

**ЗАСТОСУВАННЯ ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ
ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОЦІНКИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ПОТУЖНОСТІ**

Вступ

При вирішенні багатьох прикладних задач обробки в галузях радіолокації, радіозв'язку, технічної і медичної діагностики виникає необхідність виконувати спектральний аналіз спостережуваних процесів, які носять випадковий характер. Спектральний аналіз випадкових процесів умовно ділять на два види: непараметричний і параметричний. Непараметричні методи оцінювання спектральної щільності потужності (СЩП) ґрунтуються на перетворенні Фур'є. Параметричні методи оцінювання СЩП вимагають попереднього оцінювання параметрів стаціонарних моделей лінійного прогнозування, зокрема моделей авторегресії (АР), ковзного середнього (КС), авторегресії – ковзного середнього (АРКС). Оцінки СЩП, що отримані через параметри цих моделей, мають ряд переваг у порівнянні з оцінками СЩП, знайденими непараметричними методами. Зокрема, з'являється можливість отримати більш високу роздільну здатність при більш коротких реалізаціях процесів у порівнянні з непараметричними методами. У цьому випадку підвищення роздільної здатності СЩП пов'язане з неявним застосуванням прогнозування кореляційної функції випадкових процесів.

Природним розвитком у дослідженнях моделей лінійного передбачення є заміна стаціонарності моделей на нестаціонарність і лінійності моделі на нелінійність. Нестационарність моделей досліджується порівняно рідко тому, що її важко враховувати. Звичайний метод врахування нестаціонарності моделі полягає в диференціації початкового часового ряду для отримання стаціонарного процесу. Це використання моделі авторегресії проінтегрованого ковзаючого середнього (АРПКС) [1]. Використання дискретної похідної від нестаціонарного процесу, що приводить для деяких часових рядів до стаціонарності моделі, дозволяє в дослідженнях нестаціонарні властивості початкового процесу замінити на стаціонарні характеристики його похідної. Це істотно спрощує вирішення ряду практичних задач, зокрема прогнозування часових рядів. Декомпозиція нестаціонарного процесу з трендом і сезонною складовою [2] дає можливість частково виправити положення з аналізом нестаціонарного випадкового процесу. Методи простору станів широко використовуються для моделювання нестаціонарних часових рядів [3 – 5]. Янг у роботах [6, 7] запропонував використовувати простори станів до нелінійних і нестаціонарних процесів для їх обробки на основі виявлення і оцінювання стохастичних моделей зі змінними в часі параметрами. Якщо лінійність моделі АР єдина, то нелінійність допускає множину варіацій і пов'язана з додатковими складнощами в оцінюванні параметрів моделі. Для розширення можливості застосування лінійної моделі АР була використана множина нелінійних моделей. Запропоновано такі моделі як порогова авторегресійна модель Тонгу [8], експоненціальна авторегресійна модель Одзакі і Хагана [9, 10], модель Прістлі [11], функціонально-коефіцієнтна авторегресійна модель Чена і Цая [12] та інші. Огляд літератури показує на неослабний інтерес до моделі АР, викликаний, з одного боку, широкими можливостями моделі, а з іншого боку – обмеженнями, що накладаються на цю модель.

Тому актуальним є продовження досліджень АР моделі з метою подальшого підвищення роздільної здатності оцінки СЩП з використанням факторизації СЩП випадкових процесів. Під факторизацією розуміється розкладання багатомодової СЩП на простіші одномодові складові. Це дозволяє більш точно проводити аналіз низькочастотних, середньочастотних і

високочастотних складових СЦП. Основна увага у даній роботі приділена дослідженню завдання підвищення роздільної здатності оцінки СЦП випадкових процесів на основі моделі авторегресії лінійного передбачення шляхом факторизації методом Юла – Уокера і Берга.

Особливості моделі авторегресії

Модель АР раціонально використовувати для описування вузькосмугових випадкових процесів. В основу моделі АР покладено кореляцію відліків випадкового процесу у нинішній момент часу з деяким скінченним або нескінченним числом відліків у попередні моменти часу. Кореляційні зв'язки дозволяють здійснити регресію поточного відліку процесу на попередні відліки. Такий вид регресії називається авторегресією. Вважатимемо у подальшому, що корельований стаціонарний випадковий процес має нульове математичне сподівання. У рівнянні АР поточний відлік представляється зваженою сумою попередніх відліків процесу з деякими коефіцієнтами ваги:

$$x[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[p, j]x[t-j] + a[t], \quad (1)$$

де $\Phi[p, j]$ – коефіцієнти АР, $a[t]$ – помилки передбачення, що є некорельованими випадковими відліками процесу з дисперсією D_a , p – порядок моделі АР. Перший індекс у коефіцієнтах АР вказує на порядок моделі. Модель (1) оптимальна, якщо

$$E\{a[t]a[t-i]\} = 0, \quad i > 0,$$

де $E\{\}$ – оператор статистичного усереднювання. Умова оптимальності дозволяє отримати рівняння і визначити критерії для оцінки параметрів моделі – коефіцієнтів АР і порядку моделі.

Співвідношення для розрахунку оптимальних оцінок коефіцієнтів АР отримують з рівняння (1) і носять назву рівняння Юла – Уокера

$$R[i] - \sum_{j=1}^p \Phi[p, j]R[j-i] = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2)$$

У співвідношенні (2) використовуються незміщені оцінки значень кореляційної функції $R[i]$. Параметричне представлення СЦП АР процесу в загальному випадку багатомодове і описується через параметри моделі виразом

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[p, i]e^{-j2\pi fiT} \right|^2}. \quad (3)$$

Як видно з формули (3), всього декілька параметрів моделі АР несуть повну інформацію про СЦП випадкового процесу.

Метод факторизації СЦП

Факторизація СЦП дозволяє представити багатомодову СЦП, що описується виразом (3), простішими, зокрема одномодовими СЦП. Щоб показати можливість розкладання багатомодового параметричного спектру на простіші одномодові складові, припускаємо, що модель АР представлена мультиплікативною моделлю АР, тобто описується моделлю виду $AR_1 \times AR_2 \times \dots \times AR_k$ [13]. Параметри складових моделей АР легко обчислюються по коренях характеристичного рівняння моделі АР

$$c^p - \Phi[p, 1]c^{p-1} - \dots - \Phi[p, p] = \prod_{i=1}^p (c - c[p, i]) = 0, \quad (4)$$

де невідомі $c[p, i]$ є коренями характеристичного рівняння, яке легко вирішується в загальному випадку чисельними методами. У виразі (4) перший індекс у коренів рівняння $c[p, i]$ вказує на порядок вихідної моделі АР.

Розглянемо різні варіанти можливих рішень рівняння (4). Для простоти спочатку розглянемо випадок, коли корені комплексно зв'язані. Замітимо, що комплексні корені характеристичного рівняння (4) попарно комплексно зв'язані, оскільки в лівій частині маємо дійсне рівняння. За наявності цих коренів легко знайти відповідні коефіцієнти АР другого порядку:

$$\Phi[2,1] = c[2,1] + c[2,2], \quad (5)$$

$$\Phi[2,2] = -c[2,1]c[2,2].$$

Для іншої пари комплексно зв'язаних коренів можна знайти інші пари коефіцієнтів АР. Таким чином, для нових коренів характеристичного рівняння знаходимо нові пари коефіцієнтів АР, що формують одну моду СЦП. Використовуючи комплексно зв'язані корені, отримуємо факторизацію багатомодової СЦП, тобто її розкладання на одномодові СЦП, що відповідають кожній парі коефіцієнтів АР.

Для дійсного кореня характеристичного рівняння (4) зв'язок з коефіцієнтом АР простий

$$\Phi[1,1] = \pm c[1,1]. \quad (6)$$

Нагадаємо, що в цьому випадку мода в СЦП розташована або на нульовій частоті, або на максимальній частоті. Отже, модель АР p -го порядку з довільним числом мод можна представити у вигляді набору коефіцієнтів АР першого або другого порядків. Параметричне представлення спектру моделі (3), що залежить тільки від коефіцієнтів моделі АР, представляється набором одномодових спектрів. У такий спосіб здійснюється факторизація СЦП, що полягає в розкладанні параметричної багатомодової СЦП на одномодові складові. Запропонований метод факторизації спектрів і оцінювання частоти моди може застосовуватися для підвищення роздільної здатності СЦП. Тоді багатомодовий спектр, оцінювання якого здійснюється по моделі АР p -го порядку, представляється (факторизується) набором одномодових спектрів першого або другого порядків. Таким чином, багатомодовий спектр (3) представляється виразом

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| \sum_{i=0}^{p_1} \Phi_1[p_1, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \left| \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2[p_2, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \times \dots \times \left| \sum_{i=0}^{p_k} \Phi_k[p_k, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2}. \quad (7)$$

У виразі (7) коефіцієнти АР описують одномодові складові СЦП.

Зв'язок частотних характеристик мод СЦП з коренями характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння можна виразити через центральні частоти мод і їх ширини смуг в СЦП. Для цього використовується зв'язок між коренями характеристичного рівняння і параметрами спектру: частотою мод f_i і її шириною смуги СЦП Δf . Тоді дійсні корені характеристичного рівняння p -го порядку і параметри АР, пов'язані співвідношенням (6), виражаються через ширину смуги моди [14]:

$$c[p, i] = \pm e^{-\pi \Delta f_i T}. \quad (8)$$

Дійсні корені описують моди на нульовій частоті або на максимальній частоті дискретного спектру, що дорівнює половині частоти дискретизації.

Оскільки модель АР дійсна, то комплексні корені характеристичного рівняння описуються через центральні частоти і ширину смуги частот спектральних мод наступними виразами

$$c[p, i] = e^{-\pi \Delta f_i T - j 2 \pi f_i T}, \quad c[p, i + 1] = e^{-\pi \Delta f_{i+1} T + j 2 \pi f_{i+1} T}. \quad (9)$$

У простих випадках вузькосмугових СЦП на один дійсний корінь доводиться одна мода на нульовій частоті або на максимальній частоті. На два комплексно-зв'язаних корені характеристичного рівняння припадає два порядки моделі АР або одна мода на ненульовій частоті, або не на максимальній частоті. В якості характеристик сигналів можна використати центральні частоти мод. Якщо корені характеристичного рівняння комплексні, то частота моди визначається так:

$$f = ar \cos\{\Phi[2,1]/(\sqrt{-\Phi[2,2]})\} / 2\pi T, \quad (10)$$

а ширина полоси моди визначається виразом

$$\Delta f = \ln(-\Phi[2,2]) / 2\pi T. \quad (11)$$

Якщо корені дійсні, то модель АР має перший порядок. При цьому частоти мод $f=0$, якщо $\Phi[1,1]>0$ або $f=1/2T$, якщо $\Phi[1,1]<0$. Ширина смуги моди в цьому випадку визначається, як випливає з (8), виразом

$$\Delta f = \ln(|\Phi[1,1]|) / \pi T.$$

Зауважимо, що корені характеристичного рівняння, як випливає з (4), повністю характеризують модель, як і коефіцієнти АР. Таким чином, усі моди СЦП можна визначити безпосередньо через корені рівняння, використовуючи співвідношення (8) і (9). Так, для комплексних коренів з (9) – (11) маємо

$$f = ar \cos\{(c[2,1] + c[2,2]) / 2 \exp(\pi \Delta f T)\} / 2\pi T, \quad (12)$$

$$\Delta f = -\ln(|c[2,1]c[2,2]|) / 2\pi T.$$

Роздільна здатність оцінки СЦП при використанні факторизації

Багатомодові випадкові процеси часто визначаються дією різних чинників, що призводить до формування спектральних мод на різних частотах. У деяких випадках корисно описувати такі складні процеси полімоделлю виду $AR_1 \times AR_2 \times \dots \times AR_k$ [15]. Така модель характеризується полюсами передаточної функції, які виражаються через комплексно зв'язані пари. Представлення такої системи моделей через множення полюсів відповідає одній із форм її реалізації. Перемноження складових функції передачі відповідає послідовному (каскадному) включенню фільтрів першого і другого порядків з дійсними коефіцієнтами. Така послідовна реалізація часто використовується на практиці, оскільки вона дозволяє ослабити небажані ефекти, пов'язані з помилками округлення.

Оскільки кожна модель АР, що характеризується своїми коефіцієнтами АР, визначає СЦП процесу, то можна цю полімодель представити у вигляді мультиплікативної, тобто послідовної моделі. Представимо мультиплікативну багатомодову модель набором мономоделей із СЦП, що містить одну або декілька мод. Можна факторизувати багатомодову СЦП процесу на окремі моди і проаналізувати вплив різних чинників на формування СЦП.

Покажемо процес факторизації на прикладі моделі, що використовується при дослідженні роздільної здатності СЦП. Нехай часовий ряд описується мультиплікативною моделлю $AR_1 \times AR_2 \times \dots \times AR_k$. Враховуючи умову оптимальності, для знаходження коефіцієнтів АР маємо узагальнене нелінійне рівняння типу Юла – Уокера

$$\Phi_k(z)\Phi_{k-1}(z)\dots\Phi_1(z)R[j] = 0. \quad (13)$$

де z – оператор сдвигу назад.

Ефективний спосіб вирішення цього рівняння продемонстровано нижче на прикладі моделі АР четвертого порядку, що використовується для дослідження підвищення роздільної здатності методом факторизації. Коефіцієнти двох складових моделей другого порядку $\Phi_1[1]$, $\Phi_1[2]$, $\Phi_2[1]$, $\Phi_2[2]$ повинні розраховуватися шляхом вирішення системи нелінійних рівнянь, яку можна отримати з виразу (13):

$$\begin{aligned}\Phi[4,1] &= \Phi_1[2,1] + \Phi_2[2,1], \\ \Phi[4,2] &= \Phi_1[2,2] - \Phi_1[2,1]\Phi_2[2,1] + \Phi_2[2,2], \\ \Phi[4,3] &= -\Phi_1[2,2]\Phi_2[2,1] - \Phi_1[2,1]\Phi_2[2,2], \\ \Phi[4,4] &= -\Phi_1[2,2]\Phi_2[2,2].\end{aligned}\tag{14}$$

Ця процедура чисельного вирішення системи нелінійних рівнянь вимагає значного обсягу обчислень і трудомісткого відкидання зайвих коренів. Факторизація дозволяє спростити цю задачу, якщо необхідно розкласти СЩП моделі АР четвертого порядку на одномодові складові, що описуються моделями другого порядку. Для мультиплікативної моделі четвертого порядку $AR_1 \times AR_2$, представленій двома моделями другого порядку зі своїми комплексно-зв'язаними коренями характеристичного рівняння, завдання відшукування коефіцієнтів АР(2) спрощується. За наявності цих коренів відповідні коефіцієнти АР другого порядку мають вид:

$$\begin{aligned}\Phi_1[2,1] &= c_1[2,1] + c_1[2,2], \\ \Phi_1[2,2] &= -c_1[2,1]c_1[2,2], \\ \Phi_2[2,1] &= c_2[2,1] + c_2[2,2], \\ \Phi_2[2,2] &= -c_2[2,1]c_2[2,2],\end{aligned}\tag{15}$$

де нижній індекс вказує на номер моделі, рівний в даному випадку один або два.

Таким чином, при факторизації СЩП немає потреби знаходити коефіцієнти АР мультиплікативної моделі четвертого порядку $AR_1 \times AR_2$. Досить знайти комплексно-зв'язані корені і виразити через них відповідні коефіцієнти АР для моделей другого порядку.

Факторизація параметричних спектрів на їх мультиплікативні моделі дає точніше уявлення про ці складові. Ця властивість може бути використана для підвищення роздільної здатності параметричної оцінки спектрів. Якщо дві моди розташовані близько одна від одної, то їх параметрична оцінка СЩП може бути представлена як одна мода, тобто неможливо розділити ці моди. Проте особливості цієї моди поблизу своєї вершини, спостережувані як її розширення, дозволяє шляхом факторизації розділити вершину на дві моди. Факторизація є досить чутливим інструментом аналізу спектрів. Для підтвердження цього ефекту була проведена серія розрахунків і статистичних експериментів.

Розраховувалися коефіцієнти АР(4) для двомодового спектру з близько розташованими модами. Відповідно до теорії побудови мультиплікативних моделей спочатку оцінювалися параметри моделі АР(4) відомими методами параметричного спектрального оцінювання, а потім по ним розраховувалися коефіцієнти АР(2) мультиплікативної моделі. Для первинного оцінювання коефіцієнтів АР можуть бути використані різні методи: незміщені автокореляційні оцінки Юла – Уокера, зміщені автокореляційні оцінки Юла – Уокера, геометричний метод, метод Берга, метод Кея, коваріаційні методи, модифікований коваріаційний метод [16].

Експериментальні дослідження роздільної здатності СЩП

Проведено дослідження роздільної здатності з використанням незміщених автокореляційних оцінок у методі Юла – Уокера і гармонійного алгоритму (методу Берга). Незміщені оцінки в методі Юла – Уокера отримано з використанням незміщених оцінок функції кореляції процесу. У методі Берга коефіцієнти АР отримано рекурсивно алгоритмом Левінсона –

Дарбіна [16], який дозволяє рекурентно обчислювати коефіцієнти АР по коефіцієнтах відбиття ґратчатого фільтру (ГФ) $K[n]$. Коефіцієнти відбиття n -ї ланки ГФ обчислювалися згідно з виразом

$$K[n] = \frac{-2 \sum_{t=n+1}^N a_{n-1}[t] d_{n-1}[t-1]}{\sum_{t=n+1}^N |a_{n-1}[t]| + \sum_{t=n+1}^N |d_{n-1}[t-1]|}, \quad (16)$$

де $a_{n-1}[t]$, $d_{n-1}[t-1]$ – помилки прямого і зворотного передбачення $(n-1)$ -ї ланки ГФ. Помилки прямого передбачення в (16) обчислювалися згідно з

$$a_{n-1}[t] = a_{n-2}[t] + K[n-1]d_{n-2}[t-1]. \quad (17)$$

Аналогічно виражаються помилки зворотного передбачення:

$$d_{n-1}[t] = d_{n-2}[t-1] + K[n-1]a_{n-2}[t]. \quad (18)$$

Вирази (17) і (18) витікають із структури РФ, зображеної на рис. 1.

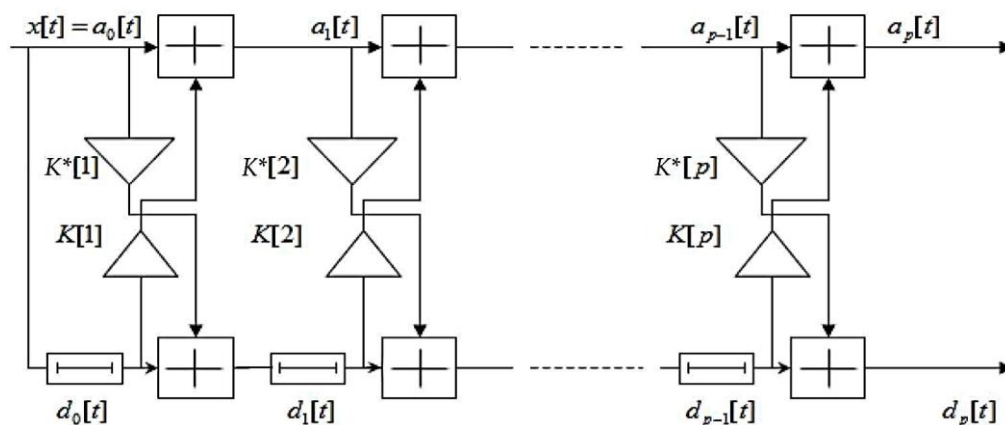


Рис. 1. Структура ГФ

Алгоритм Левінсона – Дарбіна використано для рекурентного обчислення коефіцієнтів АР згідно з співвідношенням

$$K^*[n] = K[n] = \Phi[n, n] = -\frac{R[n] + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi[n-1, i]R[n-i]}{(\sigma_{a, n-1})^2}, \quad n = 2, \dots, p,$$

$$\Phi[n, i] = \Phi[n-1, i] + \Phi[n, n]\Phi[n-1, n-i], \quad (\sigma_{a, n})^2 = (1 - \Phi^2[n, n])(\sigma_{a, n-1})^2, \quad (19)$$

з ініціалізацією

$$\Phi[1, 1] = \frac{-R_1}{(\sigma_x)^2}, \quad (\sigma_{a, 1})^2 = (1 - \Phi^2[1, 1])(\sigma_x)^2,$$

де σ_x – середньоквадратичне відхилення (СКВ) процесу, $\sigma_{a, n}$ – СКВ помилки передбачення для моделі АР n -го порядку.

Оцінки коефіцієнтів відбиття (16) використовувалися для розрахунку коефіцієнтів АР відповідно до алгоритму Левінсона – Дарбіна (19).

Дослідження проводилися методом статистичного моделювання. При цьому генерувався випадковий процес АР(4). По заданим частотним характеристикам мод СЦП розраховували-

ся корені характеристичного рівняння з (8) і (9). Знайдені у такий спосіб корені характеристичного рівняння використовувалися для розрахунку коефіцієнтів моделі AP(4) при формуванні досліджуваного процесу AP з близько розташованими в СЩП модами.

Наведемо формули, що зв'язують коефіцієнти AP з коренями характеристичного рівняння, що витікає з (4) для $p = 1 \div 4$:

$$\begin{aligned}
 \Phi[1,1] &= \pm c[1], \\
 \Phi[2,1] &= c[2,1] + c[2,2]; \\
 \Phi[2,2] &= -c[2,1]c[2,2], \\
 \Phi[3,1] &= c[3,1] + c[3,2] + c[3,3]; \\
 \Phi[3,2] &= -(c[3,1]c[3,2] + c[3,1]c[3,3] + c[3,2]c[3,3]) \\
 \Phi[3,3] &= c[3,1]c[3,2]c[3,3], \\
 \Phi[4,1] &= c[4,1] + c[4,2] + c[4,3] + c[4,4]; \\
 \Phi[4,2] &= -(c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,3] + c[4,4]c[4,1] + c[4,2]c[4,3] + c[4,2]c[4,4]) \\
 \Phi[4,3] &= c[4,1]c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3]c[4,4] + c[4,1]c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,2]c[4,4] \\
 \Phi[4,4] &= -c[4,1]c[4,2]c[4,3]c[4,4].
 \end{aligned} \tag{20}$$

У виразах (20) перший індекс в квадратних дужках вказує на відповідний порядок моделі згенерованого випадкового процесу. Потім згідно з (1) формувався випадковий процес з використанням породжуючого процесу у вигляді білого гаусівського шуму [17].

Результати дослідження роздільної здатності СЩП з використанням факторизації

Підвищення роздільної здатності шляхом факторизації СЩП проілюстроване на прикладі випадкового процесу AP(4) з параметрами двох спектральних мод СЩП: з центральними частотами $f_1 = 110$, $f_2 = 130$ і шириною смуги частот $df_1 = df_2 = 1$. По заданим частотним параметрам, згідно з (9), розраховувалися чотири попарно комплексно-зв'язані корені характеристичного рівняння. Потім, з використанням виразу (20), знаходилися коефіцієнти AP четвертого порядку. За цими даними розраховувалася теоретична СЩП згідно з (3). Для отримання вибірки випадкового процесу використовувався формуючий фільтр, на виході якого з відліків білого гаусівського шуму по знайденим коефіцієнтам AP(4) формувалася вибірка випадкового процесу згідно з рівнянням (1). Довжина вибірки процесу складала 100 відліків.

Методами Юла – Уокера і Берга оцінювалися коефіцієнти AP(4) і знаходився вибіркового параметричний спектр четвертого порядку відповідно до (3). Для отримання оцінок СЩП шляхом факторизації за вибіркою процесу AP(4) оцінювалися попарно комплексно-зв'язані корені характеристичного рівняння процесу. Потім по цим кореням розраховувалися дві пари коефіцієнтів AP(2), використовуючи вираз (15). Факторизована СЩП знаходилася відповідно до виразу (7). Теоретична СЩП для моделі AP(4) показана на рис. 2. По сформованому процесу AP(4) методами Юла – Уокера і Берга оцінювалися коефіцієнти AP(4). Параметрична оцінка спектру по моделі AP(4), що отримана відповідно до (3) для незміщених оцінок Юла – Уокера, представлена на рис. 3. Аналіз графіку СЩП показує, що спектральні моди в цьому випадку не розділяються.

Відомо, що роздільна здатність параметричної оцінки СЩП, що отримана методом Берга, є вищою ніж оцінки, які отримано методом Юла – Уокера [16]. Проте, навіть, параметрична оцінка спектру згідно з методом Берга не дає хорошої роздільної здатності при частотних параметрах спектру досліджуваного випадкового процесу (рис. 4).

У тих випадках, коли параметричні оцінки СЩП дають для близько розташованих частот слабо помітні моди або спостерігаються нерівномірності графіку СЩП поблизу вершини моди, підвищити роздільну здатність можна застосуванням факторизації мультиплікативної моделі AP. На рис. 5 представлено два графіки СЩП, побудованих по моделях AP1(2) і

AR(2), отриманих шляхом факторизації. Параметри складових моделей знайдено за оцінками Юла – Уокера згідно з рівнянням (2). Хоча точність оцінок частот мод не така висока, як отримана методом Берга, розділення двох мод шляхом факторизації очевидна. Дослідження показали, що розділення мод покращується при застосуванні факторизації, якщо моди навіть слабо розділяються, тобто провал між модами має малу глибину. У тих випадках, коли замість нерівномірності мод спектральна оцінка дає одну гладку моду, застосування факторизації не приводить до розділення мод.

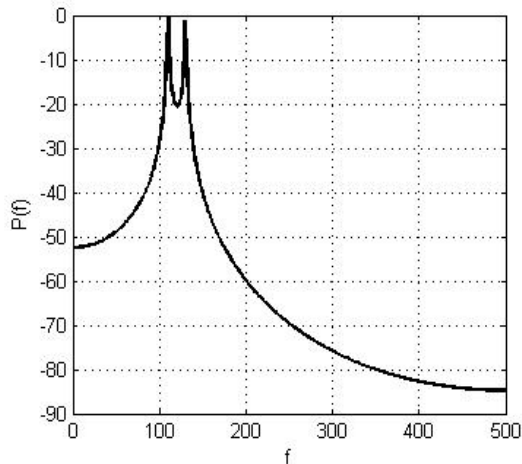


Рис. 2. Теоретична СЩП для моделі AR(4) з параметрами $f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$

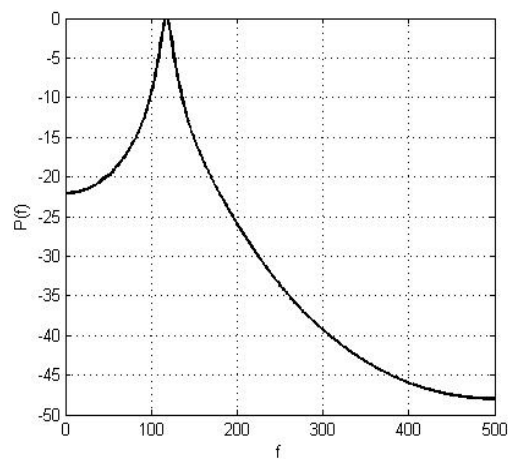


Рис. 3. Параметрична оцінка спектру для моделі AR(4) методом Юла – Уокера при $f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$

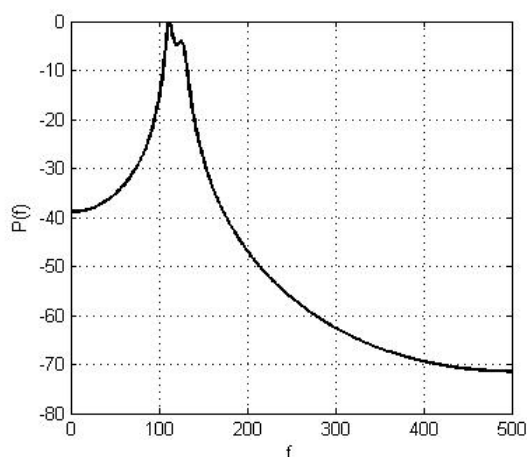


Рис. 4. Параметрична оцінка спектру для моделі AR(4) методом Берга при $f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$

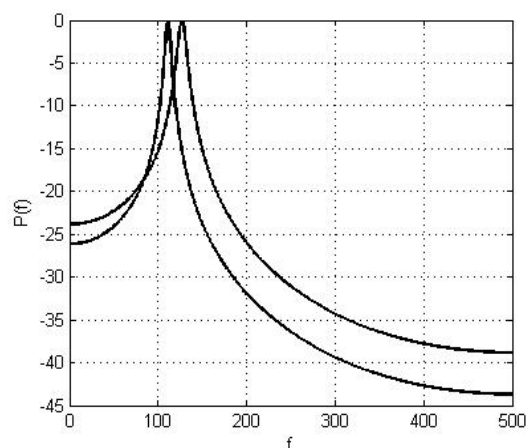


Рис. 5. Мультиплікативне представлення спектру для моделі AR(4) методом Юла – Уокера при $f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$

При факторизації надрозділення за двома оцінками СЩП складових моделей AR(2) зручно використати один графік СЩП. Тому запропоновано побудувати новий графік СЩП так, щоб ліва на графіку частина кривої співпадала з оцінкою СЩП лівої моди до частоти, рівній частоті лівого графіку, плюс половина різниці частот лівої і правої мод, тобто

$$f_{\max} = (f_2 - f_1) / 2,$$

де f_1, f_2 – центральні частоти правої і лівої мод. Тоді права частина кривої співпадає з оцінкою СЩП другої моди, починаючи з частоти $f_{\max} + 1$. Графік такого представлення розділення мод шляхом факторизації показано на рис. 6. Порівняння графіків на рис. 3, 6 демонструє ефект отримання надрозділення шляхом факторизації оцінки СЩП відповідно до методу Юла – Уокера. Роздільну здатність СЩП можна істотно підвищити, якщо для першочинного оцінювання коефіцієнтів AR використати геометричний метод, метод Берга, метод

Кея, коваріаційні методи або модифікований коваріаційний метод, які мають помітну перевагу в порівнянні з оцінками Юла – Уокера. Нижче продемонстровано істотне поліпшення роздільної здатності на прикладі методу Берга. На рис. 7 представлено графік теоретичного спектру, отриманого для моделі AP(4) із заданими параметрами СЦП: $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$.

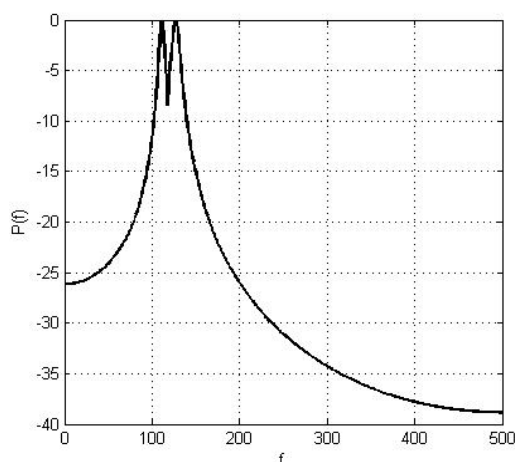


Рис. 6. Мультиплікативна оцінка спектру для моделі AP(4) згідно з методом Юла – Уокера при $f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$

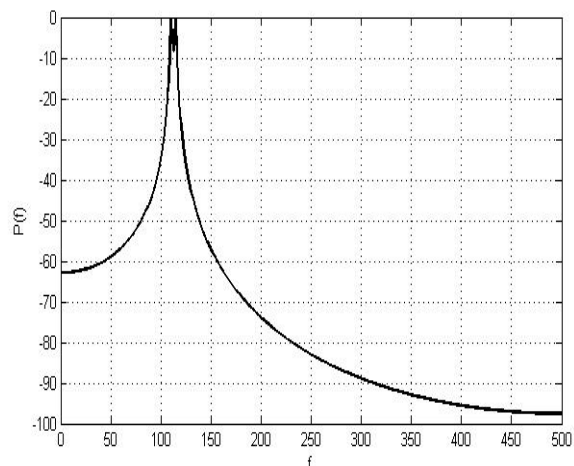


Рис. 7. Теоретична СЦП для моделі AP(4) згідно з методом Юла – Уокера при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 8, 11 представлено результати експериментів з дослідження роздільної здатності спектрів для процесу AP(4). Параметрична оцінка спектру моделі AP(4) згідно з методом Юлу – Уокера не дає можливості застосувати факторизації для підвищення роздільної здатності, оскільки графік моди СЦП гладкий без ознак наявності другої моди (рис. 8). На графіку параметричної оцінки спектру для моделі AP(4) згідно з методом Берга (рис. 9) є нерівномірність поблизу моди, що дозволяє розділити дві моди застосуванням методу факторизації. Аналіз графіків на рис. 9 – 11 показує, що для цих частот також можна отримати роздільну здатність на основі факторизації, хоча відстань між частотами, що задаються, істотно менша, у порівнянні з попереднім випадком ($f_1 = 110$, $f_2 = 130$, $df_1 = df_2 = 1$).

Аналіз графіків показує безперечну перевагу мультиплікативного розкладання для підвищення роздільної здатності параметричних оцінок спектрів. Застосування для розрахунків параметрів моделей AP, отриманих методом Берга, сприяє підвищенню спектрального розділення вибірових оцінок.

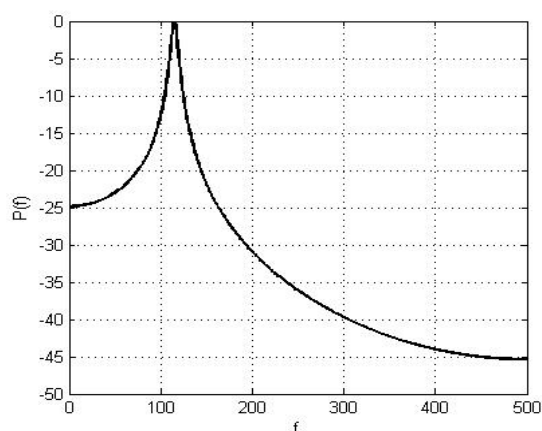


Рис. 8. Параметрична оцінка спектру для моделі AP(4) згідно з методом Юла – Уокера при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

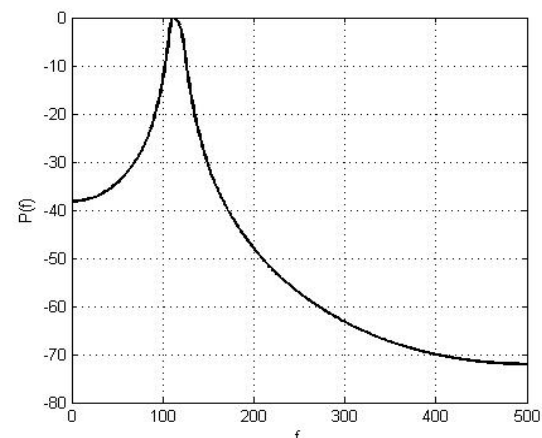


Рис. 9. Параметрична оцінка спектру для моделі AP(4) згідно з методом Берга при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

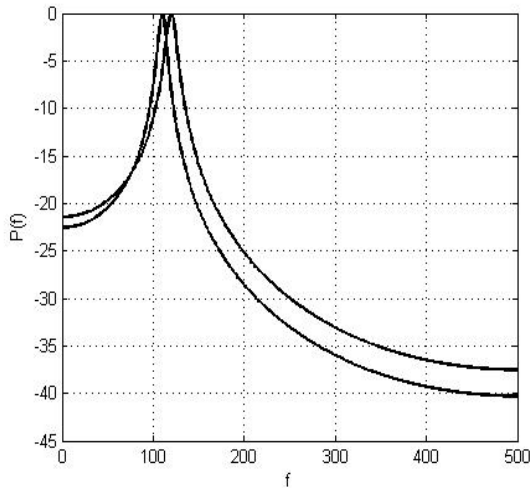


Рис. 10. Мультиплікативне представлення спектру моделі АР(4) згідно з методом Берга при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

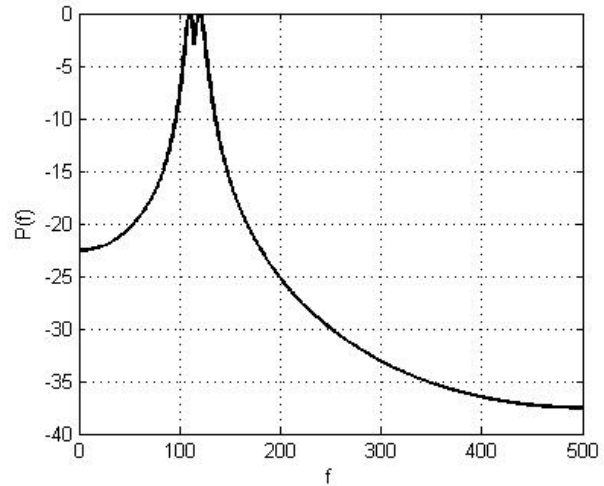


Рис. 11. Мультиплікативна оцінка спектру для моделі АР(4) згідно з методом Берга при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 12 і 13 представлено результати розділення двох мод в параметричній оцінці СЩП для різних довжин вибірок процесу при використанні для оцінки коефіцієнтів АР методу Берга. Як видно з графіків, при довжині 200 відліків процесу можна отримати роздільну здатність оцінки СЩП для двох мод при наступних заданих параметрах мод $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$. Використання факторизації дозволяє отримати роздільну здатність оцінки СЩП для цих параметрів мод уже при довжині вибірки 100 відліків процесу (рис. 11).

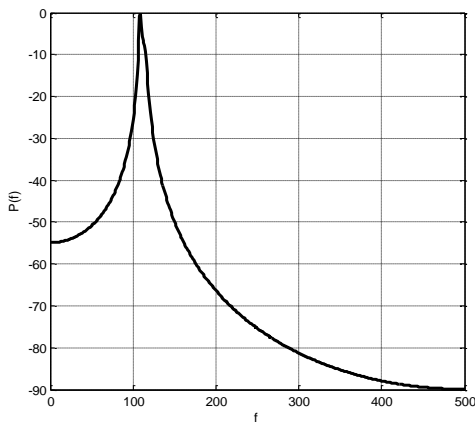


Рис. 12. Мультиплікативне представлення спектру для моделі АР(4) методом Берга по вибірці довжиною 150 відліків процесу при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

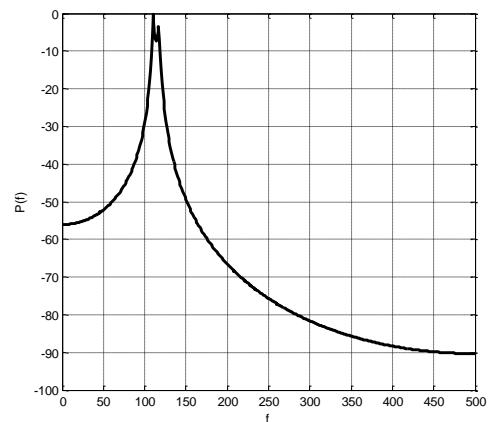


Рис. 13. Мультиплікативна оцінка спектру для моделі АР(4) методом Берга по вибірці довжиною 200 відліків процесу при $f_1 = 110$, $f_2 = 115$, $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 14 і 15 показано роздільну здатність, отриману шляхом факторизації мод СЩП для різних ділянок частот. Довжина вибірки складала 100 відліків процесу. Розділення розглядалось на частотах $f_1 = 50$, $f_2 = 65$, $df_1 = df_2 = 1$ (рис. 14) і на частотах $f_1 = 230$, $f_2 = 245$, $df_1 = df_2 = 1$ (рис. 15). Хоча точність оцінки частот трохи відрізнялася від частот, що задавалися, спостерігалось упевнене розділення мод.

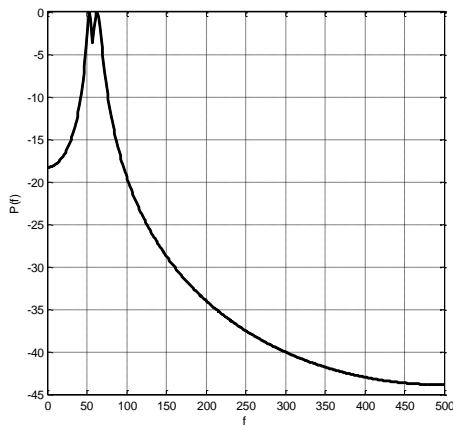


Рис. 14. Мультиплікативне представлення спектру для моделі AR(4) по вибірці 100 відліків процесу методом Берга при $f_1 = 50$, $f_2 = 65$, $df_1 = df_2 = 1$

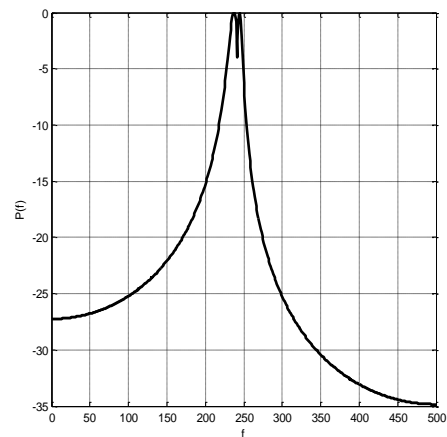


Рис. 15. Мультиплікативна оцінка спектру для моделі AR(4) методом Берга по вибірці 100 відліків при $f_1 = 230$, $f_2 = 245$, $df_1 = df_2 = 1$

Результати досліджень спектрального розділення на основі факторизації з використанням коефіцієнтів АР, що обчислюються методом Берга, показали перевагу в порівнянні з випадком використання методу Юла – Уокера.

Висновки

1. Представлено результати досліджень підвищення спектральної роздільної здатності на основі факторизації СЦП випадкового процесу, яка дозволяє розкласти багатомодову СЦП на простіші одномодові складові. Наведено теоретичне обґрунтування методу факторизації СЦП випадкового процесу на основі моделі АР.

2. Наведено результати експериментальних досліджень підвищення роздільної здатності СЦП випадкового процесу при використанні факторизації. Дослідження виконані шляхом статистичного моделювання на вибірках випадкового процесу, які отримані з допомогою формуючого фільтру. Результати досліджень показують перевагу факторизації з використанням методу Берга в порівнянні з методом Юла – Уокера.

3. Підвищення роздільної здатності оцінки СЦП випадкових процесів має важливе значення при вирішенні прикладних задач обробки сигналів в області радіолокації, радіозв'язку, технічної і медичної діагностики [18]. Це дає можливість більш точно проводити роздільний спектральний аналіз низькочастотних, середньочастотних і високочастотних складових СЦП спостережуваних процесів.

Список літератури:

1. G. Box, G. Jenkins, G.C. Reinsel. Time Series Analysis, Forecasting and Control, 4th ed. Hoboken. USA : Wiley, 2008.
2. Brockwell P.J., Davis R.A. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer, 2002.
3. Kitagawa G., Gersch W. Smoothness Priors Analysis of Time Series. New York : Springer, 1996.
4. Drubin J., Koopman S. Time Series Analysis by State Space Methods. Oxford : Oxford Univ. Press, 2008.
5. Hyndman R., Koehler A., Snyder R., Grose S. A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods // Int. J. Forecast. 2002. Vol. 18, no. 3. Pp. 439 – 454.
6. Young P.C. Stochastic, dynamic modelling and signal processing: Time variable and state dependent parameter estimation // Nonlinear and Nonstationary Signal Processing. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. Pp. 41 – 114.
7. Young P.C. Recursive estimation and time series analysis // Introduction for the Student and Practitioner. Berlin : Springer-Verlag, 2011.
8. Tong H. Nonlinear Time Series: A Dynamical Systems Approach. Oxford : Oxford Univ. Press, 1990.
9. Ozaki T. Non-linear time series models for non-linear random vibrations // J. Appl. Probabil. 1980. Vol. 17. Pp. 84–93.
10. Haggan V., Ozaki T. Modeling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model // Biometrika. 1981. Vol. 68. Pp. 189 – 196.

11. Priestley M.B. State dependent models: A general approach to nonlinear time series analysis // J. Time Series Anal. 1980. Vol. 1, no 1. Pp. 57 – 71.
12. Chen R., Tsay R.S. Functional-coefficient autoregressive models // Amer. Statist. Assoc. 1993. Vol. 88, no. 21. Pp. 298 – 308.
13. Tykhonov V.A., Kudriavtseva N.V., Chmelar P. Factorization of speech signals parametric spectra using multiplicative linear prediction models // Proceedings Elmar. 57th International Symposium ELMAR-2015, Zadar, 28 – 30 September. 2015. Pp. 124 – 130.
14. Кармалита В.А. Цифровая обработка случайных колебаний. Москва : Мир, 1989.
15. Карташов В.М., Олейников В.Н., Тихонов В.А. и др. Обработка сигналов в радиоэлектронных системах дистанционного мониторинга атмосферы. Харьков : Компания СМИТ, 2014.
16. Марпл мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Москва : Мир, 1990.
17. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4. С. 83 – 85.
18. Омельченко В.А., Безрук В.М., Коваленко Н.П. Распознавание заданных радиосигналов при наличии неизвестных сигналов на основе авторегрессионной модели // Радиотехника. 2001. Вып. 123. С. 195 – 199.

Надійшла до редколегії 05.03.2023

Відомості про авторів:

Тихонов В'ячеслав Анатолійович – д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, професор кафедри медіаінженерії та інформаційних радіоелектронних систем, Україна; e-mail: vyacheslav.tykhonov@nure.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4618-4787>

Безрук Валерій Михайлович – д-р, техн. наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна; e-mail: valerii.bezruk@nure.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2349-7788>