

*О.В. ЛАЗОРЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, А.А. ОНИЩЕНКО,
Л.Ф. ЧОРНОГОР, д-р фіз.-мат. наук*

**МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ ФРАКТАЛЬНИХ
І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ СИГНАЛІВ**

Вступ

Одним із актуальних напрямків сучасної фрактальної радіофізики [1] є мультифрактальний аналіз сигналів і процесів різного походження. На сьогодні створено багато різноманітних методів мультифрактального аналізу, що дозволяють досить ефективно отримувати інформацію про фрактальні та мультифрактальні властивості досліджуваних об'єктів. У переважній більшості робіт (див., наприклад, [2 – 4]) основний наголос, на жаль, робиться на особливості алгоритму самого методу, а не на трактовку отриманих числових мультифрактальних характеристик. Але для фахівця-практика вкрай потрібно отримати саме прості та зрозумілі поради щодо коректної інтерпретації отриманих результатів проведених досліджень. Саме тому тематика даної роботи виглядає актуальною.

Метою роботи є дослідження особливостей мультифрактальних характеристик модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, отриманих із використанням двох найбільш відомих методів мультифрактального аналізу – методу Wavelet Transform Modulus Maxima (WTMM) і методу Multi-Fractal Detrended Fluctuation Analysis (MF DFA).

Методи мультифрактального аналізу та відповідні числові характеристики

Метод WTMM як метод мультифрактального аналізу сигналів і процесів був запропонований у 1988 р. А. Арнеодо (A. Arneodo), Г. Грассо (G. Grasseau) та М. Холлшнайдером (M. Hollschneider) в роботі [5]. Він отримав подальший розвиток у роботах С. Малла [6] та А. Арнеодо, Е. Бакрі та Дж. Мьюзі [7 – 9]. Даний метод ґрунтується на використанні двох інтегральних перетворень з апарату вейвлет-аналізу – безперервного вейвлет-перетворення (БВП) та аналітичного вейвлет-перетворення (АВП) для отримання функції мультифрактального спектру $f(\alpha)$.

На нашу думку, найбільш вдало основи методу WTMM викладено в роботах [4, 6].

У межах даної роботи метод WTMM використовується для всього аналізованого сигналу в цілому. До мультифрактальних характеристик, що традиційно дозволяє отримати даний метод, належать мінімальне (α_{\min}) та максимальне (α_{\max}) значення показника Гьольдера α для функції мультифрактального спектру $f(\alpha)$, її ширина $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ та значення узагальненого показника Херста α^* , що відповідає положенню єдиного максимуму функції $f(\alpha)$ [10].

Будучи узагальненням відомого методу монофрактального аналізу (методу DFA – Detrended Fluctuation Analysis), метод MF DFA (multi-fractal DFA) з'явився в 2002 р. в роботі Я. Кантельхардта (J. Kantelhardt) та ін. [2].

Для практиків, що використовують системи комп'ютерної математики (СКМ) MATLAB/SciLab, є корисною відмінна оглядова стаття [11]. На сьогодні метод MF DFA популярний серед дослідників (див., наприклад, [11 – 14]).

На відміну від методу WTMM, який застосовується до всього сигналу в цілому, а тому дає глобальні значення мультифрактальних характеристик, у алгоритмі методу MF DFA використовується ковзаюча віконна функція у часовій області скінченної ширини, через що з'являється можливість отримати локальні (у межах вікна) значення мультифрактальних

характеристик. Зазвичай отримані величини асоціюються з положенням середини вікна на часовій осі. Отже, всі наведені вище мультифрактальні характеристики стають функціями часу: $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\Delta\alpha(t)$ і $\alpha^*(t)$ [11].

Останнє виявляється важливим у випадку дослідження нестационарних (у сенсі мультифрактальних властивостей) сигналів і процесів. Більш того, порівняння локальних і глобальних значень згаданих характеристик теж є цікавим і корисним.

Досить великий практичний досвід роботи авторів з такими сигналами та процесами викликав необхідність розширити перелік мультифрактальних характеристик, додавши декілька нових.

Часто вважають, що в ідеальному випадку функція мультифрактального спектру $f(\alpha)$ добре апроксимується параболою, і ця парабола є симетричною відносно вертикальної прямої, що проходить через її точку максимуму. Але практичний досвід підказує, що реальні мультифрактальні спектри часто виявляються несиметричними. Тому для урахування цього факту слід ввести додаткову числову характеристику.

Цю характеристику будемо називати *коефіцієнтом асиметрії функції мультифрактального спектру* та визначимо його через інші параметри:

$$K_f = \ln \frac{\alpha_{\max} - \alpha^*}{\alpha^* - \alpha_{\min}}. \quad (1)$$

Аналізуючи співвідношення (1), легко побачити, що для симетричної функції мультифрактального спектру $f(\alpha)$, коли $\alpha^* = (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$, маємо $K_f = 0$. Якщо максимум асиметрично зсунуто праворуч від симетричного положення ($\alpha^* > (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$), спостерігається $K_f < 0$, а якщо ліворуч ($\alpha^* < (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$), то $K_f > 0$. Важливо також, що коли мультифрактал у граничному випадку перетворюється на монофрактал з показником Гьольдера α_0 , для якого $\alpha_{\min} = \alpha_0 + \varepsilon$, $\alpha_{\max} = \alpha_0 - \varepsilon$, $\alpha^* = \alpha_0$, $\varepsilon \rightarrow +0$, маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \frac{\alpha_{\max} - \alpha^*}{\alpha^* - \alpha_{\min}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \frac{\alpha_0 - \varepsilon - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_0 - \varepsilon} = \ln 1 = 0.$$

Друга корисна числова характеристика, що ми пропонуємо використовувати для мультифрактального аналізу сигналів і процесів, є аналогом показника широкосмуговості, який застосовується для надширокосмугових (НШС) сигналів [15]. Вона задається співвідношенням

$$\mu_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\alpha^*}$$

та має назву *показник відносної ширини мультифрактального спектру*.

Показник відносної ширини мультифрактального спектру сигналу μ_α для строго монофрактального сигналу перетворюється на 0. Для інших видів сигналів, у тому числі й мультифрактальних, він є додатним. Така числова характеристика дозволить оцінювати, наскільки досліджуваний сигнал або процес є близьким до монофрактального.

Ще одне запропоноване нами доповнення набору традиційних числових характеристик, що використовуються під час проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, стосується *розмірності* так званого *носія мультифракталу* (multi-fractal support).

Добре відомо (див., наприклад, [6]) що у випадку сигналу або процесу носієм мультифрактала є гладка крива, фрактальна розмірність D_F якої завжди дорівнює одиниці. Саме тому точка максимуму функції мультифрактального спектру $(\alpha^*, f(\alpha^*))$ майже завжди має

$f(\alpha^*) = 1$. Але у випадку монофракталу з показником Гьольдера α_0 , як було вже вказано вище, увесь мультифрактальний спектр колапсує у точку (α_0, α_0) . І оскільки для монофрактала $0 < \alpha_0 < 1$, то й ордината точки положення максимуму зколапсованого спектра виявляється меншою за одиницю. У переважній більшості випадків це не відіграє суттєвої ролі, але при дослідженні нестационарних сигналів і процесів це зовсім не так.

Якщо сигнал або процес $s(t)$ є нестационарним у сенсі зміни у часі його фрактальних властивостей, то аналіз числових характеристик мультифрактального спектра треба проводити у часовому вікні скінченної ширини T (див., наприклад, [11]). Положення цього вікна на часовій осі відносно досліджуваного сигналу під час обчислення мультифрактальних характеристик перетворює ці характеристики на функції часу. Так саме стається і з ординатою точки максимуму функції мультифрактального спектра, тобто вона стає функцією часу $f(\alpha^*) \equiv f_\alpha = f_\alpha(t)$.

Важливо, що на графіку $f_\alpha(t)$ провали нижче рівня $f(\alpha^*) = 1$ можуть сигналізувати про те, що мультифрактальний процес переходить у монофрактальний режим. Побачити це одночасно на трьох залежностях $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$ і $\Delta\alpha(t)$ значно складніше та не зовсім зручно.

Таким чином, для кожного сигналу, що досліджуватиметься нижче із застосуванням методу MF DFA, ми будемо використовувати часові залежності $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\Delta\alpha(t)$, $K_f(t)$, $\mu_\alpha(t)$ і $f_\alpha(t)$, наводячи результати аналізу у спеціально створеному зручному форматі.

Модельні фрактальні та мультифрактальні сигнали

Для проведення досліджень, про які йдеться нижче, нами було створено великий набір з двох десятків модельних фрактальних (точніше кажучи, монофрактальних) сигналів (ФС) і мультифрактальних сигналів (МФС), до того ж як детермінованих, так і стохастичних. Але через обмеженість обсягу статті наведемо тільки п'ять моделей детермінованих ФС і МФС.

Модель 1. Дана модель є моделлю косинусної функції Вейерштраса – Мандельброта [16]

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\lambda^n t)}{\lambda^{(2-D)n}},$$

з фрактальною розмірністю $D = 1.5$, $\lambda > 1$. Вона є строго однорідною, а її графік є самоафінним [17].

Модель 2. Модель зі стрибком фрактальної розмірності. Цей модельний сигнал створено на основі з двох послідовно розташованих у часовій області модельних фрактальних НШС (ФНШС) сигналів $s_0(t)$ однакової довжини, перший з яких має фрактальну розмірність $D = 1.8$, а другий – $D = 1.2$. Сама ж модель $s_0(t)$ є моделлю детермінованого фрактального НШС (ФНШС) сигналу, що базується на узагальненій функції Вейерштраса [3], в якій всі випадкові фази дорівнюють нулю:

$$s_1(t) = \left[1 - b^{2D-4} \right] \frac{\sum_{n=0}^M b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n t)}{1 - b^{(2D-4)(M+1)}},$$

де t – часова змінна, b – параметр масштабування за часом, D – фрактальна розмірність сигналу, $1 < D < 2$, M – кількість гармонік, які використовуються для побудови фізичного фракталу (якщо $M \rightarrow \infty$, то ми отримуємо математичний фрактал).

Модель 3. Модель із лінійно зменшуваною фрактальною розмірністю. Це модель ФС на основі узагальненої функції Вейерштраса, у якій фрактальна розмірність $D(t)$ із часом зменшується за лінійним законом від 1.8 до 1.2.

Модель 4. Модель з наявністю нефрактальної частини. Ця модель складена з двох частин, перша з яких є косинусною функцією Вейерштраса – Мандельброта з фрактальною розмірністю $D = 1.5$, а друга – НШС сигналом (показник широкосмуговості $\mu = 0.2$), що не має фрактальних властивостей. Крім того, також потрібна модифікація моделі 4, яку назвемо моделлю 4а, де НШС сигнал замінено на $s(t) = \sqrt{(t-5)/5}$, $t \in [5, 10]$.

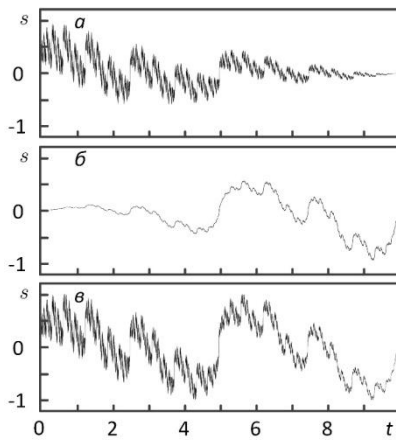


Рис. 1. Модельний детермінований ФС (модель 5), створений як адитивна сума двох ФНШС сигналів (модель $s_0(t)$) з різними значеннями фрактальної розмірності D : a – ФНШС сигнал з $D = 1.8$ та лінійно зменшуваною у часі амплітудою, b – ФНШС сигнал з $D = 1.2$ та лінійно збільшуваною у часі амплітудою, v – власне сама модель 5

Модель 5. Складна модель (рис. 1, в), що утворена адитивною сумою двох ФС, які базуються на модельному ФНШС сигналі $s_0(t)$. Перший з них має фрактальну розмірність $D = 1.8$, а його амплітуда зменшується за лінійним законом (рис. 1, а). Другий має $D = 1.2$, натомість його амплітуда зростає також за лінійним законом (рис. 1, б).

Формально кажучи, лише модель 1 є моделлю монофрактального сигналу. Моделі 2 і 3 належать до МФС з точки зору глобальних характеристик, але залишаються монофрактальними у локальному сенсі. У розд. 3 вони також будуть розглядатися та порівнюватися із моделями, що є мультифрактальними як у глобальному, так і у локальному сенсах. Моделі 4 і 4а взагалі є фрактальними тільки на першій своїй половині. Але вони вкрай потрібні, щоб побачити, як поведуться досліджувані методи фрактального аналізу, коли їх застосовують до нефрактального сигналу. Модель 5 є типовою моделлю мультифрактального сигналу, оскільки є мультифрактальною як у глобальному, так і у локальному сенсі. Загальна кількість відліків кожного модельного сигналу $N = 8192$.

Результати мультифрактального аналізу модельних сигналів

Спочатку розглянемо результати використання методу WTMM. Він застосовувався для аналізу одразу всієї реалізації модельного ФС або МФС сигналу.

Для моделі 1 маємо $\alpha_{\min} = 0.55$, $\alpha_{\max} = 0.61$, $\Delta\alpha = 0.06$, $\alpha^* = 0.58$, $K_f = 0.0$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 0.10$. Оскільки це модель монофрактального сигналу ($D = 1.5$), згадана раніше теорія стверджує, що його функція мультифрактального спектру $f(\alpha)$ повинна колапсувати у точку (α_0, α_0) , де $\alpha_0 = 2 - D = 0.5$. Наразі видно, що це не так. Мультифрактальний спектр став дуже вузьким ($\mu_\alpha = 0.10$), але не точковим ($\mu_\alpha = 0$). Цей практичний факт відомий у літературі [2] і зазвичай пояснюється тим, що теорія створена для математичних фракталів, а ФС у вигляді скінченного дискретного вектора даних є фізичним фракталом. Також слід зазначити, що отримана величина узагальненого показника Херста ($\alpha^* = 0.58$) є дещо завищеною відносно істинного відомого значення ($\alpha_0 = 0.50$).

Для моделі 2 маємо $\alpha_{\min} = 0.30$, $\alpha_{\max} = 0.87$, $\Delta\alpha = 0.57$, $\alpha^* = 0.58$, $K_f = 0.0$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 0.98$. Це типова модель МФС, тому її функція мультифрактального спектра є доволі широка ($\mu_\alpha = 0.98$). Обидві монофрактальні компоненти, показники Гьольдера яких дорівнюють відповідно $\alpha_1 = 0.2$ і $\alpha_2 = 0.8$, утворюють цю ширину ($\Delta\alpha \approx \alpha_2 - \alpha_1$), хоча

увесь спектр виявляється дещо зсунутим праворуч ($\alpha^* > (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$) на величину, аналогічну тій, яка отримана для моделі 1. Сам спектр є симетричним ($K_f = 0.0$).

Для моделі 3 маємо $\alpha_{\min} = 0.28$, $\alpha_{\max} = 0.86$, $\Delta\alpha = 0.58$, $\alpha^* = 0.57$, $K_f = 0.0$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.02$. Будучи моделлю МФС, модель 3 істотно відрізняється від моделі 2 тим, що у першій є всі складові в інтервалі $\alpha \in [0.2, 0.8]$, а у другій – тільки дві кінцеві ($\alpha_1 = 0.2$ і $\alpha_2 = 0.8$). Результати ми отримали фактично однакові. Звідси можна зробити важливий висновок: розрізнити такі моделі виключно за виглядом функції мультифрактального спектру всієї реалізації сигналу неможливо. Тобто одному виглядові мультифрактального спектра можуть відповідати абсолютно різні сигнали. Це не виглядає особливо дивним, якщо згадати, що й однакові значення фрактальних розмірностей двох фракталів нічого не кажуть про подібність їх структур.

Для моделі 4 маємо $\alpha_{\min} = 0.34$, $\alpha_{\max} = 3.99$, $\Delta\alpha = 3.65$, $\alpha^* = 1.83$, $K_f = 0.37$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.99$. Це важливий результат, оскільки він показує, яким негативним чином наявність нефрактального (у даному разі, гармонічного) сигналу впливає на результати мультифрактального аналізу. За логікою попередніх двох результатів і зважаючи на те, що будь-яка гладка крива має $\alpha_1 = 1.0$, можна було б очікувати, що функція мультифрактального спектра розташується праворуч від монофрактальної складової ($\alpha_2 = 2 - D = 0.5$), але не сильно відходячи від $\alpha_1 = 1.0$. Але вийшло зовсім не так. Утворився широкий ($\mu_\alpha = 1.99$) асиметричний ($K_f = 0.37$) спектр, до того ж отримані значення $\alpha_{\max} = 3.99$ і $\alpha^* = 1.83$ порушують умови фрактальності ($0 < \alpha^* < 1$). Аналогічні результати можна отримати і у випадку, якщо в даній моделі замінити гармонічну функцію на якусь іншу гладку (не обов'язково, періодичну) функцію (модель 4а). Цей результат добре пояснює, чому в літературі є поради щодо усунення трендів (наприклад, з використанням поліномів, фур'є- та вейвлет-фільтрації і т. і.) з експериментальних даних. Треба також зазначити, що у випадку адитивної суми фрактального та нефрактального сигналів негативний вплив останнього є істотно меншим.

Для моделі 5 маємо $\alpha_{\min} = 0.31$, $\alpha_{\max} = 0.87$, $\Delta\alpha = 0.56$, $\alpha^* = 0.44$, $K_f = 1.20$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.23$. Особливість даної моделі у порівнянні з моделями 2 і 3 полягає у тому, що подібно до другої моделі вона має тільки дві монофрактальні компоненти з ($\alpha_1 = 0.2$ і $\alpha_2 = 0.8$), але вони не змінюють одна одну, а задаються із змінним у часі співвідношенням амплітуд. Важливо відзначити, що величини α_{\min} , α_{\max} , $\Delta\alpha$, f_α отримано майже такі самі, натомість через істотну асиметрію спектра ($K_f = 1.20$) значення узагальненого показника Херста виявилось суттєво іншим, ніж для моделей 2 і 3. Відповідно збільшилося і значення показника відносної ширини функції мультифрактального спектра ($\mu_\alpha = 1.23$). До речі, саме для характеристики подібних сигналів і було запропоновано нові числові характеристики, такі як K_f і μ_α .

Тепер звернемося до методу MF DFA, який дозволяє отримати інформацію про нестаціонарну фрактальну структуру досліджуваних модельних сигналів. Наведені нижче результати отримані для ковзаючого прямокутного вікна шириною 1/10 від загальної довжини дискретного вектору даних аналізованого сигналу.

Декілька слів про спеціальний формат представлення результатів застосування методу MF DFA (рис. 2). На рис. 2, а розташовано аналізований сигнал у часовій області. Нижче послідовно зображено часові залежності числових характеристики мультифрактального спек-

ру: $\alpha_{\min}(t)$ (рис. 2, б), $\alpha_{\max}(t)$ (рис. 2, в), $\Delta\alpha(t)$ (рис. 2, г), $\alpha^*(t)$ (рис. 2, д), $K_f(t)$ (рис. 2, е) і $f_\alpha(t)$ (рис. 2, є). У самому низу перебуває графік функції спектральної густини (ФСГ) БВП сигналу (рис. 2, ж). Для всіх модельних сигналів у цьому місці використовувався вейвлет

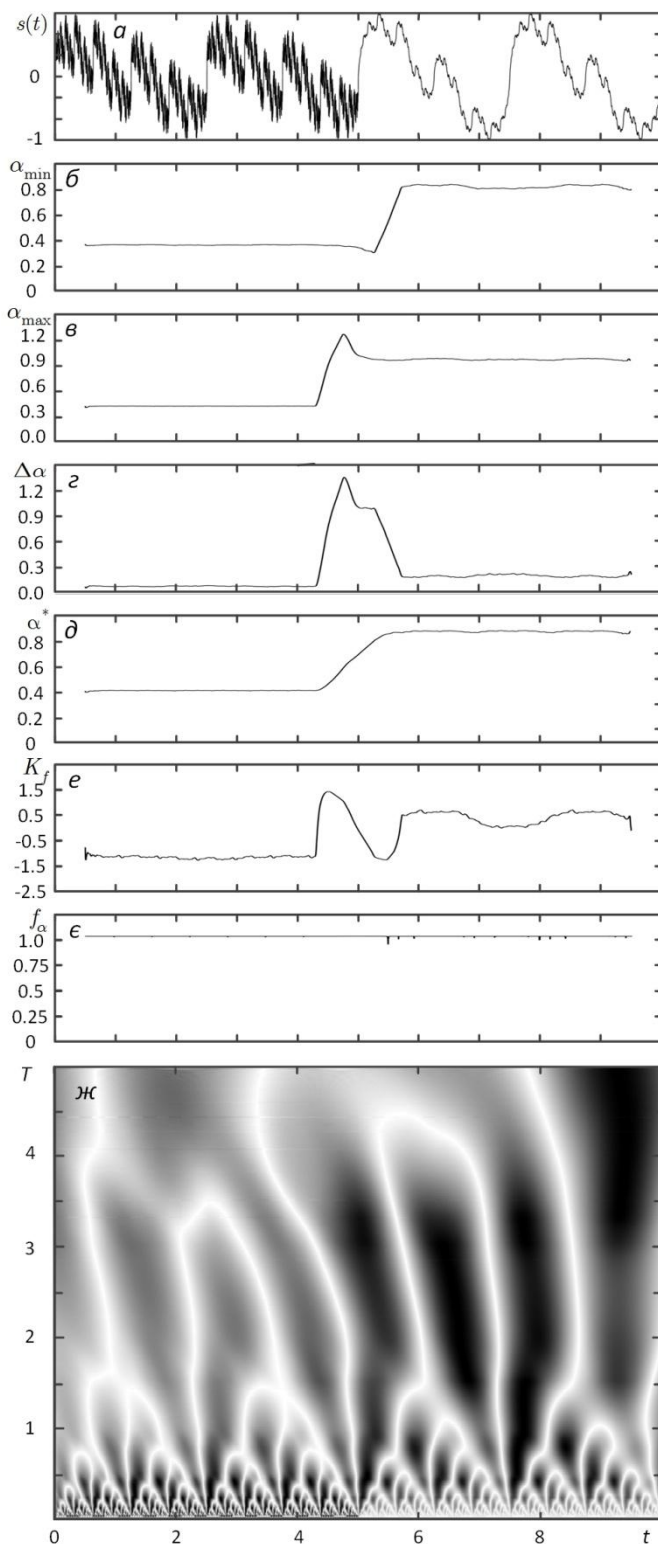


Рис. 2. Результати мультифрактального аналізу модельного ФС (модель 2): а – сигнал у часовій області, б – $\alpha_{\min}(t)$, в – $\alpha_{\max}(t)$, г – $\Delta\alpha(t)$, д – $\alpha^*(t)$, е – $K_f(t)$, є – $f_\alpha(t)$, ж – ФСГ БВП сигналу

Добеші четвертого порядку (db4 за поширеною класифікацією СКМ MATLAB/SciLab). ФСГ БВП добре відображає часо-частотний склад аналізованого сигналу, а тому є вкрай корисною для розуміння часових змін числових характеристик мультифрактального спектру.

Розглянемо особливості отриманих результатів для кожної моделі.

Модель 1, як і слід було очікувати, має майже незмінні у часі залежності $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\Delta\alpha(t)$, $\alpha^*(t)$, $K_f(t)$ і $f_\alpha(t)$. Слово «майже» означає, що певні флуктуації існують, але вони малі. Величини $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha^*(t)$ і $f_\alpha(t)$ майже не відрізняються від аналогічних результатів методу WTMM ($\alpha_{\min} = 0.55$, $\alpha^* = 0.58$, $f_\alpha = 1.0$), середні значення $\Delta\alpha(t)$ (приблизно 0.15) і $\alpha_{\max}(t)$ (приблизно 0.7) дещо перевищують дані методу WTMM ($\Delta\alpha = 0.06$, $\alpha_{\max} = 0.61$), до того ж спектр виявляється трохи асиметричним ($K_f(t) \approx -0.5$ на відміну від $K_f = 0.0$).

Модель 2 (рис. 2), що містить два послідовно розташованих у часі монофрактальних сигнали з $D = 1.8$ і $D = 1.2$, чітко демонструє переваги метода MF DFA відносно вивчення часових змін фрактальних характеристик досліджуваного сигналу. Оскільки метод WTMM дає, у певному сенсі, якесь середнє значення мультифрактальних характеристик ($\alpha_{\min} = 0.30$, $\alpha_{\max} = 0.87$, $\Delta\alpha = 0.57$, $\alpha^* = 0.58$, $K_f = 0.0$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 0.98$) для обох присутніх монофрактальних компонент, то метод MF DFA завдяки вікню у часовій області демонструє положення у часі кожної з компонент, а також зону переходу від однієї до іншої, коли до вікна потрапляє різне співвідношення для кількості енер-

гій обох компонент (рис. 2). Для першої компоненти ($D = 1.8$) при $t \in [0.5, 4.2]$ маємо $\alpha_{\min}(t) = 0.35$, $\alpha_{\max}(t) = 0.40$, $\Delta\alpha(t) = 0.05$, $\alpha^*(t) = 0.40$, $K_f(t) = -1.1$, $f_\alpha(t) = 1.0$. Для другої компоненти ($D = 1.2$) при $t \in [5.8, 9.5]$

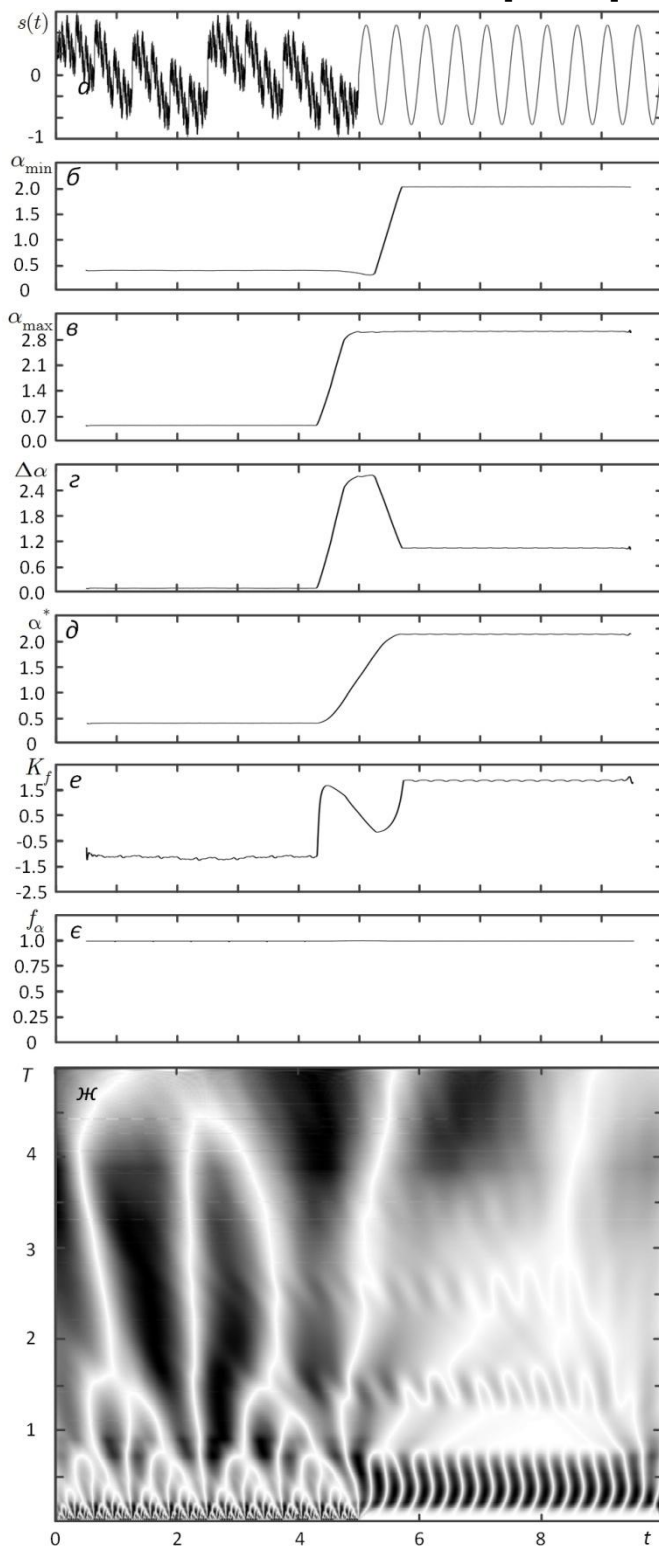


Рис. 3. Результати мультифрактального аналізу модельного ФС (модель 4): а – сигнал у часовій області, б – $\alpha_{\min}(t)$, в – $\alpha_{\max}(t)$, г – $\Delta\alpha(t)$, д – $\alpha^*(t)$, е – $K_f(t)$, є – $f_\alpha(t)$, ж – ФСГ БВП сигналу

маємо $\alpha_{\min}(t) = 0.80$, $\alpha_{\max}(t) = 1.00$, $\Delta\alpha(t) = 0.20$, $\alpha^*(t) = 0.90$, $K_f(t) = 0.0$, $f_\alpha(t) = 1.0$. У середній зоні ($t \in [4.2, 5.8]$) спостерігається перехід, де важливо, що узагальнений показник Херста $\alpha^*(t)$ зростає приблизно за лінійним законом. Ширина цієї середньої зони, зрозуміло, залежить від ширини вікна, що використовується, і дорівнює приблизно двом таким ширинам.

Модель 3, у якій фрактальна розмірність $D(t)$ із часом зменшується за лінійним законом від 1.8 до 1.2, також у методі MF DFA показує зовсім інші результати, ніж у методі WTMM ($\alpha_{\min} = 0.28$, $\alpha_{\max} = 0.86$, $\Delta\alpha = 0.58$, $\alpha^* = 0.57$, $K_f = 0.0$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.02$). Зрозуміло, що в цілому модель є МФС, але в кожен окремий момент її мультифрактальність залежить від ширини віконної функції. Маємо лінійне зростання $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\alpha^*(t)$ і майже незмінність $\Delta\alpha(t)$, $K_f(t)$ і $f_\alpha(t)$. Зазначимо, що $\alpha^*(t)$ лінійно зростає приблизно від 0.4 до 0.8, що певною мірою відрізняється від того, що мало бути (від 0.2 до 0.8).

Модель 4 (рис. 3, а), що містить монофрактальну та нефрактальну гармонічну частини, є досить важливою для практичного розуміння результатів мультифрактального аналізу. Метод WTMM для всієї моделі дає $\alpha_{\min} = 0.34$, $\alpha_{\max} = 3.99$, $\Delta\alpha = 3.65$, $\alpha^* = 1.83$, $K_f = 0.37$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.99$. Метод MF DFA показує (рис. 3), що для монофрактальної частини ($D = 1.5$) при $t \in [0.5, 4.2]$ маємо $\alpha_{\min}(t) = 0.35$, $\alpha_{\max}(t) = 0.41$, $\Delta\alpha(t) = 0.06$, $\alpha^*(t) = 0.40$, $K_f(t) = -1.0$, $f_\alpha(t) = 1.0$, а для нефрактальної частини при

$t \in [5.8, 9.5]$ – $\alpha_{\min}(t) = 2.00$, $\alpha_{\max}(t) = 3.00$, $\Delta\alpha(t) = 1.00$, $\alpha^*(t) = 2.15$, $K_f(t) = 1.9$, $f_\alpha(t) = 1.0$. У середній частині ($t \in [4.2, 5.8]$) $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\alpha^*(t)$ зростають приблизно за лінійним законом. Важливо, що формально мультифрактальний спектр нефрактальної частини має форму, схожу з тією, яка спостерігається для МФС, але його числові характеристики далеко виходять за межі умов фрактальності ($0 < \alpha^*(t) < 1$). Нефрактальність на часо-частотній площині (рис. 3, ж) відображається у зникненні деревоподібної структури, характерної саме для фракталів. Аналогічні результати отримано також для моделі 4а.

Модель 5, яка демонструє МФС, складений з двох монофрактальних компонент, для котрих відношення амплітуд у часі змінюється від 0 до ∞ , є особливою, оскільки у кожен момент часу присутні обидві компоненти. Метод WTMM, що не враховує часового розташування компонент, дає $\alpha_{\min} = 0.31$, $\alpha_{\max} = 0.87$, $\Delta\alpha = 0.56$, $\alpha^* = 0.44$, $K_f = 1.20$, $f_\alpha = 1.0$, $\mu_\alpha = 1.23$. Як вже було сказано, більшість із цих параметрів не відрізняється від того, що метод WTMM дає для моделей 2 і 3. Метод MF DFA виявляє, що функції $\alpha_{\min}(t)$, $\alpha_{\max}(t)$, $\alpha^*(t)$ і $\Delta\alpha(t)$ зростають нелінійно, причому швидкість їх зростання збільшується із часом.

Тепер на основі результатів мультифрактального аналізу модельних сигналів, отриманих з використанням методів WTMM і MF DFA, необхідно зробити певні висновки для різних видів сигналів, які, сподіваємося, будуть цікавими та корисними для практиків. Такими видами наразі є монофрактальні, мультифрактальні та нефрактальні сигнали.

Мультифрактальний аналіз монофрактальних сигналів

1. На відміну від теоретичних положень, отриманих для математичних фракталів, під час мультифрактального аналізу модельних монофрактальних сигналів, що належать до фізичних фракталів, мультифрактальний спектр не колапсує у точку. Це пов'язано, насамперед, з тим, що модельний сигнал має вектор даних скінченної довжини, а тому як і у будь-якого фізичного фрактала, фрактальні властивості існують лише у обмеженому з обох боків діапазоні масштабів. Отримані мультифрактальні спектри є досить вузькими, добрим індикатором чого виступає показник відносної ширини мультифрактального спектру μ_α . Для монофрактальних сигналів він зазвичай задовольняє умові $\mu_\alpha \square 1$. Для математичного монофрактала, зрозуміло, ми отримаємо $\mu_\alpha = 0$. Сказане є справедливим як у глобальному (метод WTMM), так і у локальному (метод MF DFA) сенсі.

2. Як глобальні, так і локальні отримані оцінки узагальненого показника Херста виявляються дещо завищеними для всіх моделей. Отже, відповідні оцінки фрактальної розмірності, у відповідності до цього, стають заниженими.

3. Параметр f_α не завжди своїм зменшенням відносно одиниці вказує на монофрактальність сигналу. Скоріш за все, причина – та сама, що описана у першому висновку.

4. Стохастичні моделі у порівнянні з детермінованою (модель 1) на окремих реалізаціях у цілому показують гірший результат у сенсі стабільності мультифрактальних характеристик. Однак це можна покращити створенням великого набору цих випадкових реалізацій із наступним усередненням по ансамблю.

5. Шукаючи на часових графіках мультифрактальних характеристик перехід досліджуваного сигналу у монофрактальний режим, у першу чергу слід співставляти графіки функцій $f_\alpha(t)$, $\Delta\alpha(t)$ і $\mu_\alpha(t)$. Те, що перша від них не відхилилася від одиниці, ще не заперечує монофрактальності. На практиці виконання умов $\Delta\alpha \leq 0.2$ і $\mu_\alpha \leq 0.25$ є вагомішими.

Мультифрактальний аналіз мультифрактальних сигналів

1. Моделі мультифрактальних сигналів можуть істотно відрізнитися одна від одної у сенсі поведінки мультифрактальних характеристик у часі. Все залежить від того, як саме

монофрактальні складові розташовано у сигналі. Вони можуть змінювати одна одну стрибком (модель 2), поступово (модель 3), або взагалі існувати одночасно із різним відношенням амплітуд (модель 5). Але всі вони у глобальному сенсі є мультифрактальними сигналами.

2. Метод WTMM, що досліджує глобальні мультифрактальні характеристики МФС, у випадку, коли різні за часовою фрактальною структурою моделі мають однаковий діапазон використаних значень показника Гьольдера, дає для них фактично однакові результати та не дозволяє впевнено відрізнити одну від одної. Отже, обмежувати мультифрактальний аналіз виключно методом WTMM є недоцільним.

3. Локальні мультифрактальні характеристики МФС у межах часового вікна скінченної довжини, що використовується у методі MF DFA, можуть бути як майже монофрактальними (модель 2 у зонах, коли до вікна потрапляє тільки одна монофрактальна складова), близькими до монофрактальних (модель 3, частина моделі 5), так і повністю мультифрактальними (середня зона моделі 2, друга частина моделі 5). Виявлення таких інтервалів є корисним під час аналізу експериментальних даних.

3. Узагальнений показник Херста $\alpha^*(t)$ в методі MF DFA є досить добрим індикатором часової поведінки фрактальних особливостей досліджуваного сигналу. Результати аналізу показують, що він добре віддзеркалює часову поведінку показника Гьольдера $\alpha(t)$, що застосовувався під час створення самих модельних сигналів. Більш того, він добре корелює з часовими змінами показника Херста $H(t)$, що застосовується у монофрактальному аналізі.

4. Коефіцієнт асиметрії функції мультифрактального спектру, що відображає відхилення досліджуваного зразка спектру від симетрії, також часто є корисним. Наприклад, метод WTMM, саме він дозволяє відрізнити модель 5 від моделей 2 і 3, оскільки решта мультифрактальних характеристик у цьому випадку приймають майже однакові значення.

Мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів

1. Метод WTMM, реагуючи на наявність нефрактальної гармонічної компоненти в моделі 4 (рис. 3), створює аномально широкий ($\mu_\alpha \approx 2$) мультифрактальний спектр, положення максимуму ($\alpha^* = 1.83$) якого істотно порушує умови фрактальності ($0 < \alpha^* < 1$). Тобто гармонічна компонента веде себе як складова з $\alpha_0 > 2$. В цілому це здається дещо дивним, оскільки добре відомо, що гладка функція повинна мати $\alpha_0 = 1$. Джерелом проблем не є періодичність функції, як про це було сказано у роботі [2], де обґрунтовувалася необхідність видалення гармонічних трендів для проведення мультифрактального аналізу. Ми встановили, що заміна періодичної функції на неперіодичну (модель 4а) зовсім не впливає на результат. До речі, це пояснює, чому в інших роботах (див., наприклад, [18]) є поради взагалі усувати будь-який тренд з використанням поліноміальної апроксимації.

2. Метод MF DFA демонструє, що мультифрактальний спектр чисто гармонічного сигналу без будь-яких інших домішок (рис. 3) (модель 4 при $t \in [5.8, 9.5]$) сам по собі є досить широким ($\Delta\alpha(t) = 1.00$, $\mu_\alpha \approx 0.5$) і асиметричним ($K_f(t) = 1.9$), до того ж максимум зсунуто ліворуч. Узагальнений показник Херста виявляється екстремально великим ($\alpha^*(t) = 2.15$). Заміна періодичної функції на неперіодичну (модель 4а) призводить фактично лише до зміни напрямку нахилу мультифрактального спектру.

3. У разі наявності в аналізованому сигналі адитивної суміші фрактальної та нефрактальної компонент, негативний вплив нефрактальної компоненти істотно зменшується, особливо коли її амплітуда є меншою порівняно з амплітудою фрактальної компоненти.

4. Найбільшу ширину мультифрактального спектру в методі MF DFA для обох моделей (моделі 4 і 4а) має середня зона ($t \in [4.2, 5.8]$), до того ж ширина зростає по мірі того, як все більша кількість відліків нефрактального сигналу потрапляє до аналізуючого вікна у часовій області.

5. На нашу думку, існуючі поради усувати з аналізованого сигналу всі тренди (як періодичні, так і неперіодичні) є дещо категоричними. Зробити це, дійсно, можна, наприклад, з використанням поліномів або фур'є- чи вейвлет-фільтрації. Різноманітних засобів для цього сьогодні вистачає. Але дослідник має бути впевнений, що усунувши тренд, він не спотворить сам досліджуваний процес. Наведемо відповідний приклад. Розглянемо модель ФНШС сигналу $s_1(t)$, що базується на функції Вейерштраса (будь-яка половина сигналу на рис. 2, а). Її можна апроксимувати, наприклад, чотирипелюстковим нефрактальним НШС сигналом. А після цього видалити такий тренд. Чим буде те, що ми отримаємо у результаті, сказати важко, але точно не ФНШС сигналом. Звідси висновок: відповідальність за те, що у кожному випадку вважати трендом, а що – корисним сигналом, лежить на дослідникові. Тут можуть сказати, що це збільшує суб'єктивність результатів аналізу. Це насправді так. Але фрактальний і мультифрактальний аналізи самі по собі, подібно до будь-якого виду спектрального аналізу, дійсно є суб'єктивними по своїй природі.

Метод коригуючої функції для мультифрактального аналізу

Вище декілька разів зазначалося, що узагальнений показник Херста α^* майже завжди видає явно завищену оцінку для кожного модельного сигналу. Добре відомо [19], що й фактично кожен метод монофрактального аналізу дає зсунуту оцінку фрактальної розмірності D модельного сигналу. Автори у роботі [19] вже запропонували вихід із такого становища, створивши метод коригуючої функції (КФ) для монофрактального аналізу.

Аналогічну ідею можна застосувати й тепер, модифікувавши метод КФ для мультифрактального аналізу. Отже, основна ідея методу КФ для мультифрактального аналізу полягає у зниженні відхилення отримуваної оцінки узагальненого показника Херста від величини показника Гьольдера аналізованого сигналу за рахунок створення спеціальної КФ на основі модельних сигналів із задалегідь відомими значеннями показника Гьольдера.

Зважаючи на обмежений обсяг даної статті, зазначимо, що модифікація методу КФ полягає у формальній заміні у наведених у роботі [19] співвідношеннях оцінки фрактальної розмірності D^* на оцінку узагальненого показника Херста α^* , яку позначатимемо як $\hat{\alpha}$, а відомого істинного значення фрактальної розмірності D модельного сигналу – на значення його показника Гьольдера α .

Отже, в результаті коригування положення максимуму мультифрактального спектра α^* відбувається його паралельний перенос. Тому відповідних змін зазнають α_{\min} , α_{\max} і μ_{α} . Величини ж $\Delta\alpha$ і K_f залишаються незмінними.

Залишається додати, що у наших дослідженнях для побудови програмних реалізацій КФ методів WTMM і MF DFA ми використовували детерміновану модель монофрактального сигналу – модель 1, оскільки вона має найкращу часову стабільність мультифрактальних характеристик із усіх розглянутих нами моделей.

Висновки

1. Запропоновано нові числові характеристики, що є корисними для проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, обґрунтовано доцільність їх створення, продемонстрована корисність та ефективність. До них належать коефіцієнт асиметрії функції мультифрактального спектру, показник відносної ширини мультифрактального спектру та розмірність носія мультифрактала.

2. Із використанням методів WTMM і MF DFA проведено мультифрактальний аналіз набору модельних ФС і МФС. Виявлено особливості мультифрактального аналізу -, мультифрактальних і нефрактальних сигналів і процесів, сформульовано відповідні рекомендації для практиків. Розроблено зручні формати представлення результатів аналізу.

3. Встановлено, що під час переходу МФС до монофрактального режиму функція мультифрактального спектру фізичного фрактала не колапсує у точку, як це має відбуватися у

теорії для математичного фрактала. Ознаками появи такого переходу є зменшення $\Delta\alpha$ і μ_α , а також виконання умови $f_\alpha < 1$. Результати моделювання свідчать, що на практиці режим вже можна вважати монофрактальним, якщо $\Delta\alpha \leq 0.2$ і $\mu_\alpha \leq 0.25$ навіть коли $f_\alpha = 1$.

4. Продемонстровано, що мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів призводить до появи мультифрактальних спектрів із аномальними значеннями мультифрактальних характеристик. По-перше, такі спектри суттєво порушують умови фрактальності ($0 < \alpha^* < 1$) для узагальненого показника Херста, який завжди для них $\alpha^* > 1$. По-друге, вони також виявляються дуже широкими ($\Delta\alpha \geq 1$), а сам нефрактальний сигнал у мультифрактальному спектрі формально поводить себе як монофрактальна складова з $\alpha_0 > 1$.

5. Доведено на практичних прикладах, що існуючі в літературі поради усунути з аналізованого сигналу всі тренди (як періодичні, так і неперіодичні) є дещо категоричними. Дослідник має бути впевнений, що усунувши тренд, він не спотворить сам досліджуваний процес, оскільки тренд може виявитись невід'ємною частиною досліджуваного процесу. Прикладом цього є ФНШС процес. Відповідальність за те, що саме у кожному конкретному випадку вважати трендом, а що – корисним сигналом, лежить на самому дослідникові. Збільшення суб'єктивності результатів аналізу наразі не є загрозою, оскільки фрактальний і мультифрактальний аналізи самі по собі, подібно до будь-якого виду спектрального аналізу, дійсно є суб'єктивними за своєю природою.

6. Встановлено, що оцінки $\hat{\alpha}$ однієї з найважливіших мультифрактальних характеристик – узагальненого показника Херста α^* , що отримуються як методом WTMM, так і методом MF DFA, є завищеними (у діапазоні $\alpha = 0.2 - 0.8$ відхилення $\hat{\alpha}$ від істинного значення α складає $90 \div 5$ %), що негативним чином впливає на результати мультифрактального аналізу реальних сигналів і процесів. Продемонстровано, що функціональна залежність $\hat{\alpha} = F(\alpha)$ є нелінійною для обох аналізованих методів. Більш того, виявлена також залежність величини $\hat{\alpha}$ від кількості точок дискретного вектору даних аналізованого сигналу N , тобто у результаті маємо $\hat{\alpha} = F(\alpha, N)$.

7. Із метою покращення точності оцінки мультифрактальних характеристик створено метод КФ для мультифрактального аналізу. Його застосування дозволило істотно знизити відхилення отримуваної оцінки узагальненого показника Херста від істинної відомої величини показника Гьольдера аналізованого сигналу. Так, за мінімальної дозволеної кількості дискретних відліків даних аналізованого сигналу ($N_{\min} = 32$) у діапазоні $\alpha = 0.2 - 0.8$ відхилення скоригованого значення узагальненого показника Херста від істинного значення α складає лише $8 \div 3$ %, а саме істинне значення α стабільно потрапляє у середину довірчого інтервалу (рівень надійності складає 0.9).

Список літератури:

1. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальная радиопизика. 1. Теоретические основы // Радиопизика и радиоастрономия. 2020. Т. 25, № 1. С. 3 – 77.
2. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. 2002. Vol. 316, No. 1 – 4. P. 87 – 114.
3. Jaffard S. Multifractal Formalism for Functions. Part E Results Valid for All Functions // SIAM J. Math. Anal. 1997. Vol. 28, No. 4. P. 944-970.
4. Arneodo A., Audit B., Kestener P. and Roux S. Multifractal Formalism based on the Continuous Wavelet Transform // Scholarpedia. 2007, Vol. 3, P. 1-20.
5. Arneodo A., Grasseau G., and Holschneider M. Wavelet transform of multifractals // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 2281 – 2284.
6. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press, 1998.
7. Muzy J. F., Bacry E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data // Physical Review Letters. 1991. Vol. 67, No. 25. P. 3515–3518.

8. Arneodo A., Bacry E., and Muzy J. F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // *Physica A*. 1995. Vol. 213. P. 232–275.
- 9 Muzy J.-F., Bacry E., Arnéodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // *Physical Review E*, American Physical Society (APS). 1993. Vol. 47, No. 2. P. 875 – 884.
10. Weiss B., Clemens Z., Bódizs R., Vágó Z., Halász P. Spatio-temporal analysis of non-ofractal and multifractal properties of the human sleep EEG // *Journal of Neuroscience Methods*. 2009. Vol. 185. P. 116–124.
11. Ihlen E. A. F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab // *Frontiers in Physiology*. June 2012, Vol. 3, Article 141.
12. Telesca L., Lapenna V., Macchiato M. Mono- and multi-fractal investigation of scaling properties in temporal patterns of seismic sequences // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004. Vol. 19. P. 1–15.
13. Ge E., Leung Y. Detection of crossover time scales in multifractal detrended fluctuation analysis // *Journal of Geographical Systems*. 2012. Vol. 15, No. 2. P. 115 – 147.
14. Sarlis N. V., Skordas E. S., Mintzels A., Papadopoulou K. A. Micro-scale, mid-scale, and macroscale in global seismicity identified by empirical mode decomposition and their multifractal characteristics // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8. P. 9206.
15. Astanin LY, Kostylev A A. *Ultrawideband Radar Measurements: Analysis and Processing*. London : The Institute of Electrical Engineers, 1997.
16. Feder J. *Fractals*. New York and London : Springer, 1988. 284 p.
17. Turcotte D. L. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 398 p.
18. Jaffard S. Multifractal Formalism for Functions. Part I: Results Valid for All Functions // *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28, No. 4. P. 944-970.
19. Лазоренко О. В., Онищенко А. А., Черногор Л. Ф. Метод коригуючої функції для фрактального аналізу // *Радіотехніка*. 2022. Вип. 210. С. 177 – 187.

Надійшла до редколегії 07.10.2022

Відомості про авторів:

Лазоренко Олег Валерійович – д-р фіз.-мат. наук, доцент, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, завідувач кафедри загальної фізики, Україна; e-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0250-8671>

Онищенко Андрій Анатолійович – Харківський національний університет радіоелектроніки, старший викладач кафедри фізики, Україна; e-mail: andrey.onishchenko@nure.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2118-9119>

Черногор Леонід Феоктистович – д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, завідувач кафедри космічної радіофізики, Україна; e-mail: Leonid.F.Chernogor@karazin.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5777-2392>