^2}{\delta^2} \\ \frac{2}{\lambda_m^2 \ln \frac{b}{a}} \left[ \frac{\lambda_m^2 \delta^2}{(\epsilon_{\perp} - 1) a^2} \right]^2 & \lambda_m^2 \ll (\epsilon_{\perp} - 1) \frac{a^2}{\delta^2}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\lambda_1 \left( \epsilon_{\perp} = \ln \frac{b}{a} = 1 \right) = 1,25$ .

Таким образом, в случае большой погонной плотности плазмы ( $\delta \ll a$ ) возбуждение плазменного волновода коаксиальным на низких частотах ( $a < b \ll \lambda$ ) оказывается весьма эффективным. При  $\varepsilon_{\perp} = \ln \frac{b}{a} = 1$  основная часть (до 80%) падающей мощности уходит в первую гармонику.

2. В окрестности плазменной частоты, при выполнении неравенств  $\frac{\omega^2}{a^2} = \left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right| \ll 1$  импеданс плазменного волновода не мал. В этом случае, естественно, плазменный волновод плохо согласован с коаксиальным, так что основная часть падающей мощности возвращается обратно в коаксиал в виде собственных волн коаксиального волновода. Однако оценка порядка величины амплитуд возбуждаемых в этом случае волн представляет значительный практический интерес для выяснения возможностей вывода энергии из плазменного волновода при возбуждении его пучком заряженных частиц, когда основная часть энергии высокочастотных колебаний сосредоточена вблизи плазменной частоты [10].

Учитывая малость параметра  $|\varepsilon_{\parallel}|$  в этом случае, уравнение (10а) удобно записать в следующем виде:

$$D(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(t') dt'}{t' - t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D(t') \psi_1(t') dt'}{t' - t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{Z_2(t')} - \frac{1}{Z_2(t)} \right] \frac{\psi_1(t') dt'}{t' - t} = -\frac{2k}{\pi i a} \frac{1}{t^2 - k^2}; \quad D(t) = \frac{1}{Z_0(t)} - \frac{1}{Z_2(t)}. \quad (10в)$$

Пренебрегая последним членом в левой части (10в), получим интегральное уравнение для  $\psi_{10}$ , которое эквивалентно следующей граничной задаче:

$$f^+(t) = D(t) \psi_{10}^-(t) - \frac{k}{2\pi i a (t^2 - k^2)}. \quad (14)$$

Отсюда с точностью до величин порядка  $|\varepsilon_{\parallel}|^{1/2}$  находим следующие выражения для амплитуд магнитного поля (на границе  $r = a$  плазменного волновода) возбуждаемых волн:

$$T_m = \begin{cases} -\frac{2}{r_m} \mu, & \lambda_m \ll \frac{a}{\delta} \mu \\ \frac{i\mu}{\lambda_m} \left[ \frac{\mu a}{\delta \lambda_m} \right]^{1/2}, & \lambda_m \gg \frac{a}{\delta} \mu, \quad \mu = |\varepsilon_{\parallel}|^{1/2}. \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда можно сделать вывод, что плазменный волновод на частотах  $\omega \sim \omega_0$  (при  $\delta \ll a$ ) слабо связан с коаксиальным. Следовательно, отрезок плазменного волновода, ограниченный с обеих сторон коаксиальным кабелем, может служить эндовибратором.

В заключение следует отметить, что граничная задача (8) и интегральное уравнение (10) могут быть применены к решению задачи о проводящей диафрагме в волноводе с проводящими стенками. Из (8), в частности, при  $\hat{\varepsilon}^{(1)} = \hat{\varepsilon}^{(2)} = 1$  для плоского волновода, в котором высота диафрагмы равна половине высоты волновода, можно найти явное решение, в полном соответствии с результатом работы [11]. Кроме того, с помощью интегрального уравнения (10) можно найти в электростатическом приближении ( $a \ll \lambda$ ) аналитическое решение (в виде ряда по степеням  $a/\lambda$ ) задачи о проводящей диафрагме произвольных размеров в волноводе, а также задачи о сочленении двух плоских волноводов [12].



## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, «Сов. радио», М., 1955.
  2. Исследования по распространению радиоволн. Сб. II, Изд-во АН СССР, М., 1946.
  3. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных и звуковых волн. «Сов. радио», М., 1953.
  4. И. М. Рапопорт. ДАН СССР, 59, 1403 (1948).
  5. С. С. Калмыкова, В. И. Курялко. ДАН СССР, 154, № 5 (1964).
  6. Jones D. S. Proc. Roy. Soc., A—217, 153—175 (1953); Philos. Trans. Roy. Soc., A—247, 499—528 (1955); Б. Нобл. Метод Винера — Хопфа, ИЛ, М., 1962.
  7. Н. И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
  8. И. Н. Векуа. Сообщ. АН Груз. ССР, 11, 697 (1941).
  9. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, 29, 549 (1959).
  10. Я. Б. Файнберг. Атомная энергия, 6 (1961).
  11. Л. А. Вайнштейн. ЖТФ, 25, 841 (1955).
  12. D. S. Williams. IRE Trans., AP—5, 191, 244 (1957).
-

## ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ ОТ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В РАСКРЫВЕ АНТЕННЫ

Ю. В. Шубарин, Н. Н. Горобец

Поля с вращающейся, в особенности с круговой поляризацией, находят в последние годы широкое применение для различных целей [1, 2, 3]. Однако в литературе, посвященной исследованию антенн с вращающейся поляризацией, например, зеркальных [4, 5], вопросу об анализе связи поляризационной диаграммы с амплитудно-фазовым распределением поля в раскрыве антенны уделено мало внимания.

Цель данной статьи состоит в отыскании указанной связи и исследовании поляризационных диаграмм антенн сверхвысоких частот в случае некоторых типичных амплитудно-фазовых распределений в их раскрыве.

### 1. УСЛОВИЕ СИНТЕЗА ЗАДАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ

Под поляризационной диаграммой антенны будем понимать зависимость от направления поляризации электрического вектора поля в дальней зоне антенны. Поляризационную диаграмму можно задать одной из двух функций:

$$\dot{p}(\theta, \varphi) = \frac{\dot{E}_\varphi(\theta, \varphi, R)}{\dot{E}_\theta(\theta, \varphi, R)}, \quad (1)$$

$$\dot{q}(\theta, \varphi) = \frac{\dot{E}_n(\theta, \varphi, R)}{\dot{E}_n(\theta, \varphi, R)}, \quad (2)$$

где  $\dot{E}_\varphi$ ,  $\dot{E}_\theta$  и  $\dot{E}_n$  — комплексные амплитуды ортогональных линейно и по кругу поляризованных компонент электрического вектора поля излучения;

$\theta$ ,  $\varphi$ ,  $R$  — сферические координаты точки наблюдения;

$\dot{p}(\theta, \varphi)$  и  $\dot{q}(\theta, \varphi)$  — поляризационные отношения ортогональных линейных и кругополяризованных компонент.

Поляризационные отношения линейных и круговых компонент однозначно связаны между собой дробно-линейной зависимостью

$$\dot{q}(\theta, \varphi) = \frac{1 - i\dot{p}(\theta, \varphi)}{1 + i\dot{p}(\theta, \varphi)}. \quad (3)$$

Следовательно, задание поляризационной диаграммы в формуле (1) или (2) вполне равносильно. Однако удобнее пользоваться поляризационным отношением линейных компонент (1), так как при решении внешней задачи теории антенн непосредственно находят ортогональные линейные, а не круговые компоненты.

По найденным модулю  $|\dot{p}|$  и аргументу  $\psi$  поляризационного отношения линейных компонент можно рассчитать модуль и аргумент поляризационного отношения круговых компонент:

$$|\dot{q}| = \sqrt{\frac{1 + |\dot{p}|^2 + 2|\dot{p}| \sin \psi}{1 + |\dot{p}|^2 - 2|\dot{p}| \sin \psi}}, \quad (4)$$

$$\arg \dot{q} = \arctg \frac{2|\dot{p}| \cos \psi}{|\dot{p}|^2 - 1}. \quad (5)$$

Тогда легко определить коэффициент эллиптичности  $r$  поляризационного эллипса как отношение малой и большой полуосей

$$r = \left| \frac{1 - |\dot{q}|}{1 + |\dot{q}|} \right| \quad (6)$$

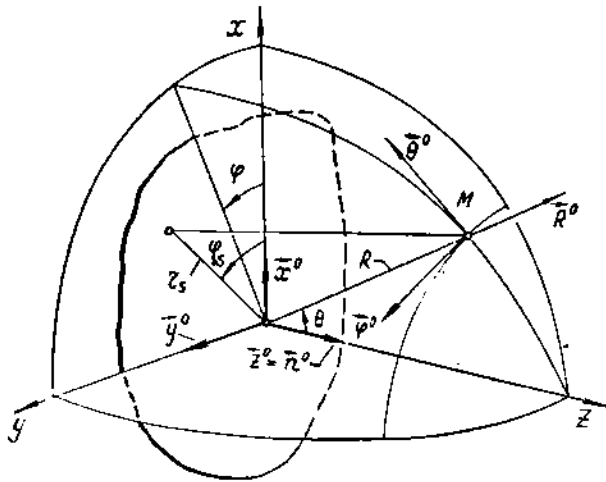


Рис. 1. Системы координат, принятые при изучении апертурных антенн.

и угол ориентации его  $\beta$  — как угол, который образует большая полуось с ортом  $\vec{z}_0$  сферической системы координат:

$$\beta = -\frac{1}{2} \arg \dot{q}. \quad (7)$$

Рассмотрим антенну с плоским излучающим раскрытием произвольной формы (рис. 1.). Электрический вектор поля излучения найдем с помощью векторизованного интеграла Кирхгофа, который запишем в виде [6]:

$$\vec{E} = \frac{ik\psi(R)}{4\pi} \{W_0 [\vec{R}_0 [\vec{R}_0 \vec{N}]] + [\vec{R}_0 \vec{L}]\}, \quad (8)$$

где  $\psi(R) = \frac{e^{-ikR}}{R}$  — функция сферической волны;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;

$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  — волновое сопротивление свободного пространства;

$\vec{R}^0$  — орт направления из начала координат на точку наблюдения;

$\vec{N} = \int_S \vec{j}_n^* e^{ikr_s \vec{R}^0} ds$  — электрический вектор излучения;

$\vec{L} = \int_S \vec{j}_n^* e^{ikr_s \vec{R}^0} ds$  — магнитный вектор излучения;

$\vec{j}_n^* = [n^0 \vec{H}_s]$  — вектор плотности эквивалентного электрического ток ;

$\vec{j}_n^* = [n^0 \vec{E}_s]$  — вектор плотности эквивалентного магнитного тока;

$n^0$  — нормаль к плоскости раскрыва;

$\vec{E}_s$  и  $\vec{H}_s$  — электрический и магнитный векторы на поверхности раскрыва  $s$ ;

$\vec{r}_s$  — радиус-вектор точки раскрыва.

Обозначим отношение комплексных амплитуд электрического и магнитного векторов в раскрыве через  $\dot{W}_s$ :

$$\dot{W}_s = \frac{\dot{E}_s}{\dot{H}_s}. \quad (9)$$

Тогда магнитный вектор излучения можно выразить через электрический вектор излучения:

$$\vec{L} = \dot{W}_s (n^0 \vec{N}). \quad (10)$$

Разложим вектор плотности эквивалентного поверхностного электрического тока по ортам прямоугольной системы координат в раскрыве и по ортам сферической системы координат в точке наблюдения  $M$  ( $\theta, \varphi, R$ ) (рис. 1). Тогда найдем

$$\begin{aligned} \vec{j}_n^* &= [n^0 \vec{H}_s] = \vec{y}^0 \dot{H}_x - \vec{x}^0 \dot{H}_y = \\ &= -\vec{\theta}^0 \dot{H}_\varphi \cos \theta + \vec{\varphi}^0 \dot{H}_{\theta 1} - \vec{R}^0 \dot{H}_z \sin \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\vec{x}^0, \vec{y}^0$  и  $\vec{\theta}^0, \vec{\varphi}^0, \vec{R}^0$  — орты прямоугольной и сферической систем координат;

$\dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{H}_{\theta 1}, \dot{H}_z$  — проекции магнитного вектора на соответствующие орты и на орт  $\vec{\theta}_1^0 = [\vec{\varphi}^0 n^0]$ .

Используя (11), находим проекции электрического вектора излучения на оси прямоугольной системы координат в раскрыве антенны и на орты сферической системы координат в точке наблюдения:

$$\dot{N}_x = - \int_S \dot{H}_y e^{ikr_s \vec{R}^0} ds; \quad (12a)$$

$$\dot{N}_y = \int_S \dot{H}_x e^{ikr_s \vec{R}^0} ds; \quad (12b)$$

$$\dot{N}_z = 0 \quad (12b)$$

и

$$\dot{N}_\theta = - \cos \theta \int_S \dot{H}_\varphi e^{ikr_s \vec{R}^0} ds; \quad (13a)$$

$$\dot{N}_\varphi = \int_S \dot{H}_\theta e^{ikr_s \vec{R}^*} ds; \quad (13б)$$

$$\dot{N}_R = -\sin \theta \int_S \dot{H}_\varphi e^{ikr_s \vec{R}^*} ds = \dot{N}_\theta \operatorname{tg} \theta. \quad (13в)$$

После подстановки (10) с учетом (12в) и (13в) в (8) получим компоненты электрического вектора поля в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -\frac{ik\psi(R)}{4\pi} (W_0 \cos \theta + \dot{W}_s) (\dot{N}_x \cos \varphi + \dot{N}_y \sin \varphi) = \\ &= -\frac{ik\psi(R)}{4\pi} (W_0 \cos \theta + \dot{W}_s) \frac{\dot{N}_\theta}{\cos \theta}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= -\frac{ik\psi(R)}{4\pi} (W_0 + \dot{W}_s \cos \theta) (\dot{N}_y \cos \varphi - \dot{N}_x \sin \varphi) = \\ &= -\frac{ik\psi(R)}{4\pi} (W_0 + \dot{W}_s \cos \theta) \dot{N}_\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (1), имеем условие синтеза заданной поляризационной диаграммы:

$$\dot{p}(\theta, \varphi) = \frac{(W_0 + \dot{W}_s \cos \theta) (\dot{N}_y \cos \varphi - \dot{N}_x \sin \varphi)}{(W_0 \cos \theta + \dot{W}_s) (\dot{N}_x \cos \varphi + \dot{N}_y \sin \varphi)} = \frac{(W_0 + \dot{W}_s \cos \theta) \dot{N}_\varphi}{(W_0 \cos \theta + \dot{W}_s) \frac{\dot{N}_\theta}{\cos \theta}}. \quad (16)$$

Это условие сильно упрощается в случае антенн, размеры раскрывов которых велики по сравнению с длиной волны, и можно полагать  $\dot{W}_s = W_0$ . Тогда получим

$$\frac{\dot{N}_y}{\dot{N}_x} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \dot{p}(\theta, \varphi)}{1 - \dot{p}(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \varphi} \quad (17)$$

и

$$\frac{\dot{N}_\varphi}{\dot{N}_\theta} = \frac{\dot{p}(\theta, \varphi)}{\cos \theta}. \quad (18)$$

Таким образом, для реализации заданной поляризационной диаграммы  $\dot{p}(\theta, \varphi)$  амплитудно-фазовые распределения компонент магнитного вектора, параллельных плоскости раскрыва, в (12) и (13) должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия (17) или (18).

В частном случае синтеза антенны с круговой поляризацией  $\dot{p}(\theta, \varphi) = \pm i$ . Тогда (17) и (18) принимают вид

$$\frac{\dot{N}_y}{\dot{N}_x} = \pm i \quad (19)$$

и

$$\cos \theta \frac{\dot{N}_\varphi}{\dot{N}_\theta} = \pm i.$$

Знак «+» соответствует левому, а «-» правому направлению вращения излучаемого поля.

Используя (12а), (12б) и (13а), (13б), запишем (19) в виде

$$\begin{aligned} \int_S (\dot{H}_y \mp i \dot{H}_x) e^{ikr_s \vec{R}^*} ds &= 0; \\ \int_S (\dot{H}_\theta \mp i \dot{H}_\varphi) e^{ikr_s \vec{R}^*} ds &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Условия (20) выполняются для любых углов  $\theta, \varphi$ ; следовательно, в пределах передней полусферы всюду антенна излучает поле с круговой поляризацией, если  $\dot{H}_y \mp i\dot{H}_x = 0$  или  $\dot{H}_{\theta 1} \mp i\dot{H}_{\varphi} = 0$ , т. е. законы амплитудно-фазовых распределений ортогональных компонент поля в раскрыве одинаковы и разность начальных фаз компонент равна  $\pm \frac{\pi}{2}$ . На характер этих законов и на форму раскрыва не накладывается никаких ограничений, они могут быть любыми. Например, раскрыв может быть прямоугольным, треугольным, круглым; амплитудное распределение — как симметричным, так и несимметричным; фазовое — постоянным, четным, или нечетным относительно середины раскрыва. Отсюда следует, что для излучения поля с круговой поляризацией падающая на раскрыв волна в общем случае не должна быть кругополяризованной.

Допустим, в частности, что фазовое распределение в раскрыве квадратично, т. е. на раскрыв падает приблизительно сферическая волна. Если в каждой точке фронта волны векторы полей поляризованы по кругу, то проекции их на плоскость раскрыва в общем случае поляризованы по эллипсу. Тогда законы амплитудных и фазовых распределений ортогональных компонент не одинаковы, т. е. условия (20) не выполняются.

Чтобы эти условия были выполнены, падающая на раскрыв сферическая волна должна быть эллиптически поляризованной так, чтобы проекции на плоскость раскрыва поляризационных эллипсов в каждой точке ее фронта были окружностями. Для этого большие полуоси поляризационных эллипсов должны быть касательными к дугам больших кругов сферического фронта волны, проходящим через точку касания сферы с плоскостью раскрыва.

Смещение облучателя из фокуса зеркала или линзы вдоль фокальной оси вызывает уменьшение коэффициента эллиптичности, если облучатель поляризован по кругу в пределах угла раскрыва. При невыполнении последнего условия такое смещение облучателя может привести даже к улучшению коэффициента эллиптичности.

К уменьшению коэффициента эллиптичности, как легко заметить, приводит смещение облучателя из фокуса поперек фокальной оси. Если, например, облучатель сместить в плоскости  $xoz$ , то отразившаяся от зеркала (или прошедшая через линзу) волна будет падать на раскрыв под некоторым углом  $\alpha$ . Тогда, как видно из (126), проекция  $N_y$  уменьшится в  $\cos \alpha$  раз, и условие (20), выполнявшееся до смещения облучателя, перестанет удовлетворяться. Поле излучения перестанет быть кругополяризованным, хотя на плоском фронте волны, наклоненном к плоскости раскрыва, оно поляризовано по кругу.

Рассмотрим некоторые возможности синтеза заданной поляризационной диаграммы с помощью условий (17) и (18).

## 2. СИНТЕЗ ЗАДАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Из (17) и (18) видно, что для синтеза заданной поляризационной диаграммы  $p(\theta, \varphi)$  достаточно, чтобы отношение ортогональных компонент электрического вектора излучения было равно определенной функции. Следовательно, решение задачи синтеза неоднозначно. Одну из указанных компонент можно считать известной, т. е. известным и определяющее ее амплитудно-фазовое распределение соответствующей компоненты поля в

раскрыве. Тогда задача сводится к отысканию амплитудно-фазового распределения второй, ортогональной ей компоненты поля.

Допустим, например, что известно распределение в раскрыве компоненты поля  $\dot{H}_y$ , а следовательно, и компоненты вектора излучения  $\dot{N}_x$ . Тогда необходимо отыскать распределение в раскрыве компоненты  $\dot{H}_x$ , если определяемая ею компонента электрического вектора излучения  $\dot{N}_y$  из (17) равна

$$\dot{N}_y = \dot{N}_x \frac{\operatorname{tg} \varphi + \dot{p}(\theta, \varphi)}{1 - \dot{p}(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \varphi}. \quad (21)$$

Введем амплитудно-фазовые распределения компонент поля в раскрыве:

$$\begin{aligned} \dot{A}_x(x, y) &= \frac{\dot{H}_x}{\dot{H}_{x0}}, \\ \dot{A}_y(x, y) &= \frac{\dot{H}_y}{\dot{H}_{y0}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\dot{H}_{x0}$  и  $\dot{H}_{y0}$  — комплексные амплитуды компонент в начале координат. Тогда (21) можно записать в виде

$$\int_s \dot{A}_x(x, y) e^{ik\vec{r}_s \vec{R}^0} ds = - \frac{\dot{H}_{x0}}{\dot{H}_{y0}} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \dot{p}(\theta, \varphi)}{1 - \dot{p}(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \varphi} \int_s \dot{A}_y(x, y) e^{ik\vec{r}_s \vec{R}^0} ds. \quad (23)$$

Правая часть — известная комплексная функция углов  $\theta, \varphi$ , которую обозначим через  $\dot{f}(\theta, \varphi)$ . Учитывая, что  $\vec{r}_s \vec{R}^0 = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi$ , имеем

$$\int_s \dot{A}_x(x, y) e^{ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)} ds = \dot{f}(\theta, \varphi). \quad (24)$$

Таким образом, задача синтеза заданной поляризационной диаграммы сводится к тому же самому интегральному уравнению, которым определяется задача синтеза заданной диаграммы направленности плоским раскрывом. Для решения этой задачи можно воспользоваться обратным преобразованием Фурье [7].

Рассмотрим в качестве примера прямоугольный раскрыв со сторонами  $L_x$  и  $L_y$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{\pi L_x}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi; & \eta_y &= \frac{\pi L_y}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi; \\ \zeta_x &= \frac{2x}{L_x}; & \zeta_y &= \frac{2y}{L_y}, \end{aligned}$$

Тогда (24) имеет вид

$$\dot{f}(\eta_x, \eta_y) = \int_0^1 \int_0^1 \dot{A}_x(\zeta_x, \zeta_y) e^{i(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y)} d\zeta_x d\zeta_y. \quad (25)$$

Как хорошо известно,  $\dot{A}_x(\zeta_x, \zeta_y)$  можно находить с помощью двойного преобразования Фурье:

$$\dot{A}_x(\zeta_x, \zeta_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(\eta_x, \eta_y) e^{-i(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y)} d\eta_x d\eta_y. \quad (26)$$

Найденное из (26) амплитудно-фазовое распределение  $\dot{A}_x(\zeta_x, \zeta_y)$  будет точно воспроизводить  $\dot{f}(\eta_x, \eta_y)$  в раскрые конечных размеров, если  $\dot{f}(\eta_x, \eta_y)$ , имеет протяженно-ограниченный спектр [8, 9]. В этом случае будет точно воспроизводиться и заданная поляризационная диаграмма  $\dot{p}(\theta, \varphi)$ .

Итак, в случае плоского раскрыва заданную поляризационную диаграмму можно синтезировать тем же способом и с теми же ограничениями, что и диаграмму направленности.

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ ОТ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В РАСКРЫВЕ

В теории антенн хорошо изучена зависимость диаграммы направленности антенны от амплитудно-фазового распределения поля в ее раскрые. Представляет несомненный интерес исследование зависимости поляризационной диаграммы от амплитудно-фазового распределения. В настоящей статье мы ограничимся случаем раскрыва прямоугольной формы.

Поле в раскрые разложим на ортогональные компоненты, параллельные осям  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат, связанной с раскрывом. Амплитудно-фазовые распределения компонент считаем разделяющимися.

#### Синфазный раскрыв

Фазовое распределение в этом случае постоянно. Рассмотрим спадающее к краям раскрыва и симметричное относительно его середины амплитудное распределение поля и аппроксимируем его по каждой компоненте функцией

$$A(\zeta) = A + (1 - A) \cos^m \frac{\pi}{2} \zeta, \quad (27)$$

где  $0 \leq A \leq 1$  — постоянный коэффициент, равный значению амплитуды на краю раскрыва, — пьедестал амплитудного распределения,  $m = 1, 2, 3, \dots$  — целое число, определяющее скорость спадания амплитудного распределения.

Такое амплитудное распределение часто используют на практике при исследовании диаграмм направленности антенн. Тогда комплексные амплитуды ортогональных компонент вектора магнитного поля в раскрые запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_{x0} \left[ A_{xx} + (1 - A_{xx}) \cos^{m_{xx}} \frac{\pi}{2} \zeta_x \right] \left[ A_{xy} + (1 - A_{xy}) \cos^{m_{xy}} \frac{\pi}{2} \zeta_y \right]; \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{y0} \left[ A_{yx} + (1 - A_{yx}) \cos^{m_{yx}} \frac{\pi}{2} \zeta_x \right] \left[ A_{yy} + (1 - A_{yy}) \cos^{m_{yy}} \frac{\pi}{2} \zeta_y \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, предполагаем, что амплитудное распределение компоненты  $\dot{H}_x$  спадает к краям по оси  $x$  — до значения  $A_{xx}$ , по оси  $y$  — до значения  $A_{xy}$ , то есть первый индекс соответствует наименованию компоненты поля, второй — оси, вдоль которой она изменяется. Аналогичные обозначения приняты для компоненты  $\dot{H}_y$ .

Подставив (28) в (12а) и (12б), найдем компоненты электрического вектора излучения, а из (16) — выражение для поляризационного отношения

$$\dot{p}(\theta, \varphi) = \frac{\dot{M}(\theta, \varphi) - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \dot{M}(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \varphi}, \quad (29)$$



где

$$\begin{aligned} \dot{M}(\theta, \varphi) = \frac{\dot{N}_y}{\dot{N}_x} = & - \frac{\dot{H}_{y0}}{\dot{H}_{x0}} \frac{A_{xx} \frac{\sin \eta_x}{\eta_x} + \frac{1 - A_{xx}}{2^{m_{xx}}} \sum_{\nu=0}^{m_{xx}} C_{m_{xx}}^* \frac{\sin \left[ \eta_x + (m_{xx} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{\eta_x + (m_{xx} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}{A_{yx} \frac{\sin \eta_x}{\eta_x} + \frac{1 - A_{yx}}{2^{m_{yx}}} \sum_{\nu=0}^{m_{yx}} C_{m_{yx}}^* \frac{\sin \left[ \eta_x + (m_{yx} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{\eta_x + (m_{yx} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}} \times \\ & \times \frac{A_{xy} \frac{\sin \eta_y}{\eta_y} + \frac{1 - A_{xy}}{2^{m_{xy}}} \sum_{\nu=0}^{m_{xy}} C_{m_{xy}}^* \frac{\sin \left[ \eta_y + (m_{xy} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{\eta_y + (m_{xy} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}{A_{yy} \frac{\sin \eta_y}{\eta_y} + \frac{1 - A_{yy}}{2^{m_{yy}}} \sum_{\nu=0}^{m_{yy}} C_{m_{yy}}^* \frac{\sin \left[ \eta_y + (m_{yy} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{\eta_y + (m_{yy} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}; \quad (30) \\ C_m^* = & \frac{m!}{(m-\nu)! \nu!}. \end{aligned}$$

Предположим, что поле в центре раскрыва поляризовано по эллипсу, причем отношение ортогональных компонент поля равно:

$$\dot{\rho}_0 = \frac{\dot{E}_{y0}}{\dot{E}_{x0}} = \frac{\dot{H}_{x0}}{\dot{H}_{y0}} = \rho_0 e^{i\psi_0},$$

где  $\psi_0$  — сдвиг по фазе между компонентами  $\dot{E}_{y0}$  и  $\dot{E}_{x0}$ .

Тогда модуль и аргумент поляризационного отношения равны соответственно:

$$|\dot{\rho}(\theta, \varphi)| = \sqrt{\frac{|\dot{M}(\theta, \varphi)|^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi - 2 |\dot{M}(\theta, \varphi)| \operatorname{tg} \varphi \cos \psi_0}{1 + |\dot{M}(\theta, \varphi)|^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 |\dot{M}(\theta, \varphi)| \operatorname{tg} \varphi \cos \psi_0}}; \quad (31)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{|\dot{M}(\theta, \varphi)| \sin \psi_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi (|\dot{M}(\theta, \varphi)|^2 - 1) + |\dot{M}(\theta, \varphi)| \cos \psi_0 (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}. \quad (32)$$

Подставив (31) и (32) в (4) и (5), найдем модуль и аргумент поляризационного отношения круговых компонент.

Коэффициент эллиптичности и угол ориентации поляризационного эллипса в направлении  $\theta, \varphi$  найдем из (6) и (7).

На основе расчетов по формулам (4) — (7) с учетом (30) — (31) можно построить пространственную картину поля с вращающейся поляризацией в дальней зоне. Для этого каждой точке полусферы  $R = \operatorname{const}$ , определяемой углами  $\theta, \varphi$ , приведем в соответствие точку плоскости, используя для этого полярную систему координат. Вдоль радиуса отложим углы  $\theta$ , а углы  $\varphi$  будем отсчитывать от оси  $x$ , соответствующей плоскости  $\varphi = 0$ . В любой точке  $\theta, \varphi$  можно изобразить поляризационный эллипс с полученным значением коэффициента эллиптичности и угла ориентации.

Для простоты ограничимся исследованием коэффициента эллиптичности в главных плоскостях. Как видно из (31) и (32), в плоскости  $\varphi = 0$  модуль поляризационного отношения компонент равен модулю отношения компонент электрического вектора излучения  $|\dot{\rho}(\theta, \varphi)| = |\dot{M}(\theta, \varphi)|$ , а сдвиг фаз между компонентами такой же, как и в центре

раскрыва  $\psi = \psi_0$ . В простейшем случае, когда  $|\dot{\rho}(\theta, \varphi)| = |\dot{M}(\theta, \varphi)| = 1$ , из (4) и (6) имеем

$$r = \left| \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \right|. \quad (23)$$

При  $\psi_0 = 0$  поле линейно поляризовано; при  $0 < \psi_0 \leq 90^\circ$  — эллиптически поляризовано. Угол ориентации эллипса постоянен и равен  $45^\circ$ . При  $\psi_0 = 90^\circ$  поле становится кругополяризованным, что подтверждает выводы п. 1. В плоскости  $\varphi = 90^\circ$  картина аналогична.

Рассмотрим более подробно требования для обеспечения круговой поляризации поля в дальней зоне при  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Требование  $|\dot{M}(\theta, \varphi)| = 1$  выполняется точно для любых углов  $\theta$ , если амплитудные распределения обоих ортогональных компонент одинаковы вдоль оси  $x$  и оси  $y$ , а отношение амплитуд поля в центре раскрыва равно единице. Если это отношение не равно единице, то поле эллиптически поляризовано, а коэффициент эллиптичности его равен значению в центре раскрыва. Если амплитудные распределения ортогональных компонент не одинаковы, то для обеспечения кругополяризованного поля хотя бы в направлении оси главного максимума, поле в середине раскрыва, как видно из формулы (30), должно быть поляризовано по эллипсу с большей полуосью, параллельной компоненте поля с более быстрым спаданием амплитудного распределения к краям раскрыва [5]. Отношение компонент поля в центре раскрыва находим, полагая в (30)  $|M(0,0)| = 1$  и  $\eta_x = \eta_y = 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{H_{yy}}{H_{xx}} \right| &= \frac{A_{xx} + \frac{1 - A_{xx}}{2m_{xx}} \sum_{\nu=0}^{m_{xx}} C_{m_{xx}}^{\nu} \frac{\sin \left[ (m_{xx} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{(m_{xx} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}{A_{yy} + \frac{1 - A_{yy}}{2m_{yy}} \sum_{\nu=0}^{m_{yy}} C_{m_{yy}}^{\nu} \frac{\sin \left[ (m_{yy} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{(m_{yy} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}} \times \\ &\times \frac{A_{xy} + \frac{1 - A_{xy}}{2m_{xy}} \sum_{\nu=0}^{m_{xy}} C_{m_{xy}}^{\nu} \frac{\sin \left[ (m_{xy} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{(m_{xy} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}{A_{yx} + \frac{1 - A_{yx}}{2m_{yx}} \sum_{\nu=0}^{m_{yx}} C_{m_{yx}}^{\nu} \frac{\sin \left[ (m_{yx} - 2\nu) \frac{\pi}{2} \right]}{(m_{yx} - 2\nu) \frac{\pi}{2}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

С другой стороны, если известно отношение ортогональных компонент поля в центре раскрыва и их амплитудные распределения вдоль одной из осей, из (34) легко найти требуемое значение pedestala амплитудного распределения одной из компонент вдоль другой оси по заданному значению другой компоненты и скоростях спадания их для обеспечения кругополяризованного поля в направлении оси главного максимума. Так, например, если амплитудные распределения вдоль оси  $y$  одинаковы ( $A_{yy} = A_{yy}$ ;  $m_{xy} = m_{yy}$ ) и  $m_{xx} = m_{yx} = 1$ , pedestals амплитудных распределений по оси  $x$  оказываются линейно-зависимыми:

$$A_{xx} = \rho_0 A_{yy} + 1.75 (\rho_0 - 1). \quad (35)$$

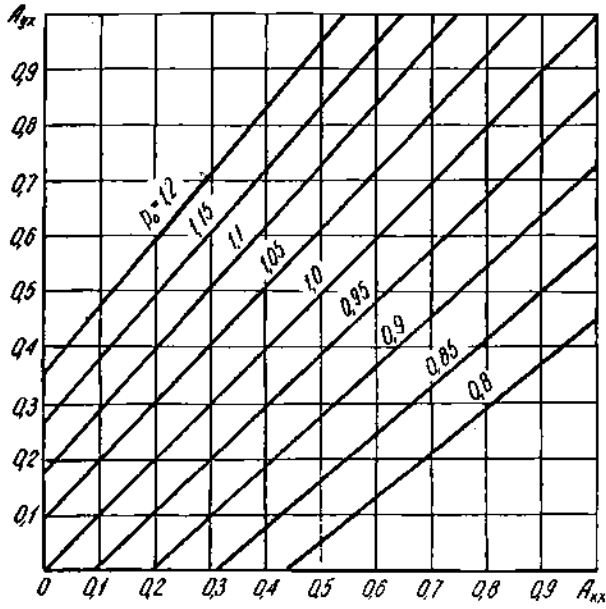


Рис. 2. Зависимость  $A_{yx}$  от  $A_{xx}$  для обеспечения круговой поляризации поля в направлении оси главного лепестка.

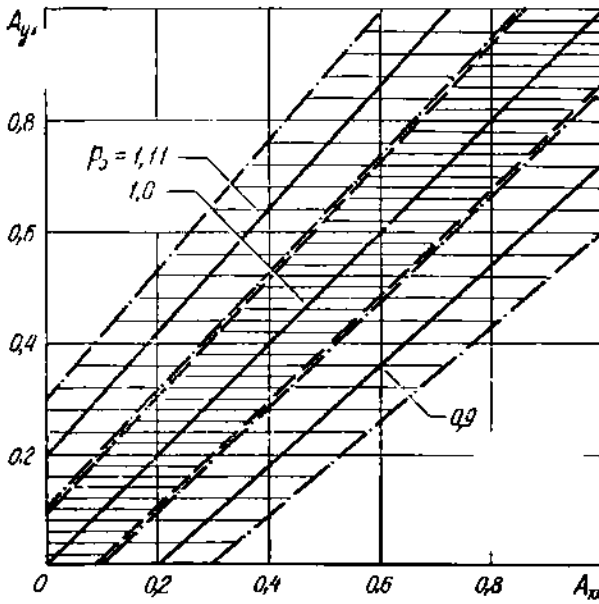


Рис. 3. Зависимость  $A_{yx}$  от  $A_{xx}$  для обеспечения коэффициента эллиптичности не ниже 0,95 в направлении оси главного лепестка

Из результатов расчета (рис. 2) по заданному  $p_0$  и высоте пьедестала одной из компонент поля непосредственно определяется высота пьедестала второй компоненты, что имеет существенное значение при выборе диаграммы направленности облучателя.

На практике часто задают требуемое значение коэффициента эллиптичности не ниже определенной величины. В этом случае допустимые величины пьедесталов амплитудного распределения одной из компонент при заданной величине пьедестала другой будут находиться в некоторых пределах. На рис. 3 представлены зависимости  $A_{yx}$  ( $A_{xy}$ ) для обеспечения коэффициента эллиптичности не ниже 0,95 при  $p_0 = 0,9; 1,0; 1,11$ . Сплошные линии в серединах соответствующих областей — зависимости  $A_{yx}$  ( $A_{xy}$ ) для обеспечения круговой поляризации.

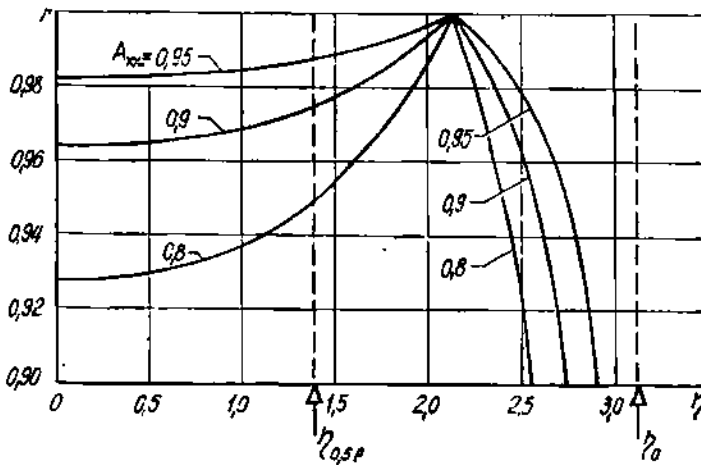


Рис. 4. Зависимость коэффициента эллиптичности от обобщенной угловой координаты  $\eta$ .

Рассмотрим зависимость коэффициента эллиптичности от направления в плоскости  $\varphi = 0$  при  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ . На рис. 4 приведены результаты расчетов при  $p_0 = 1$ ;  $A_{yx} = A_{xy}$ ;  $m_{yx} = m_{xy}$ ;  $A_{yx} = 1$ ;  $m_{xx} = m_{yy} = 1$ ;  $A_{xx} = 0,95; 0,9$  и  $0,8$ . Из рисунка видно, что коэффициент эллиптичности в направлении оси главного максимума меньше, чем коэффициент эллиптичности в центре раскрыва  $p_0$ , и уменьшается с возрастанием разницы в значениях пьедесталов амплитудных распределений.

При отклонении от оси главного лепестка коэффициент эллиптичности сначала медленно приближается к значению в центре раскрыва. В пределах значений  $\eta \leq 1,39$ , соответствующих ширине главного лепестка по половине мощности (при постоянном амплитудном распределении), коэффициент эллиптичности будет почти постоянен. При  $\eta \approx 2,1$ , когда амплитуда поля падает до 0,4 от главного максимума, коэффициент эллиптичности равен значению в центре раскрыва. При дальнейшем увеличении  $\eta$  коэффициент эллиптичности уменьшается.

Отметим, что если амплитудные распределения поля в раскрыве аппроксимированы функциями

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_{x0} [A_{xx} + (1 - A_{xx})(1 - \zeta_x^2)^{n_{xx}}] [A_{xy} + (1 - A_{xy})(1 - \zeta_y^2)^{n_{xy}}]; \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{y0} [A_{yx} + (1 - A_{yx})(1 - \zeta_x^2)^{n_{yx}}] [A_{yy} + (1 - A_{yy})(1 - \zeta_y^2)^{n_{yy}}]; \end{aligned} \quad (35)$$

то

$$\begin{aligned} \dot{M}(\theta, \varphi) = & \frac{\dot{H}_{x_0} \left[ A_{xx} \frac{\sin \eta_x}{\eta_x} + (1 - A_{xx}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{\eta_x} \right)^{n_{xx} + \frac{1}{2}} \Gamma(n_{xx} + 1) J_{n_{xx} + \frac{1}{2}}(\eta_x) \right]}{\dot{H}_{y_0} \left[ A_{yx} \frac{\sin \eta_x}{\eta_x} + (1 - A_{yx}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{\eta_x} \right)^{n_{yx} + \frac{1}{2}} \Gamma(n_{yx} + 1) J_{n_{yx} + \frac{1}{2}}(\eta_x) \right]} \times \\ & \times \frac{A_{xy} \frac{\sin \eta_y}{\eta_y} + (1 - A_{xy}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{\eta_y} \right)^{n_{xy} + \frac{1}{2}} \Gamma(n_{xy} + 1) J_{n_{xy} + \frac{1}{2}}(\eta_y)}{A_{yy} \frac{\sin \eta_y}{\eta_y} + (1 - A_{yy}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{\eta_y} \right)^{n_{yy} + \frac{1}{2}} \Gamma(n_{yy} + 1) J_{n_{yy} + \frac{1}{2}}(\eta_y)}; \end{aligned} \quad (37)$$

$\Gamma(n + 1) = n!$  — гамма-функция;

$J_{n + \frac{1}{2}}(\eta)$  — функция Бесселя  $n + \frac{1}{2}$ -го порядка 1-го рода.

Расчеты по формуле (37) приводят к качественно тем же результатам, которые получены выше для аппроксимации полей в раскрыве вида (28).

### Раскрыв с линейными фазовыми искажениями

Линейные фазовые искажения возникают в зеркальных и линзовых антеннах при небольших смещениях облучателя из фокуса в фокальной плоскости; они могут иметь место при погрешностях установки облучателей, а также вызываются умышленно для качания главного лепестка.

Рассмотрим случай, когда облучатель сместился вдоль оси  $x$ . Фронт волны при этом повернулся вокруг оси  $y$  на угол  $\delta$  относительно плоскости раскрыва. Тогда, аппроксимируя амплитудные распределения на поверхности фронта волны формулами (28), компоненты  $\dot{H}_x$  и  $\dot{H}_y$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{H}_x = & \dot{H}_{x_0} \left[ (A_{xx} + (1 - A_{xx}) \cos^{m_{xx}} \frac{\pi}{2} \zeta_x) \right] \left[ (A_{xy} + (1 - A_{xy}) \cos^{m_{xy}} \frac{\pi}{2} \zeta_y) \right] \cos \delta e^{ik_1 \zeta_x}; \\ \dot{H}_y = & \dot{H}_{y_0} \left[ (A_{yx} + (1 - A_{yx}) \cos^{m_{yx}} \frac{\pi}{2} \zeta_x) \right] \left[ (A_{yy} + (1 - A_{yy}) \cos^{m_{yy}} \frac{\pi}{2} \zeta_y) \right] e^{ik_1 \zeta_x}; \end{aligned} \quad (38)$$

где  $k_1$  — постоянный коэффициент, равный фазовым искажениям на краю раскрыва.

Поляризационное отношение определяется формулой (29), где  $\dot{M}(\theta, \varphi)$  равно (30), умноженному на  $\cos \delta$ , и  $\tau_r$  заменено на  $\tau_r + k_1$ . Тогда, если амплитудные распределения ортогональных компонент одинаковы, а сдвиг по фазе между ними равен  $90^\circ$ , коэффициент эллиптичности в направлении главного максимума равен произведению модуля отношения ортогональных компонент поля в центре раскрыва на косинус угла поворота фронта волны. На этот же угол поворачивается максимум главного лепестка диаграммы направленности. Величину  $\cos \delta$  легко выразить через размеры раскрыва и коэффициент фазовых искажений  $k_1$ :

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{k_1 \lambda}{\pi L_x} \right)^2}}. \quad (89)$$

Из результатов расчета для  $\frac{L_x}{\lambda} = 10, 20, 50, 100$  (рис. 5) видно, что искажение коэффициента эллиптичности тем меньше, чем больше отношение размеров раскрыва к длине волны причем, коэффициент эллиптичности снижается весьма незначительно.

Если амплитудные распределения компонент поля постоянны, то величина  $\frac{k_1}{2\pi}$  равна углу поворота диаграммы направленности в долях

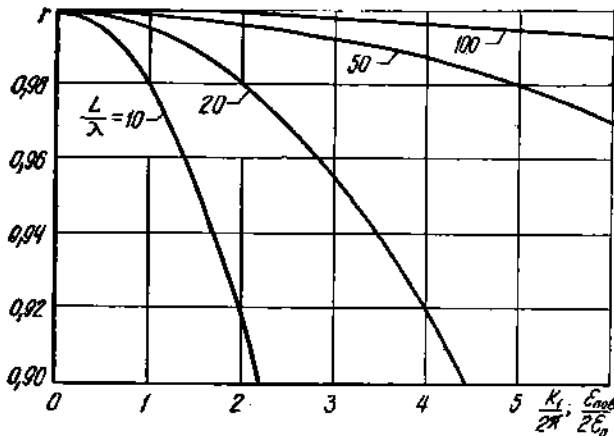


Рис. 5. Зависимость коэффициента эллиптичности от линейных фазовых искажений.

ее ширины «по нулям»  $\frac{\epsilon_{пов}}{2\epsilon_0}$ . По графикам рис. 5 можно непосредственно определить снижение коэффициента эллиптичности для данного раскрыва при заданном угле поворота диаграммы направленности.

Из приведенного рассмотрения видно, что качание луча с использованием линейных фазовых искажений возможно и в антеннах с круговой поляризацией без значительного ухудшения коэффициента эллиптичности.

### Раскрыв с квадратичными фазовыми искажениями

Квадратичные фазовые искажения возникают в апертурных антеннах при смещении облучателя из фокуса вдоль фокальной оси и могут встречаться на практике. Рассмотрим случай, когда благодаря смещению линейного облучателя из линии фокусов на раскрыв падает цилиндрическая волна с осью цилиндрической поверхности, параллельной оси  $u$ . Тогда распределение компонент магнитного вектора поля в раскрыве можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= H_{u0} [A_{xx} + (1 - A_{xx})(1 - \zeta_x^2)^{n_{xx}}] [A_{xu} + (1 - A_{xu})(1 - \zeta_u^2)^{n_{xu}}] \cos \gamma e^{i k_x \zeta_x^2}; \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{u0} [A_{yx} + (1 - A_{yx})(1 - \zeta_x^2)^{n_{yx}}] [A_{yu} + (1 - A_{yu})(1 - \zeta_u^2)^{n_{yu}}] e^{i k_x \zeta_x^2}; \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\gamma$  — угол между плоскостью раскрыва и плоскостью, касательной к фронту волны в точке  $\zeta_x$ ;

$k_x$  — постоянный коэффициент, равный фазовым искажениям на краю раскрыва.

Выразим  $\cos \gamma$  через коэффициент  $k_2$  и размеры раскрыва:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k_2 \lambda}{\pi L_x} \zeta_x\right)^2}}. \quad (41)$$

Рассмотрим случай, когда амплитудные распределения по оси  $y$  одинаковы т. е.  $n_{xy} = n_{yy}$  и  $A_{xy} = A_{yy}$  и  $n_{xx} = n_{yx} = 1$ , а фазовые искажения малы и справедливо разложение

$$\cos \gamma \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2k_2 \lambda}{\pi L_x}\right)^2 \zeta_x^2.$$

Тогда для поляризационного отношения в направлении главного максимума получим

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{N}_y}{\dot{N}_x} = - \frac{\dot{H}_{x0} \Phi(k_2) - (1 - A_{xx} + b) \Theta(k_2) + (1 - A_{xx}) b T(k_2)}{\dot{H}_{y0} \Phi(k_2) - (1 - A_{yx}) \Theta(k_2)}; \quad (42)$$

где

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{2k_2 \lambda}{\pi L_x}\right)^2;$$

$$\Phi(k_2) = \frac{2}{\sqrt{2k_2/\pi}} \left[ C\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right) + i S\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right) \right];$$

$$\Theta(k_2) = \frac{1}{k_2} \left\{ \left[ \sin k_2 - \frac{S\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right)}{\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}} \right] - i \left[ \frac{\cos k_2}{k_2} - \frac{C\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right)}{\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}} \right] \right\};$$

$$T(k_2) = \frac{1}{k_2} \left\{ \left[ \sin k_2 + \frac{3}{2k_2} \left( \cos k_2 - \frac{C\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right)}{\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - i \left[ \cos k_2 - \frac{3}{2k_2} \left( \sin k_2 - \frac{S\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right)}{\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}} \right) \right] \right\};$$

$C\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right); S\left(\sqrt{\frac{2k_2}{\pi}}\right)$  — интегралы Френеля.

Из (42) видно, что поляризационное отношение, даже при постоянных амплитудных распределениях, комплексная величина и зависит от величины коэффициента  $k_2$ . Однако, как показывают расчеты, изменения коэффициента эллиптичности незначительны. Например, для раскрыва с  $\frac{L_x}{\lambda} = 10$  при  $A_{xy} = A_{yx} = 0$ , круговой поляризации в центре раскрыва и фазовых искажениях  $k_2 = \frac{\pi}{4}$ , коэффициент эллиптичности снижается от 1 до 0,998.

## ВЫВОДЫ

В работе исследуется зависимость поляризационной диаграммы от амплитудно-фазового распределения поля в раскрыве антенны. Выведены условия синтеза заданной поляризационной диаграммы.

Если амплитудно-фазовое распределение одной из ортогональных компонент задано или известно, то задача синтеза заданной поляризационной диаграммы сводится к отысканию ортогональной ей компоненты. При этом для решения задачи можно воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

Чтобы антенна была поляризована по кругу в пределах всего переднего полупространства, амплитудные распределения ортогональных компонент должны быть одинаковыми, и сдвиг фаз между ними должен быть равным  $\pm \frac{\pi}{2}$  в раскрыве любой формы. При неодинаковых амплитудных распределениях антенна поляризована по кругу в направлении главного максимума, если ортогональные компоненты электрического поля в центре раскрыва поляризованы по эллипсу, большая полуось которого параллельна компоненте поля с более быстрым спаданием амплитуды к краям раскрыва. Найдена зависимость величины коэффициента эллиптичности в центре прямоугольного синфазного раскрыва, необходимая для круговой поляризации в главном максимуме, от распределений поля по компонентам.

Исследована поляризационная диаграмма прямоугольного раскрыва. В синфазном раскрыве различие в скоростях спадаания амплитудных распределений ортогональных компонент поля приводит к снижению коэффициента эллиптичности. Это снижение тем меньше, чем больше отношение размеров раскрыва к длине волны и чем меньше отличаются скорости спадаания компонент.

Линейные фазовые искажения снижают коэффициент эллиптичности пропорционально косинусу угла поворота главного лепестка диаграммы направленности. Уменьшение коэффициента эллиптичности можно компенсировать подбором амплитудного распределения.

Квадратичные фазовые искажения также приводят к снижению коэффициента эллиптичности. Если амплитудные распределения ортогональных компонент поля в раскрыве постоянны, то эти искажения весьма незначительны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. «Вестник информации», 1952, № 23, стр. 4 — 7.
2. Пярше. Вопросы радиолокационной техники, 1955, № 6 (30), стр. 3 — 25.
3. Антенны эллиптической поляризации, ИЛ, 1961.
4. L. E. Rabin. IRE Transactions on Antennas and Propagation, v. AP — 8, № 1, стр. 43 — 49, 1960.
5. L. J. Kuskowski, A. M. McCoy. IRE International Convention Record, p. 1, стр. 35 — 40, 1960.
6. Ю. В. Шубарин. Антенны сверхвысоких частот. Изд-во ХГУ, Харьков, 1960.
7. Антенны сантиметровых волн, т. 1. «Сов. радио», 1956.
8. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиотехнике, теории связи и оптике, ГИФМЛ, 1962.
9. Б. М. Минкович. «Радиотехника и электроника», т. VII, № 1, 171 — 173, 1962.



## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. Возбуждение кольцевого волновода диполем . . . . .	3
2. Э. С. Агранович, В. П. Шестопалов. Дисперсионное уравнение спирального волновода . . . . .	14
3. С. С. Третьякова. Дисперсионные уравнения двойного кольцевого волновода . . . . .	30
4. С. С. Третьякова. Распространение электромагнитных волн в кольцевом волноводе с диэлектриком . . . . .	36
5. В. В. Щербак. Двойные равнощелевые волноводные препятствия . . . . .	42
6. Е. Н. Подольский. Обоснование коротковолновой асимптотики в задаче о дифракции плоской электромагнитной волны на периодической решетке, составленной из металлических лент . . . . .	58
7. В. М. Скурлов. Дифракция цилиндрической электромагнитной волны на плоской периодической решетке, расположенной на границе раздела . . . . .	69
8. Л. П. Литвиненко. Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической симметричной трехэлементной решетке . . . . .	80
9. Л. Н. Литвиненко. Влияние решеток специальной геометрической формы на генерацию плоскопараллельного оптически активного слоя . . . . .	94
10. В. В. Щербак. Дифракция электромагнитных волн на двойной скрещенной решетке из металлических лент . . . . .	101
11. В. А. Барегамян. Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке с анизотропным диэлектриком . . . . .	118
12. В. М. Скурлов. Вычисление эффективных проницаемостей искусственных диэлектриков ленточного типа . . . . .	116
13. Н. А. Хижняк. Некоторые вопросы рассеяния электромагнитных волн на упорядоченных решетках диэлектрических тел . . . . .	127
14. А. В. Провадов. Отражение (прохождение) электромагнитных волн от решетки, ширина ленты металла которой равна ширине щели . . . . .	132
15. Ю. В. Шубарин, Л. П. Яцук. О возможности измерения коэффициентов излучения ортогональных крестообразных щелей с учетом их взаимного влияния . . . . .	137
16. Э. И. Черняков, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. К теории эффекта Вавилова — Черенкова при движении потока электронов над сложной границей раздела . . . . .	142
17. А. И. Цык, О. А. Третьяков. Излучение электромагнитных волн ограниченным плоским электронным потоком, движущимся над дифракционной решеткой . . . . .	149
18. Ю. В. Гандель. Задача о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране . . . . .	155
19. С. С. Калмыкова, В. И. Курячко. К теории рассеяния электромагнитных волн на неоднородности в диэлектрическом волноводе . . . . .	165
20. Ю. В. Шубарин, Н. П. Горобис. Зависимость поляризационной диаграммы от амплитудно-фазового распределения поля в раскрытой антенне . . . . .	172