УДК 535.366 **DOI:10.30837/rt.2024.4.219.11**

О.В. КАЗАНКО, О.Є ПЄНКІНА

ДОСЛІДЖЕННЯ ФЛОКЕ-БЛОХІВСЬКИХ ХВИЛЬ У ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

Вступ

У зв'язку зі стрімким розвитком такої галузі науки та техніки як фотоніка в останні десятиріччя (приблизно з 90-х років XX сторіччя) науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання продовжує зберігати актуальність [1]. Разом з тим актуальність зберігає й задача про розсіяння електромагнітних хвиль (дифракційна задача) на таких об'єктах як фотонні кристали. Наявність заборонених та дозволених зон в параметрах дифракційних процесів на цих кристалічних структурах є одним з основних феноменів, завдяки яким останні здебільше й зарекомендували своє практичне застосування [2, 3].

У роботі проводиться аналіз розсіювальних характеристик двошарової фотонно-кристалічної структури на предмет світлового відгуку, кількісне розуміння яких пов'язується з розв'язанням скалярного хвилевого рівняння для даного кристала (далі, *вихідне хвильове рівняння*). А саме, йдеться про розсіяння плоскої монохроматичної ТЕ-поляризованої електромагнітної хвилі на одновимірному фотонному кристалі з періодом l. Таке хвильове рівняння є лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку з частковими похідними та може розв'язуватись *методом розділення змінних* [4]. Для структур, які розглядаються, зазначений метод розділення змінних дозволяє отримати розв'язок хвильового рівняння, який у такому разі виявляється рівнянням з кусково-сталими періодичними коефіцієнтами (точніше, період коефіцієнтів дорівнює періоду кристала), у явному вигляді [5].

Завдяки можливості отримати розв'язки хвильових рівнянь для шаруватих середовищ у явному вигляді, вивчення процесів дифракції у цих середовищах виводиться на якісно вищий рівень. Як наслідок, є багато літератури та періодики, присвяченої саме розповсюдженню хвиль у шаруватих середовищах. З іншого боку, змога керувати зональним розподілом в параметрах дифракційних процесів, сполучаючи різні матеріали та варіюючи геометричними параметрами структури, відкриває шляхи до всілякого різноманітного практичного застосування шаруватих періодичних структур. Отже, розв'язки хвильового рівняння у явному вигляді плюс практичне застосування шаруватих періодичних структур створює широке поле діяльності для інженерів-дослідників різних кваліфікацій та напрямів.

Із загальної теорії рівнянь з частковими похідними відомо, що розв'язання хвильового рівняння методом розділення змінних в ортогональних координатах приводить до проблеми Штурма–Ліувілля (проблеми про побудову повної ортогональної системи функцій, кожний елемент якої задовольняє деякому лінійному диференціальному рівнянню 2-го порядку), яка в свою чергу може розв'язуватися як спектральна проблема (на власні числа та власні функції) для лінійного диференціального оператора 2-го порядку. Так формулюється абстрактна постановка проблеми. При розв'язанні окремих рівнянь маємо свою конкретику щодо особливостей забезпечення умов розв'язності проблеми Штурма–Ліувілля. Звернемо увагу на одну із найбільш важливих з практичної точки зору умов розв'язності цієї проблеми – умову про самоспряженість диференціального оператора, необхідність у забезпеченні якої породжує задачу про виділення простору самоспряженності. Нехай $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ – спектральне рівняння у проблемі Штурма–Ліувілля, L – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, β – спектральний параметр, просторова змінна. Із загальної теорії відомо, що функції u, які задані на проміжку (a, b) та задовольняють умові $\Lambda u(a) = u(b)$, $\Lambda\overline{\Lambda} = 1$ (Λ – комплексне число) можуть послужити основою для виділення простору самоспряженості лінійного диференціального оператора 2-го порядку. Справді, якщо висловитись загалом, то за визначенням самоспряженого оператора маємо $(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v)$, для будь-яких функцій u, v

(L – лінійний диференціальний оператор, $(*\,,**)$ – скалярний добуток), тобто маємо інтегральне перетворення з деякими кінцевими або некінцевими границями інтегрування (рівняння у часткових похідних розв'язуються у гільбертових просторах з інтегральним скалярним добутком, таких як простір Лебега, Соболєва, Безиковича) [4, 6 – 8].

Таким чином, спираючись на самі загальні міркування вирисовується зрозумілий зв'язок між границями інтегрування та границями проміжку визначення функцій. Отож, якою б не була методика забезпечення умови самоспряженості $(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v)$, досліднику доводиться враховувати границі інтегрування (оскільки інтеграл залежить від границь інтегрування). Звідки передбачається висновок про те, що для кінцевих проміжків граничні точки відіграють значну роль у забезпеченні умови самоспряженності (якщо граничні точки збігаються з границями інтегрування). Проте, хвильове рівняння для одновимірного фотонного кристала (вихідне хвильове рівняння) розв'язується на необмеженому проміжку $(-\infty, +\infty)$, тому справедливо виникає питання про те, як забезпечити умову самоспряженності на проміжку, що немає граничних точок. Подолати такий перепон дозволяє *метод матриці перенесення*, який може використовуватися для диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами (Transfer matrix method, докладно описується, наприклад, у [5]). Суть методу ґрунтується на побудові лінійного оператора T, що діє у двовимірному просторі розв'язків (площині розв'язків) спектрального рівняння $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z$ та розв'язку $Z(z-l)$ ставить у відповідність розв'язок $Z(z)$: $\mathrm{T}: Z(z-l) \to Z(z)$, l – період , $z \in (-\infty, +\infty)$ незалежна просторова змінна (лінійність перевіряється безпосередньо зо визначенням). Оскільки, у кінцевовимірних просторах лінійний оператор однозначно задається деякою матрицею, то T є квадратна матриця розміром 2×2 (тобто оператор T ототожнюється з матрицею) [5].

Отже, можливість говорити про управління фотонними забороненими зонами щораз більше підживлює інтерес багатьох фахівців різних наукових галузей до глибшого та різнобічно досліджування дифракційних процесів у кристалах (управління відбувається за рахунок зміни геометричних та матеріальних параметрів кристала). Кількісне розуміння характеру виникнення заборонених та дозволених зон, як відомо, дає *дисперсійне рівняння* – рівняння, що пов'язує параметри дифракційної задачі з умовами розв'язності проблеми Штурма–Ліувілля. В роботах [10, 11] розвивалася думка, що властивості функції Z як функції спектрального параметра β визначає характер поведінки дисперсійного рівняння. Тут є аналогія з напівпровідниковими матеріалами – матеріалами, які при одних якостях електромагнітного випромінювання діють як провідники, а при інших – як діелектрики.

Огляд

Інтерес до функції Z, як функції спектрального параметра β, зберігається вже у декількох роботах, що були опубліковані раніше [9 – 12] та може пов'язуватися з прагненням розуміти властивості складових членів дисперсійного рівняння. Як зазначалося у попередньому розділі, специфіка розв'язання вихідного хвильового рівняння на необмеженому проміжку $(-\infty, +\infty)$ виражається, зокрема, у тому, що такий проміжок немає граничних точок: специфіка виявляється у методиці виділення простору само спряженості. Взагалі кажучи, виділення простору самоспряженості диференціального оператора L (необхідна складова умова розв'язності проблеми Штурма–Ліувілля – є відомою задачею в загальній теорії рівнянь з частковими похідними та відповідно до відомих підходів до її вирішення). Врахувати умову самоспряженості для рівнянь з періодичними коефіцієнтами, якими є вихідне хвильове та спектральне рівняння, може допомогти метод матриці перенесення (Transfer matrix method, докладно описується, наприклад, у [5]).

Нехай T – матриця перенесення: $\mathrm{T}: Z(z-l) \to Z(z)$. Поряд з проблемою Штурма–Ліувілля сам метод матриці перенесення передбачає підняття й ще однієї спектральної проблеми зі спектральним параметром, залежним від спектрального параметра проблеми Штурма–Ліувілля: $\mathrm{T}Z = \Lambda Z$, $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\beta$, $\Lambda = \Lambda_\beta$ – спектральний параметр. Тобто спектральної проблеми для квадратної матриці T розміром 2×2. З базової лінійної алгебри відомо, що невироджена квадратна матриця розміром 2×2 має не більш ніж 2-а власних числа Λ_1, Λ_2, яким відповідають власні функції Z_{Λ_1}, Z_{Λ_2}. Отже, якщо вдається побудувати невироджену матрицю перенесення T_β для будь-якого β, то маємо наступну тотожність:

$$\Lambda_{1,2} Z_{\Lambda_{1,2}}(z-l) = Z(z), z \in (-\infty, +\infty). \quad (1)$$

Ця тотожність виконується для будь-якого β, проте, не для будь-якого β виконується рівність $\Lambda_{1,2}\overline{\Lambda_{1,2}} = 1$. Більше того, теоретично передбачається, що при виконанні всіх умов розв'язності проблеми Штурма–Ліувілля існує лише дискретна послідовність значень спектрального параметра β_n, така що $\Lambda_{1,2}\overline{\Lambda_{1,2}} = 1$ (причому, β_n немає точок згущення: $\beta_n \to \infty$). Таким чином, накладаючи умову $\Lambda_{1,2}\overline{\Lambda_{1,2}} = 1$ на тотожність (1), отримуємо наступне скалярне рівняння відносно параметра β:

$$\Lambda_1 Z_{\Lambda_1}(z-l) = Z_{\Lambda_1}(z), \Lambda_1\overline{\Lambda_1} = 1 <=> \Lambda_\beta Z(z-l) = \mathrm{Z}_\beta(z), \Lambda_\beta\overline{\Lambda_\beta}, z \in (-\infty, +\infty). \quad (2)$$

(вибір власного числа Λ_1 або Λ_2 не є принциповим, $\Lambda_1 = \Lambda_\beta$). Таке рівняння виконує сполучувану роль між умовами розв'язності проблеми Штурма–Ліувілля та параметрами вихідної дифракційної задачі та являє собою дисперсійне рівняння одновимірного фотонного кристала у загальному вигляді. З останнього перетворення видно, що функція Z є основним складовим членом рівняння, тому розумно припускатись думки, що поведінка цього рівняння здебільше залежатиме від Z.

Дослідження дисперсійного рівняння для одновимірного фононного кристала проводилась багатьма авторами [13 – 17]. Однак ці дослідження здебільше були чисельними та передбачали перехід до конкретних складових членів функції Z розв'язку спектрального рівняння у проблемі Штурма–Ліувілля: нормалізовану систему фундаментальних розв'язків з фіксованою точкою нормалізації, вибір системи координат, вибір точки відліку (точка відліку знаходиться на межі розподілу шарів кристала або усередині). На противагу цьому автори орієнтуються на виявлення загальних властивостей, оскільки окремі складові члени, виявляючи ті чи інші властивості, не обов'язково виявляють властивості самого об'єкту, який відповідно утворений цими членами (принцип емерджентної). Авторам роботи видається важливим продовжувати вдаватися до спроб зрозуміти загальні властивості дисперсійного рівняння одновимірного фотонного кристала шляхом вивчення поведінки функції Z як функції спектрального параметра β. У роботах [9–12] було з'ясовано, що перша похідна від Z за спектральним параметром представляється лінійно через саму функцію та свою похідну, але за просторовою змінною. Цей результат наводить на думку про ідентичний характер представлення й другої похідної. В свою чергу, змога мати два лінійних представлення дає можливість записати лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z та сподіватися на подальшу піддатливість до вивчення.

Перша похідна Z' відшукується як розв'язок наступного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку [9–12] (рівняння отримується шляхом взяття похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром: $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z <=> \mathrm{L}Z' + \beta^2 Z' = -2\beta Z$):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\psi})^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -2\frac{\beta}{\mu}Z,, \quad (3)$$

тут $\psi = Z'$ – шукана функція. Розв'язок (точніше, частковий розв'язок) такого рівняння на кінцевому проміжку $[\frac{d}{2} - l, \frac{d}{2})$ записується у наступному вигляді

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z + \xi\dot{Z}, \quad (4)$$

де функція ξ обертається в нуль на межі розподілу середовищ: $\xi|_{-\frac{d}{2}} = 0$ (цією вимогою забезпечується неперервність розв'язку ψ_0, оскільки похідна $\dot{Z}$ може потерпати стрибок [10, 11]), $\xi = \int_{-\frac{d}{2}} \phi$, ϕ – розв'язок рівняння:

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\phi}\dot{)} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\phi = 4\frac{\beta}{\mu}. \qquad (5)$$

Це рівняння являє собою лінійне неоднорідне рівняння з кусково-сталою правою частиною та може розв'язуватися методом варіації [18]. Цікавим, на думку авторів, є рівняння, яке отримується шляхом диференціювання останнього за спектральним параметром β (питання щодо існування мішаних похідних обговорювалися у роботах [8, 9]):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\phi}'\dot{)} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\phi' = -4\cdot 2\frac{\beta}{\mu}\phi + 4\frac{1}{\mu} <=> (\frac{1}{\mu}\dot{\phi}'\dot{)} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\phi' = 4(2\beta\phi - 1)\frac{1}{\mu}. \qquad (6)$$

Загальним методом розв'язання як рівняння (3), так й новозаписаного рівняння, вважається метод варіації [18]. Проте отримати розв'язок цим методом у прийнятному вигляді, схоже, не вдається: не вдається отримати вільне від знаку інтеграла перетворення. Як й у випадку з першою похідною, коли було отримано розв'язок неоднорідного рівняння (3) [10], тут справедливо також говорити про неочікуваний неочевидний оригінальний результат. Таке рівняння виникало на шляху до спроби виразити другу похідну від функції Z за спектральним параметром β.

Друга похідна Z'' відшукується як розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку [11] (рівняння отримується шляхом взяття другої похідної від спектрального рівняння за спектральним параметром: $\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z <=> \mathrm{L}Z' + \beta^2 Z' = -2\beta Z <=> \mathrm{L}Z'' + \beta^2 Z'' = -2\beta Z' - 2Z - 2\beta Z'$, $\mathrm{L}Z'' - \beta^2 Z'' = -2Z - 4\beta Z'$ – інваріантність порядку дії оператору та взяття похідної пов'язана з відсутністю залежності від спектрального параметра у коефіцієнтах оператору):

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\phi}'\dot{)} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\phi'(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi}\dot{)} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}Z'\frac{1}{\mu}., \qquad (7)$$

тут $\varphi = Z'$ – шукана функція.

Нехай $\varphi = \eta Z' + \chi\dot{Z}' + \upsilon Z + \tau\dot{Z}$, де $\eta, \chi, \upsilon, \tau$ – деякі функції (підкреслимо, що коефіцієнти χ, τ обертається в нуль на межі розподілу середовищ й, таким чином, забезпечують неперервність [10, 11], шуканого розв'язку φ. За принципом невизначених коефіцієнтів ця підстановка приводить до системи 2-х лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно функцій $\dot{\chi}, \dot{\tau}$ (функції η, υ виключаються), що й було показано у [12]:

$$\begin{cases} (\ddot{\chi}\frac{1}{\mu}\dot{)} \quad +4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{\chi} \qquad\qquad = 8\frac{\beta}{\mu} \\ (\ddot{\tau}\frac{1}{\mu}\dot{)} \quad +4\frac{\beta}{\mu}\dot{\chi} \quad +4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{\tau} = 8\frac{1}{\mu} \end{cases}.$$

Або, у векторно-матричній формі остання система записується:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}^{\cdot}\right]^{\cdot} + \frac{4}{\mu}\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \frac{8}{\mu}\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

де
$$\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varsigma_\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma_\beta^2 & 0 \\ \beta & \varsigma_\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо матричне рівняння

$$\left[\frac{1}{\mu}\mathrm{I}\dot{\mathrm{X}}\right]^{\cdot}+\frac{4}{\mu}\varsigma^2\mathrm{X}=8\frac{1}{\mu}\mathrm{F}, \tag{8}$$

тут

$$\varsigma=\begin{pmatrix}\varsigma_\beta & 0\\ \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varsigma_\beta} & \varsigma_\beta\end{pmatrix}, \mathrm{F}=\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}, \mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

X – шукана матриця. Приходимо до матричного неоднорідного рівняння, яке розв'язується методом варіації. За аналогією зі скалярним рівнянням останнє має два матричні (фундаментальні) розв'язки. Безпосередньою підстановкою переконуємось, що такі розв'язки матимуть вигляд

$$\mathrm{X}_1(z)=\cos 2\varsigma(\mathrm{z}+\tfrac{d}{2}), \mathrm{X}_2(z)=\mu\varsigma^{-1}\sin\varsigma(\mathrm{z}+\tfrac{d}{2}) \tag{9}$$

За методом варіації розв'язок будемо відшукувати у вигляді $\mathrm{X}_0=\mathrm{X}_1\mathrm{C}_1+\mathrm{X}_2\mathrm{C}_2$, де $\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_1(z)$, $\mathrm{C}_2=\mathrm{C}_2(z)$ – матриці. Запишемо похідні та послідовно підставимо у рівняння (10):

$$\dot{\mathrm{X}}_0=\dot{\mathrm{X}}_1\mathrm{C}_1+\mathrm{X}_1\dot{\mathrm{C}}_1+\dot{\mathrm{X}}_2\mathrm{C}_2+\mathrm{X}_2\dot{\mathrm{C}}_2\,,$$

За методом варіації припускаємо, що $\mathrm{X}_1\dot{\mathrm{C}}_1+\mathrm{X}_2\dot{\mathrm{C}}_2=0$, тоді

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{X}}_0)^{\cdot}=(\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{C}_1)^{\cdot}+(\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\mathrm{C}_2)^{\cdot}=>(\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu})^{\cdot}\mathrm{C}_1+\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_1+(\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu})^{\cdot}\mathrm{C}_2+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_2\,,$$

далі

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{X}}_0)^{\cdot}+\frac{\varsigma^2}{\mu}\mathrm{X}_0=>\left((\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu})^{\cdot}+\frac{\varsigma^2}{\mu}\mathrm{X}_1\right)\mathrm{C}_1+\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_1+\left((\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu})^{\cdot}+\frac{\varsigma^2}{\mu}\mathrm{X}_2\right)\mathrm{C}_2+\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_1\,.$$

Тут важливо зауважити, що матриці X_1, X_2 виявляються перестановочними, що істотно спрощує перетворення у методі варіації (перевіряється безпосереднім перемноженням). Використання методу варіації допомогло побачити неочевидний зв'язок між рівнянням, що виникає у проміжних викладах при підстановці $\varphi=\eta Z'+\chi\dot{Z}'+\upsilon Z+\tau\dot{Z}$ та рівнянням, яке маємо шляхом взяття похідної за спектральним параметром від рівняння (5). А також зрозумілим стає походження функцій ξ. За методом варіації шукані матричні функції $\dot{\mathrm{C}}_1$, $\dot{\mathrm{C}}_2$ знаходяться як розв'язок наступної матричної системи рівнянь:

$$\begin{cases}\mathrm{X}_1\dot{\mathrm{C}}_1+\mathrm{X}_2\dot{\mathrm{C}}_2=0\\ \dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_1+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_2=F\end{cases}.$$

Звідки записуємо,

$$\dot{\mathrm{C}}_1=-\mathrm{X}_1^{-1}\mathrm{X}_2\dot{\mathrm{C}}_2=>-\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1^{-1}\mathrm{X}_2\dot{\mathrm{C}}_2+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\dot{\mathrm{C}}_2=F=>\left(-\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1^{-1}\mathrm{X}_2+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\right)\dot{\mathrm{C}}_2=F=>$$

$$\left(-\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1^{-1}\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1\right)\mathrm{X}_1^{-1}\dot{\mathrm{C}}_2=F=>\dot{\mathrm{C}}_2=\left(-\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_2+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1\right)^{-1}\mathrm{X}_1F=>\mathrm{C}_2=\mathrm{W}\int\mathrm{X}_1F$$

Аналогічно $\mathrm{C}_1=\mathrm{W}\int\mathrm{X}_2F$, $\mathrm{W}=\dot{\mathrm{X}}_1\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_2+\dot{\mathrm{X}}_2\frac{1}{\mu}\mathrm{X}_1$.

Основна частина

У роботах [10, 11] відмічалось, що змога мати два лінійних представлення дає можливість записати лінійне рівняння відносно функції Z. Автори цієї роботи продовжують працювати над питанням щодо змоги лінійно представити другу похідну від функції Z за спектральним параметром β, тобто представити аналогічно вигляду першої похідної за формулою (4).

Робота [12] присвячена пошуку другої похідної – це перша робота з авторських трудів з визначення другої похідної від розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром. У роботі розвивалася думка, що розв'язок рівняння (7) може відшукуватися у вигляді лінійного представлення через сам розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною. По суті ця думка є спробою провести аналогію між розв'язанням рівнянням (4) та рівнянням (6), тобто аналогію з методикою пошуків першої похідної. Один з основних висновків тогочасних досліджень довелося зробити не на користь змоги побачити пряму аналогію.

Втім, подальші дослідження та результати цієї роботи, з одного боку, вигляд запропонованої у роботі [12] підстановки передбачається безпосереднім взяттям похідної від представлення (5). А з іншого боку, було показано, що застосування підстановки приводить до матричного рівняння (10). Застосування методу варіації до такого матричного рівняння (10) показало нагоду відшукати розв'язок у вигляді $\varphi = \eta Z + \chi \dot{Z}$, а разом із тим – переосмислити висновок про можливість визначення функцій ξ, ξ'. Виявилось, що рівняння, яке виникає у проміжних викладах при здійсненні підстановки для φ є не чим іншим, як похідною від рівняння (5) за спектральним параметром. Це спостереження не є очевидним, оскільки універсальний метод варіації не дає змоги прийти до цього висновку.

Здійснюючи підстановку (4) у правій частині рівняння (5), виключаємо член Z':

$$\mathrm{L}\varphi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}Z + \xi\dot{Z}\right) \equiv -2\frac{1}{\mu}Z + 4\frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{1}{2}\dot{\xi}Z - 4\frac{\beta}{\mu}\xi\dot{Z},$$

зводимо доданки при функціях Z, $\dot{Z}$:

$$\mathrm{L}\varphi = 2\left(\beta\dot{\xi} - 1\right)\tfrac{1}{\mu}Z - 4\tfrac{\beta}{\mu}\xi\dot{Z}, \tag{10}$$

приходимо до наступного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку для знаходження другої похідної:

$$(\frac{1}{\mu}\dot{\varphi})^{\dot{}} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\varphi = 2\left(\beta\dot{\xi} - 1\right)\frac{1}{\mu}Z - 4\beta\xi\frac{1}{\mu}\dot{Z}.$$

Далі, опускаючи деякі проміжні виклади, за принципом невизначених коефіцієнтів, розв'язок останнього рівняння будемо шукати у вигляді $\varphi = \eta Z + \chi\dot{Z}$ (аналогія з пошуками першої похідної),

$$\mathrm{L}\varphi = \left((\dot{\eta}\frac{1}{\mu})^{\dot{}} - 2\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{\chi}\right)Z + (\ddot{\chi} + 2\dot{\eta})\frac{1}{\mu}\dot{Z}\,.$$

Переходимо до системи двох рівнянь відносно функцій η, χ:

$$\ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = -4\beta\xi, (\dot{\eta}\frac{1}{\mu})^{\dot{}} - 2\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\dot{\chi} = 2\left(\beta\dot{\xi} - 1\right)\frac{1}{\mu}.$$

Звідки записуємо

$$\ddot{\chi} + 2\dot{\eta} = -4\beta\xi \Rightarrow \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\ddot{\chi} - 2\beta\xi \Rightarrow \{\vartheta = \dot{\chi}\}, \eta = -\frac{1}{2}\vartheta - 2\beta\int\xi\,.$$

Підставляємо в інше рівняння системи:

$$-\frac{1}{2}(\dot{\vartheta}\frac{1}{\mu})^{\dot{}} - 2\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\vartheta = 2\beta\dot{\xi}\frac{1}{\mu} + 2\left(\beta\dot{\xi} - 1\right)\frac{1}{\mu} \Leftrightarrow (\dot{\vartheta}\frac{1}{\mu})^{\dot{}} + 4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\vartheta = -4\left(2\beta\dot{\xi} - 1\right)\frac{1}{\mu}\,.$$

Врешті маємо рівняння ідентичне рівнянню, що отримується шляхом взяття похідної за спектральним параметром від (5). Останнє рівняння отримувалось у проміжних викладах у роботі [12], де зазначалося, що таке рівняння не є істотним спрощенням відправного рівняння (9), і тому не зрозуміло як розв'язується. Втім, це рівняння являє собою похідну від (5) й тому частковим розв'язком є функція $\vartheta = \phi'$. Тож, маємо:

$$\eta = -\frac{1}{2}\phi' - 2\beta\int \xi + \eta_0 = -\frac{1}{2}\dot{\xi}' - 2\beta\int \xi + \eta_0 => \chi = \int\limits_{-\frac{d}{2}} \phi' = \xi'.$$

Далі виключимо з двох лінійних представлень відповідно для першої й другої похідної член $\dot{Z}$:

$$\xi Z'' = -\xi\left(\frac{1}{2}\dot{\xi}' + 2\beta\int \xi\right) Z + \xi\xi'\dot{Z},$$

$$Z''\xi - Z'\xi' = \left(\frac{1}{2}\xi'\dot{\xi} - \frac{1}{2}\xi\dot{\xi}' - 2\beta\xi\int \xi\right) Z\,.$$

Розділимо на ξ^2,

$$\frac{Z''\xi - Z'\xi'}{\xi^2} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{\xi}'\xi - \dot{\xi}\xi'}{\xi^2} - 2\beta\xi\int \xi\right) Z,$$

або

$$\left(\frac{Z'}{\xi}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)' - 2\beta\frac{1}{\xi}\int \xi\right) Z\,.$$

Наостанок, записуємо

$$\left(\frac{Z'}{\xi}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\ln^{\cdot\prime}\xi - 2\beta\frac{1}{\xi}\int \xi\right) Z\,.$$

Таким чином, отримане лінійне однорідне диференціальне рівняння відносно функції Z як функції спектрального параметра β. Функція ξ є такою ж функцією як у представлені для першої похідної. На думку авторів, таке рівняння може в перспективі допомогти виявити загальні властивості функції Z та дисперсійного рівняння (2).

Висновки

У рамках представленої роботи продовжуються здійснюватися спроби кількісно вивчати функцію Z – розв'язок спектрального рівняння у проблемі Штурма–Ліувілля для одновимірного двошарового фотонного кристала – залежно від спектрального параметра. Автори торкаються питання про можливість лінійно представити другу похідну за спектральним параметром через сам розв'язок та свою похідну, але за просторовою змінною.

Приміром, одна з проблем, що виникають при розв'язанні дисперсійного рівняння відносно спектрального параметра, пов'язана з феноменом близько дистанційованих коренів (при знаходженні власних чисел та відповідних власних функцій). Це об'єктивно існуюча проблема виявляється у досить об'ємних та часових затратах при застосуванні ЕОМ. Алгоритмічно реалізація чисельного пошуку коренів передбачає процедуру локалізації цих коренів, саме ця процедура й потребує затрат у часі. Розвиток альтернативних підходів до вивчення дисперсійного рівняння може дозволити у перспективі подивитися під іншими кутами на саме рівняння та відповідно на проблематику, пов'язану з обчисленням та локалізацію коренів.

Виявлена ідентичність проміжного викладу при застосуванні підстановки (запропонованої у [12]), яка дає матричне рівняння та рівняння, що отримане шляхом взяття похідної від (5). У роботі зауважується, що такі нечисельні дослідження у перспективі можуть послужити виявленню неописаних раніше властивостей дисперсійного рівняння, зачіпаючи й проблематику знаходження коренів. До оригінального результату цієї роботи слід віднести представлення, отримане для другої похідної у вигляді лінійного відношення самої функції та своєї похідної. Говорити про значний поступ у напрямку формування альтернативних поглядів на дисперсійне рівняння станом натепер фактично не доводиться, проте апарат похідної відіграє важливу роль у дослідженні будь-яких функціональних залежностей. З огляду на це, розвивати погляд на дисперсійне рівняння через розв'язок спектрального рівняння, як головного члена, видається авторам важливим елементом дослідження.

У роботі виписується лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку для розв'язку спектрального рівняння відносно спектрального параметра, а також констатується відносне неускладнення коефіцієнтів цього рівняння.

Список літератури:

1. Кожем'яко В.П., Іванов ОА, Іванов І. А. Перспективи застосування фотонних кристалів у сучасних системах обробки даних // Наук. пр. ВНТУ. Інформаційні технології та комп'ютерна техніка. № 4. Р. 1–4 с.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals // Journal of Modern Optics. Vol. 41, № 2. P.505–513.
3. Shmat'ko A., Kazanko A. V., Mizernik V. N., Odarenko E. N., Yampol'skii V. A., Rokshanova T. N. Proc. 8th Int. Conf. Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials. Odessa : UWBUSIS, 2016. P.160–162.
4. Маркович БМ. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник. Львів : Львівська політехніка, 2010. 384 с.
5. Yariv A., Yeh P. Optical waves in crystals – A Wiley intepriеses Publicatuon. New York : Jon Wiley & Sons, 1987. 616 p.
6. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1975.
7. Winkler S., Magnus W. Hill's Equation. New York, London, Sydney : Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996.
8. Yakubovich V. A. and Starzhinskii V. M., Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (Wiley, New York), 1975.
9. Казанко О.В, Пєнкіна О.Є. Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала // Вісник Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. «Радіофізика та електроніка». 2021. №35. С. 91–99.
10. Казанко О.В, Пєнкіна О.Є. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного шаруватого середовища // Експериментальні та теоретичні дослідження у сучасних науках : зб. наук. пр. "Логос" (ΛΌΓΟΣ) з матеріалами наук.-практ. конференції. Краків, Польша : Європейська наукова платформа, 2019. С. 36–42 с.
11. Казанко О. В. & Пєнкіна О. Є. Аналіз складових членів дисперсійного рівняння у задачі про дифракцію плоского монохроматичного коливання у двовимірному необмеженому двошаровому середовищі з метаматеріалом // Зб. наук. пр. "Грааль науки". 2021. № 6. С. 210–216.
12. Казанко О.В., Пєнкіна О.Є. Аналіз та методологія визначення норми власних функцій як граничний перехід у скалярному добутку в спектральній проблемі Штурма-Ліувілля для фотонного одновимірного кристала // Вісник Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. «Радіофізика та електроніка». 2023. Вип. 39. С. 41–50.
13. Guida G. Introduction to photonic band gap materials // Progress In Electromagnetics Research. 2003. №41. P. 1–20.
14. Gaughan Richard. Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal // Photonics Spectra. 2000. Vol. 34. №1.
15. Pandey G. N., Thapa K. B., Srivastava S. K., Ojha S. P. Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials // Progress In Electromagnetics Research M. 2008. Vol. 2. P. 15–36.
16. Morozov G.V., Sprung D. W. L. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal // A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96, 2011: 54005:p1-p5.
17. Sprung D. W. L., Wu H. and Martorell J. // Am. J. Phys., 61 (1993) 1118.
18. Самойленко А., Перестюк М., Парасюк І. Диференціальні рівняння : підручник для студ. мат. спец. 2-ге вид. Київ : Либідь, 2003. 301 с.

Надійшла до редколегії 02.11.2024

Відомості про авторів:

Казанко Олександр Віталійович – Український державний університет залізничного транспорту, асистент кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Україна; e-mail: a_kazanko@i.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008

Пєнкіна Ольга Євгеніївна – Український державний університет залізничного транспорту, старший викладач кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Україна; e-mail: penkina@kart.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685