

О.В. ЛАЗОРЕНКО, *д-р фіз.-мат. наук*, А.А. ОНИЩЕНКО,
Л. Ф. ЧОРНОГОР, *д-р фіз.-мат. наук*

МЕТОД КОРИГУЮЧОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Вступ

На початку ХХІ сторіччя революційні ідеї фракталізації, створені видатним американським вченим Б. Мандельбротом [1], спричинили появу принципово нового напрямку у сучасній радіофізиці – фрактальної радіофізики [2]. Фрактальний аналіз є одним із ефективних інструментів для дослідження фрактальних властивостей сигналів і процесів різного походження. Одними із основних числових характеристик, що використовуються у численних методах фрактального аналізу, є відповідні фрактальні розмірності [2]. Між тим, відомо, що точність оцінки цих розмірностей у переважній більшості випадків є досить невеликою, що не може задовольняти, у першу чергу, дослідників-практиків. Такими міркуваннями пояснюється актуальність даної роботи.

Метою роботи є створення простого й ефективного методу підвищення точності оцінювання фрактальних розмірностей у методах фрактального аналізу сигналів і процесів.

Модельні фрактальні та мультифрактальні сигнали

Для проведення досліджень, про які йдеться нижче, нами було створено великий набір з двох десятків модельних фрактальних (точніше кажучи, монофрактальних) і мультифрактальних сигналів. Але через обмеженість об'єму статті наведемо тільки три з них: дві моделі для монофрактальних сигналів та одну – для мультифрактальних.

Модель 1. Ця модель є моделлю детермінованого фрактального НШС (ФНШС) сигналу, що базується на узагальненій функції Вейерштраса [3], в якій всі випадкові фази дорівнюють нулю:

$$s_1(t) = \left[1 - b^{2D-4} \right] \frac{\sum_{n=0}^M b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n t)}{1 - b^{(2D-4)(M+1)}},$$

де t – часова змінна, b – параметр масштабування за часом, D – фрактальна розмірність сигналу, $1 < D < 2$, M – кількість гармонік, які використовуються для побудови фізичного фракталу (якщо $M \rightarrow \infty$, то ми отримуємо математичний фрактал).

Модель 2. Дана модель є моделлю косинусної функції Вейерштраса – Мандельброта [4]:

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\lambda^n t)}{\lambda^{(2-D)n}},$$

з фрактальною розмірністю $D = 1.5$, $\lambda > 1$. Вона є строго однорідною, а її графік є самоафінним [5].

Модель 3. Складна модель мультифрактального сигналу, що утворена адитивною сумою двох ФС, які базуються на модельному ФНШС сигналі $s_1(t)$. Перший з них має фрактальну розмірність $D = 1.8$, а його амплітуда зменшується за лінійним законом. Другий має $D = 1.2$, натомість його амплітуда зростає також за лінійним законом. Дана модель є типовою моделлю мультифрактального сигналу, оскільки є мультифрактальною як у глобальному, так і у локальному сенсі.

Метод коригуючої функції

Нехай є конкретний окремий метод монофрактального аналізу, який дозволяє отримати оцінку D^* невідомої фрактальної розмірності D досліджуваного сигналу, що представлено дискретним вектором даних, що містить N відліків. Оцінка D^* є невідомою нелінійною функцією величин D та N , тобто $D^* = f(D, N)$.

Отримаємо значення цієї функції на дискретній сітці: $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Для цього необхідно обрати модельний фрактальний сигнал (ФС), для якого величина його фрактальної розмірності D є заздалегідь відомою та може змінюватись у діапазоні $1 \leq D < 2$. Чим щільнішою є дискретна сітка, тим краще, але збільшення величин n і m обмежується розумним об'ємом вектору даних, що зберігає величини D_{ij}^* , та часом їх обчислення для обраного методу монофрактального аналізу. Кожна величина D_{ij}^* представляється власною інтервальною оцінкою:

$$D_{ij}^* = \overline{D_{ij}^*} \pm \Delta D_{ij}^*, \quad (1)$$

де точкове значення $\overline{D_{ij}^*}$ та похибка ΔD_{ij}^* визначаються конкретним методом монофрактального аналізу.

Отже, функцію на дискретній сітці $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ отримано.

Між тим, основною задачею є отримання оцінки невідомого значення фрактальної розмірності D аналізованого сигналу за відомим значенням D^* при відомому фіксованому значенні кількості відліків $N = N_{sig}$. Іншими словами, за фіксованого значення N_{sig} функція $D^* = f(D, N_{sig})$ як функція однієї змінної на проміжку $1 \leq D < 2$ повинна мати обернену функцію $D = f^{-1}(D^*, N_{sig})$. Відомо, що це відбуватиметься тільки тоді, коли функція $D^* = f(D, N_{sig})$ є монотонною там. У даному випадку функція $D^* = f(D, N_{sig})$ повинна бути зростаючою функцією D на вказаному проміжку.

За порівняно великих значень N_{sig} ніяких проблем з цим не виникає. Але по мірі зменшення N_{sig} для функції $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$ знаходиться таке значення N_{min} , нижче якого ($j = \overline{1, (min-1)}$) указана вище монотонність функції $D^* = f(D, N_{sig})$ вже порушується. Це пояснюється наступними міркуваннями.

Наприклад, модельний ФНШС сигнал $s_1(t)$ з $D = 1.50$ (рис. 1) задано великою кількістю відліків (наприклад, $N = 131072 = 2^{17}$). Зменшувати кількість відліків N можна з використанням двох принципово різних стратегій.

Стратегія 1 («стратегія децимації»). Почнемо зменшувати N на кожному кроці вдвічі, використовуючи операцію децимації початкового сигналу. За використання прийнятної для друкованої продукції роздільної здатності (600 точок на дюйм) до $N = 4096 = 2^{12}$ неозброєним оком ми не побачимо жодних змін.

Але з теорії сигналів відомо, що така операція є еквівалентною пропусканню сигналу через фільтр високих частот. У результаті цього його спектр поступово звужуватиметься, а його фрактальні властивості погіршуватимуться.

Отже, зміни у отримуваній фрактальній розмірності D в такому випадку пояснюються змінами саме спектрального складу початкового сигналу.

Стратегія 2 («стратегія звуження вікна»). Друга стратегія полягає не в децимації початкового сигналу, а у поступовому звуженні (наприклад, вдвічі) прямокутного вікна у часовій області, крізь яке ми дивимось на сигнал. Якщо для першої стратегії після кожного кроку маємо «погіршену» копію початкового сигналу, то для другої стратегії бачимо тільки

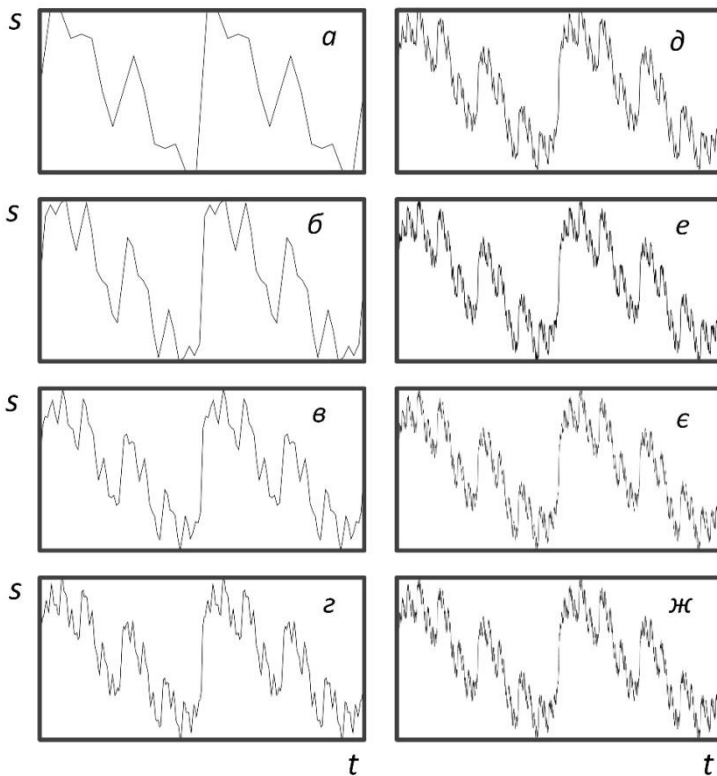


Рис. 1. Модель детермінованого ФНШС сигналу s_t у часовій області для різних з $D = 1.50$ для різних значень кількості відліків N (стратегія 1): а – 32, б – 64, в – 128, г – 256, д – 512, е – 1024, є – 2048, ж – 4096

його окрему частину (рис. 2). Видно, що із зменшенням величини N характер змін досліджуваного сигналу є зовсім іншим. А тому й оцінки фрактальної розмірності такого сигналу будуть мати дещо інші значення, про що йтиметься у цій роботі нижче. До того ж указана вище монотонність функції $D^* = f(D, N_{sig})$ буде порушуватись за інших фіксованих значень N_{sig} , а тому величини N_{min} , отримані для обох стратегій, можуть відрізнитися.

Тепер декілька слів про застосування двох даних стратегій на практиці. Коли нам треба аналізувати довільний сигнал із заданою кількістю його відліків N , то цілком слушним виглядає використання першої стратегії, оскільки ми вважаємо, що перед нами є цілий сигнал, що має певні монофрактальні властивості.

Але коли потрібно будувати фрактограму (так часто називають часову залежність будь-якої фрактальної розмірності $D = D(t)$ [6]), наприклад при застосуванні методів узагальненого фрактального аналізу (УФА) [7] та динамічного фрактального аналізу (ДинФА) [8]), то на досліджуваний сигнал обов'язково накладається ковзаюче у часовій області вікно. Тоді стає у пригоді саме друга стратегія.

Повернемось до величини N_{min} . Її сенс полягає в тому, що вона є мінімальним значенням довжини сигналу, для якого ще можна використовувати даний метод монофрактального аналізу. Цей результат є важливим для практиків, оскільки досі не існувало загального підходу до відповіді на дане запитання. Зауважимо також, що чим щільнішою є дискретна сітка, на якій пораховано функцію $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, тим точнішою є оцінка величини N_{min} .

Далі будуємо власне коригуючу функцію:

$$Cf_{ij} = \frac{D_{ij}^*}{D_i} = \frac{f(D_i, N_j)}{D_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{\min, m}. \quad (2)$$

Зауважимо, що для $j = \overline{1, (\min - 1)}$ робити цього немає сенсу, оскільки там не виконується умова монотонності функції $D^* = f(D, N_{sig})$. Отже, коригуюча функція є функцією двох дискретних змінних Cf_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{\min, m}$.

Далі аналізуємо кількість відліків аналізованого сигналу N_{sig} . Вважаємо, що умова $N_{sig} \geq N_{min}$ вже виконана (інакше всі подальші дії втрачають сенс через принципову неможливість коректного застосування обраного методу фрактального аналізу).

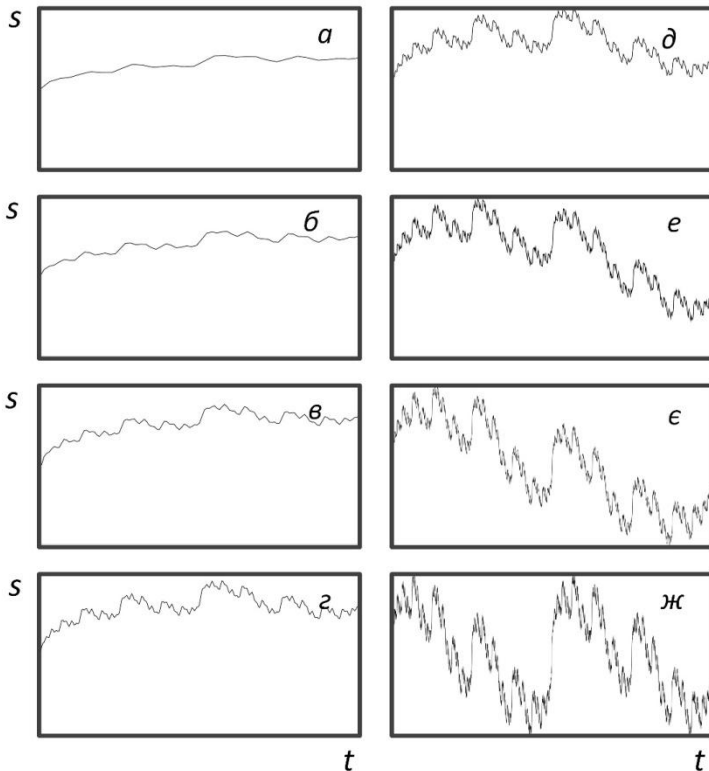


Рис. 2. Модель детермінованого ФНШС сигналу s_l у часовій області для різних $D = 1.50$ для різних значень кількості відліків N (стратегія 2): а – 32, б – 64, в – 128, г – 256, д – 512, е – 1024, є – 2048, ж – 4096

Визначаємо величину l з умови $N_l \leq N_{sig} < N_{l+1}$. Після цього будемо дискретний вектор Cf_i на основі коригуючої функції Cf_{ij} . Для цього, використовуючи лінійну апроксимацію коригуючої функції за змінною N між N_l та N_{l+1} для кожного фіксованого значення $i = \overline{1, n}$, отримуємо:

$$Cf_i = Cf_{il} + (Cf_{i(l+1)} - Cf_{il}) \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l}. \quad (3)$$

Тепер, маючи дискретний вектор Cf_i , можна обчислити відповідні дискретні значення $D_i^* = Cf_i \cdot D_i$, $i = \overline{1, n}$. Далі, вважаючи залежність між D і D^* лінійною на кожному відрізку $D_p \leq D \leq D_{p+1}$, $1 \leq p \leq (n-1)$, можна сконструювати наступну шматково-безперервну функцію $D^* = Cf(D)$, $1 \leq D < 2$:

$$\frac{D^* - D_p^*}{D_{p+1}^* - D_p^*} = \frac{D - D_p}{D_{p+1} - D_p}, \quad 1 \leq p \leq (n-1).$$

Саме ця функція й дозволяє за відомою величиною оцінки фрактальної розмірності D^* , яка обчислюється в обраному методі монофрактального аналізу, отримати величину фрактальної розмірності:

$$D = D_p + \frac{D^* - Cf_p \cdot D_p}{Cf_{p+1} \cdot D_{p+1} - Cf_p \cdot D_p} (D_{p+1} - D_p), \quad (4)$$

де величина p , яка приймає натуральні значення та задовольняє умові $1 \leq p \leq (n-1)$, визначається зі співвідношення

$$Cf_p \cdot D_p \leq D^* \leq Cf_{p+1} \cdot D_{p+1}.$$

Зважаючи на те, що згідно з співвідношенням (1) як обчислювані під час моделювання оцінки величин D_{ij}^* , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, так і отримувані для аналізованого сигналу значення фрактальних розмірностей D^* задано в інтервальній формі

$$D^* = \overline{D^*} \pm \Delta D^*,$$

оцінку фрактальної розмірності D також слід записати в аналогічному вигляді:

$$D = \bar{D} \pm \Delta D, \quad (5)$$

де відповідно до формул (2) – (4) маємо:

$$\bar{D} = D_p + \frac{\bar{D}^* - \overline{Cf}_p \cdot D_p}{\overline{Cf}_{p+1} \cdot D_{p+1} - \overline{Cf}_p \cdot D_p} (D_{p+1} - D_p); \quad (6)$$

$$\overline{Cf}_i = \overline{Cf}_{il} + (\overline{Cf}_{i(l+1)} - \overline{Cf}_{il}) \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l}; \quad (7)$$

$$\overline{Cf}_{ij} = \frac{\bar{D}_{ij}^*}{D_i}; \quad (8)$$

$$\Delta D = (\bar{D} - D_p) \left[\frac{\Delta D^* + \Delta C f_p \cdot D_p}{\bar{D}^* - \overline{Cf}_p \cdot D_p} + \frac{D_{p+1} \cdot \Delta C f_{p+1} + D_p \cdot \Delta C f_p}{\overline{Cf}_{p+1} \cdot D_{p+1} - \overline{Cf}_p \cdot D_p} \right]; \quad (9)$$

$$\Delta C f_i = \Delta C f_{il} + \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l} (\Delta C f_{i(l+1)} + \Delta C f_{il}); \quad (10)$$

$$\Delta C f_{ij} = \frac{\Delta D_{ij}^*}{D_i}. \quad (11)$$

Зауважимо, що оскільки відповідно до формули (3) величини Cf_i залежать від кількості відліків аналізованого сигналу N_{sig} , тобто $Cf_i = Cf_i(N_{sig})$, то й оцінювана фрактальна розмірність D також залежить від N_{sig} . Її ж залежність від конкретного методу монофрактального аналізу міститься в величинах D_{ij}^* , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, що обчислюються з використанням модельних сигналів.

Якщо на практиці для побудови коригуючої функції використовувати тільки детерміновані сигнали, то у найпростішому випадку досить застосування одного модельного ФС. Але у разі використання модельних стохастичних ФС, де фрактальні властивості мають статистичний характер, необхідно обирати досить велику кількість модельних сигналів, а отримані результати усереднювати по ансамблю реалізацій, тобто

$$D_{ij}^* = \langle \bar{D}_{ij}^* \rangle \pm \langle \Delta D_{ij}^* \rangle,$$

де $\langle \rangle$ – операція усереднення по ансамблю модельних стохастичних ФС. Те саме можна зробити й у випадку, коли застосовується цілий набір моделей детермінованих ФС.

Таким чином, метод коригуючої функції (КФ) рекомендовано використовувати для покращення характеристик будь-якого методу монофрактального аналізу, в якому здійснюється оцінка фрактальної розмірності досліджуваного сигналу або процесу.

Практичне застосування методу КФ

Оскільки під час аналізу експериментальних даних у якості методів монофрактального аналізу автори роботи зазвичай використовують методи УФА та ДинФА, а також класичний метод нормованого розмаху [9], то розповімо про застосування методу КФ, у першу чергу, для регуляризаційної D_R [10], кліткової D_B [11], варіаційної D_V [12] та херстової D_H [13] фрактальних розмірностей.

Як було вказано, для кожної з цих розмірностей слід побудувати КФ, використовуючи набір модельних ФС із заздалегідь точно відомими значеннями фрактальної розмірності.

Таблиця 1

Кількість відліків, N	Теоретичне значення фрактальної розмірності D									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.45 ± 0.05	1.47 ± 0.05	1.50 ± 0.05	1.52 ± 0.05	1.54 ± 0.05	1.57 ± 0.06	1.57 ± 0.06	1.58 ± 0.06	1.60 ± 0.06	1.64 ± 0.06
64	1.40 ± 0.03	1.43 ± 0.03	1.46 ± 0.03	1.50 ± 0.03	1.53 ± 0.03	1.56 ± 0.03	1.59 ± 0.03	1.62 ± 0.03	1.64 ± 0.03	1.72 ± 0.02
128	1.35 ± 0.02	1.38 ± 0.02	1.42 ± 0.02	1.46 ± 0.02	1.49 ± 0.02	1.53 ± 0.02	1.56 ± 0.02	1.60 ± 0.02	1.65 ± 0.02	1.78 ± 0.01
256	1.34 ± 0.01	1.38 ± 0.01	1.42 ± 0.01	1.46 ± 0.01	1.50 ± 0.01	1.55 ± 0.01	1.59 ± 0.01	1.64 ± 0.01	1.66 ± 0.01	1.81 ± 0.01
512	1.33 ± 0.01	1.37 ± 0.01	1.42 ± 0.01	1.47 ± 0.01	1.52 ± 0.01	1.58 ± 0.01	1.63 ± 0.01	1.68 ± 0.01	1.71 ± 0.01	1.82 ± 0.01
1024	1.32 ± 0.01	1.37 ± 0.01	1.42 ± 0.01	1.47 ± 0.01	1.53 ± 0.01	1.59 ± 0.01	1.64 ± 0.01	1.70 ± 0.01	1.74 ± 0.01	1.82 ± 0.01
2048	1.315 ± 0.005	1.362 ± 0.005	1.416 ± 0.005	1.473 ± 0.005	1.533 ± 0.005	1.595 ± 0.004	1.655 ± 0.004	1.713 ± 0.004	1.769 ± 0.003	1.861 ± 0.002
4096	1.312 ± 0.004	1.363 ± 0.003	1.419 ± 0.003	1.479 ± 0.003	1.543 ± 0.003	1.607 ± 0.003	1.670 ± 0.003	1.730 ± 0.003	1.782 ± 0.002	1.882 ± 0.002
8192	1.309 ± 0.003	1.362 ± 0.002	1.421 ± 0.002	1.484 ± 0.002	1.551 ± 0.002	1.620 ± 0.002	1.688 ± 0.002	1.753 ± 0.002	1.807 ± 0.002	1.842 ± 0.001
16384	1.307 ± 0.002	1.361 ± 0.002	1.421 ± 0.002	1.486 ± 0.002	1.554 ± 0.002	1.625 ± 0.002	1.694 ± 0.001	1.761 ± 0.001	1.824 ± 0.001	1.857 ± 0.06
32768	1.305 ± 0.001	1.361 ± 0.001	1.422 ± 0.001	1.488 ± 0.001	1.558 ± 0.001	1.629 ± 0.001	1.700 ± 0.001	1.767 ± 0.001	1.831 ± 0.001	1.882 ± 0.000
65536	1.304 ± 0.001	1.360 ± 0.001	1.423 ± 0.001	1.489 ± 0.001	1.561 ± 0.001	1.633 ± 0.001	1.706 ± 0.001	1.775 ± 0.001	1.838 ± 0.001	1.859 ± 0.000
131072	1.303 ± 0.001	1.360 ± 0.001	1.423 ± 0.001	1.490 ± 0.001	1.563 ± 0.001	1.636 ± 0.001	1.710 ± 0.001	1.785 ± 0.001	1.848 ± 0.001	1.881 ± 0.000

У нашому випадку такою зручною моделлю є модель s_1 , що описує ФНШС сигнал. Всі необхідні розрахунки було проведено з використанням FracLab Toolbox (версія 2.2) [14] для системи комп'ютерної математики (СКМ) MATLAB/SciLab, а також оригінального програмного забезпечення, створеного авторами роботи.

Побудова коригуючих функцій для різних фрактальних розмірностей проводилася окремо для кожної з обох стратегій. У якості прикладу тут наводимо оцінки величин херстової розмірності D_H у межах стратегії 1 (див. табл. 1). Сірим кольором у таблиці виділено рядки, де умови монотонності функції $D^* = f(D, N_{sig})$ не виконуються. Варто зазначити, що для стратегії 1 величина N_{min} складає 64 для D_H і D_R , 512 для D_B та 256 для D_V , що вкрай важливо для практиків.

Крім того, слід відзначити загальну тенденцію зменшення величини оцінюваної фрактальної розмірності D^* зі збільшенням N за фіксованого значення D . За тих самих умов також існує тенденція зменшення величини відповідної відносної похибки $\Delta D^* / D^*$.

Слід зазначити, що для стратегії 2 величина N_{min} складає 32 для D_H і D_R , 256 для D_B та 64 для D_V . На відміну від результатів застосування стратегії 1 тут спостерігається тенденція збільшення величини оцінюваної розмірності D^* зі збільшенням N за фіксованого значення D . За тих самих умов також існує тенденція зменшення величини відповідної відносної похибки $\Delta D^* / D^*$.

Грунтуючись на отриманих результатах, для кожної з двох стратегій і кожної з чотирьох фрактальних розмірностей (регуляризаційної D_R , кліткової D_B , варіаційної D_V та херстової D_H), на основі співвідношень (5) – (11) сконструйовано коригуючі функції та створено відповідне програмне забезпечення в середовищі СКМ MATLAB/SciLab. Для програмної реалізації коригуючих функцій використовувалися результати моделювання з кроком 0.01 по величині фрактальної розмірності, що, на нашу думку, є цілком прийнятним для практичних цілей.

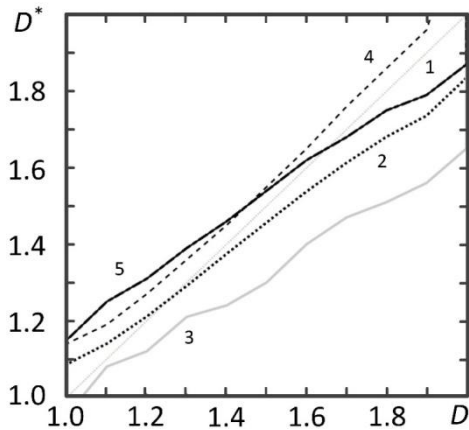


Рис. 3. Залежності $D^* = f(D, N_{sig})$ між оцінюваною D^* та скоригованою методом КФ D фрактальними розмірностями за фіксованого значення кількості точок досліджуваного ФС ($N_{sig} = 1024$) для: 1 – ідеального випадку, 2 – херстової розмірності $D_H^* = f(D_H)$, 3 – кліткової розмірності $D_B^* = f(D_B)$, 4 – регуляризаційної розмірності $D_R^* = f(D_R)$, 5 – варіаційної розмірності $D_V^* = f(D_V)$

Зазначимо, що найгірший результат у сенсі величин N_{min} для обох стратегій показала кліткова розмірність D_B . Це було досить очікувано, оскільки при її обчисленні використовувався метод звичайних кліток – один з найстаріших методів фрактального аналізу. Він має певну ваду, що полягає у так званому ефекті виснаження (див., наприклад, [15]), коли для дуже малих розмірів кліток залежність, що апроксимується лінійною регресією, яка дозволяє отримати величину D_B , починає істотно відрізнятися від лінійної. Останнє призводить до зменшення точності оцінювання D_B . Тому у роботі ми не апроксимуємо останню третину точок, де саме й проявляється цей ефект.

Корисним і цікавим здається також оцінка поведінки залежності $D^* = f(D, N_{sig})$ з використанням методу КФ за фіксованого значення N_{sig} . Результати такої оцінки, отриманої для регуляризаційної D_R , кліткової D_B , варіаційної D_V та херстової D_H фрактальних розмірностей при $N_{sig} = 1024$, наведено на рис. 3. Видно, що на відміну від ідеальної залежності ($D^* = D$ – пряма 1) реальні залежності $D_R^* = f(D_R)$ (крива 4), $D_B^* = f(D_B)$ (крива 3), $D_V^* = f(D_V)$ (крива 5) та $D_H^* = f(D_H)$ (крива 2) є, як і зазначалося вище, нелінійними.

Саме тому на практиці враховувати такі залежності зручно з використанням засобів комп'ютерної техніки, що саме й здійснювалося в даній роботі.

Аналіз модельних сигналів

Гарною ілюстрацією ефективності методу КФ є його застосування у методі ДинФА, коли у якості обчислюваної фрактальної розмірності використовується херстова розмірність D_H . Тут використовуємо ті самі моделі, що й в попередньому пункті. Результати аналізу зручно представляти в наступному форматі, який розглянемо на прикладі моделі 2 (рис. 4, а, е).

У лівому стовпчику під графіком самого сигналу у часовій області (рис. 4, а) розташовано традиційну для методу ДинФА функцію $D_H(t, T)$ (рис. 4, б), обчислювану з використанням методу нормованого розмаху у прямокутному спектральному вікні шириною T , центр якого розташовано на часовій осі в точці з координатою t . Геометричним образом функції $D_H(t, T)$ є поверхня, яку зображено з використанням кольорової схеми, наведеної на рис. 4, б праворуч від графіка цієї функції.

Нижче містяться чотири графіки залежностей $D_H(t, T_1)$ (рис. 4, *е*), $D_H(t, T_2)$ (рис. 4, *д*), $D_H(t, T_3)$ (рис. 4, *з*) та $D_H(t, T_4)$ (рис. 4, *в*) для фіксованих значень ширини вікна $T_1 = 0.004$, $T_2 = 0.833$, $T_3 = 1.667$ і $T_4 = 2.500$, які також позначено стрілками на рис. 4, *б* (ліворуч від

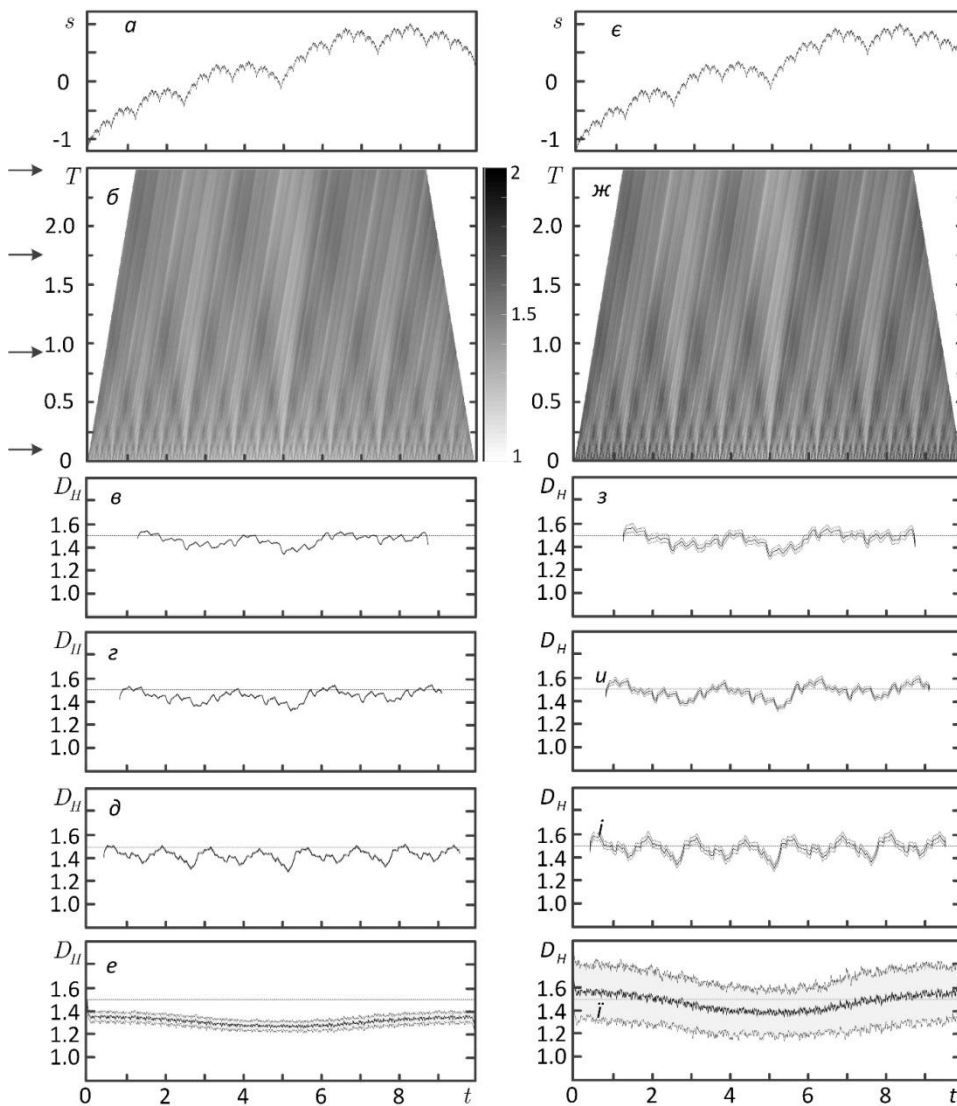


Рис. 4. Результати застосування методу КФ під час аналізу модельного ФС (модель 1) з використанням методу ДинФА: *а, є* – ФС у часовій області, *б* – херстова розмірність $D_H(t, T)$, *в, з, д, е* – херстова розмірність $D_{Hi}(t) \equiv D_H(t, T_i)$ за фіксованих значень T_i (позначено стрілками ліворуч на панелі *б*); *ж, з, и, ї* – те ж саме, але з використанням методу КФ

Сірою заливкою на рис. 4, *в – е, з – ї* показано довірчі інтервали оцінюваних залежностей (рівень надійності 0.9). Зазначимо, що як й очікувалося, похибка оцінювання херстової розмірності ΔD_H зростає із зменшенням ширини вікна T . Розрахунки $D_H(t, T)$ проводилися для величин ширини вікна N від 32 до 2048 відліків, чому відповідає змінна безрозмірної змінної T від $T_1 = 0.004$ до $T_4 = 2.500$.

Проводячи порівняння лівого (нескориговані значення) та правого (скориговані значення) стовпчиків, можна зробити наступні висновки.

Результати застосування методу ДинФА для аналізу моделі 2 (рис. 4, *б – е*) мали певну ваду, яка полягає у тому, що оцінки херстової розмірності виявлялися суттєво заниженими, особливо для найбільш вузьких вікон, чому відповідають малі значення змінної T . Тут же

графіка двовимірної функції $D_H(t, T)$). Для порівняння на рис. 4, *в – е, з – ї* також штрихованою лінією продемонстровано ідеальну часову залежність $D(t)$ фрактальної розмірності модельного ФС.

У правому стовпчику під графіком модельного сигналу у часовій області (рис. 4, *є*) перебуває скоригована з використанням методу КФ функція $D_H(t, T)$ (рис. 4, *ж*). Нижче неї розташовано відповідні скориговані функції $D_H(t, T_1)$ (рис. 4, *и*), $D_H(t, T_2)$ (рис. 4, *і*), $D_H(t, T_3)$ (рис. 4, *у*) та $D_H(t, T_4)$ (рис. 4, *з*), що відповідають тим самим значенням ширини вікна, що й у лівому стовпчику.

маємо можливість пересвідчитись, що використання методу КФ істотно покращує ситуацію. Натомість, певною платою за це є збільшення ширини довірчого інтервалу, що добре помітно на рис. 4, з – і.

Дослідження моделі 3, що є складною моделлю мультифрактального сигналу, здавалось би, виходить за межі тематики даної статті. Натомість це не зовсім так, оскільки на практиці

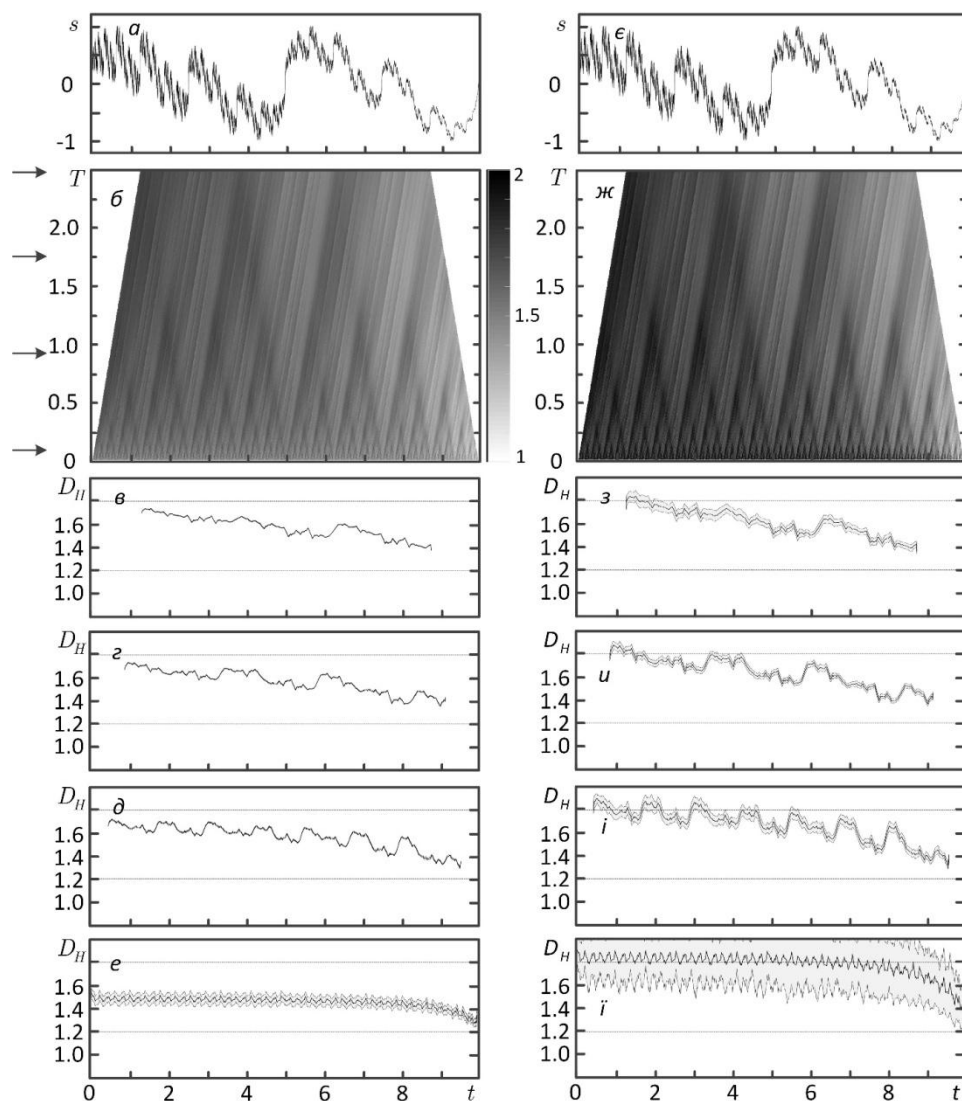


Рис. 5. Результати застосування методу КФ під час аналізу модельного ФС (модель 3) з використанням методу ДинФА: а, є – ФС у часовій області, б – херстова розмірність $D_H(t, T)$, в, г, д, е – херстова розмірність $D_{Hi}(t) \equiv D_H(t, T_i)$ за фіксованих значень T_i (позначено стрілками ліворуч на панелі б); ж, з, і, і – те ж саме з використанням методу КФ. Сірим кольором позначено довірчі інтервали

дослідникові заздалегідь взагалі невідомо, з яким саме (монофрактальним, мультифрактальним або взагалі нефрактальним) сигналом він матиме справу. Як було вже сказано, модель 3 є принципово мультифрактальною як у глобальному, так і у локальному сенсі, оскільки у кожен момент часу в ній присутні одразу дві монофрактальні компоненти з різними фрактальними розмірностями та різними відношеннями амплітуд цих компонент. Оскільки амплітуда компоненти з більшою фрактальною розмірністю ($D = 1.8$) лінійно зменшується, а компоненти з меншою фрактальною розмірністю ($D = 1.2$) лінійно зростає, оцінка їх адитивної суми у часі постійно змінюється. Для звичайного методу ДинФА (рис. 5, в – е) можна побачити, що із зменшенням ширини вікна ця оцінка стає все більш неточною. Особливо це помітно на рис. 5, е. Натомість застосування методу КФ (рис. 5, з – і) істотно покращує ситуацію.

Із аналізу результатів моделі 3 також можна побачити, що найгірші результати спостерігаються при малих значеннях фрактальної розмірності D . Але останній результат не є вадю методу КФ. Слід зазначити, що коли фрактальна розмірність D наближається до 1, сам ФС потроху втрачає фрактальні властивості та при $D = 1$ вироджується у гладку криву. Саме в цих умовах метод нормованого розмаху (див., наприклад, [16 – 20]), на якому ґрунтується обчислення херстової розмірності, дійсно показує найгірші результати. Для інших фракталь-

них розмірностей, які ми оцінювали у наших дослідженнях (регуляризаційної D_R , кліткової D_B , варіаційної D_V) при малих D , результати методу КФ виглядали значно кращими.

Висновки

1. Створено метод КФ, який дозволяє компенсувати завжди існуючу нелінійність залежності між істинним значенням фрактальної розмірності та її оцінкою, здійсненою з використанням обраного методу монофрактального аналізу сигналів і процесів за відомої кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного сигналу. Ідея методу полягає у побудові та застосуванні спеціальної КФ з використанням набору модельних ФС із заздалегідь відомими значеннями фрактальної розмірності.

2. У рамках двох різних стратегій зменшення кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного модельного сигналу із використанням КФ для кліткової D_B , варіаційної D_V , регуляризаційної D_R та херстової D_H фрактальних розмірностей знайдено мінімальну кількість відліків N_{\min} , за якої ще можна оцінювати відповідні розмірності. Встановлено, що N_{\min} дорівнює 64 для D_H і D_R , 512 – для D_B та 256 – для D_V у рамках «стратегії децимації» та 32 – для D_H і D_R , 256 – для D_B та 64 – для D_V у рамках «стратегії звуження вікна».

3. За умов використання мінімально дозволеної кількості відліків N_{\min} завдяки застосуванню методу КФ максимальне відхилення оцінюваної фрактальної розмірності від істинного відомого значення, яке дорівнювало: 1) у рамках «стратегії децимації» для D_B – 23 %, для D_R – 32 %, для D_V – 56 %, для D_H – 27 %; 2) у рамках «стратегії звуження вікна» для D_B – 23 %, для D_R – 21 %, для D_V – 12 %, для D_H – 31 %, тепер не перевищує 5–7 %, а самі істинні значення даних фрактальних розмірностей впевнено потрапляють до довірчого інтервалу отриманої оцінки, побудованого для рівня надійності 0.9.

Список літератури:

1. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. New York : W. H. Freeman and Company, 1982. 468 p.
2. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальная радиофизика. 1. Теоретические основы // Радиофизика и радиоастрономия. 2020. Т. 25, № 1. С. 3 – 77.
3. West B. J., Bologna M., Grigolini P. Physics of Fractal Operators. New York : Springer-Verlag, 2003. 349 p.,
4. Feder J. Fractals. New York and London : Springer, 1988. 284 p.
5. Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K. J., Kannan V., and Vinod Kumar P. B., eds. Fractals, Wavelets, and their Applications // Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 508 p.
6. Raghavendra B. S, Narayana Dutt D. Computing fractal dimension of signals using multiresolution box-counting method // J. Inf. Math. Sci. 2010. Vol. 6, No. 1. P. 50 – 65.
7. Chemogor L. F., Lazorenko O. V. and Onishchenko A. A. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process // Proc. 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, September 4-7, 2018, Odessa, Ukraine. Odessa, 2018. P. 34 – 39.
8. Onishchenko A., Chemogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid. Eskiehir Technical Univ // J. of Sei. and Tech. A -Appl. Sei. and Eng. 2019. Vol. 20. P. 188 – 192.
9. Hardy H. H., Beier R. A. Fractals in Reservoir Engineering. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong : World Scientific, 1994. 359 p.
10. Roueff F., Levy-Vehel J. A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation. M. M. Novak // Fractals 98, Oct 1998, Valleta, Malta. World Scientific, 1998.
11. Feldman D. P. Chaos and Fractals. An Elementary Introduction. Oxford : Oxford University Press, 2012. 408 p.
12. Prigarin S. M., Hahn K., Winkler G. Variational dimension of random sequences and its application // Numerical Analysis and Applications. 2009. Vol. 2, No. 4. P. 352 – 363.
13. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco : W. H. Freeman and Company, 1977. 468 p.
14. Legrand P. & Levy-Vehel, J. Signal and image processing with FRACLAB. FRACTAL04 // Complexity and Fractals in Nature, 8th International Multidisciplinary Conference, 2004.
15. Tong H. Dimension Estimation and Models. New Jersey : World Scientific, 1993. 223 p.

16. Levy-Vehel J., Lutton E. Fractals in Engineering. New Trends in Theory and Applications. New York : Springer-Verlag, 2005. 289 p.
17. Turcotte D. L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. 398 p.
18. Seuront L. Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science. Boca Raton : CRC Press, 2010. 344 p.
19. Alessio E., Carbone A., Castelli G., Frappietro V. Second-order moving average and scaling of stochastic time series // The European Physical Journal B – Condensed Matter. 2002. Vol. 27, No. (2). P. 197 – 200.
20. Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W. Estimators for Long-Range Dependence: An Empirical Study // Fractals. 1995. Vol. 03, No. 04. P. 785 – 798.

Надійшла до редколегії 07.09.2022

Відомості про авторів:

Лазоренко Олег Валерійович – д-р фіз.-мат. наук, доцент, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, завідувач кафедри загальної фізики, Україна; e-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0250-8671>

Онищенко Андрій Анатолійович – Харківський національний університет радіоелектроніки, старший викладач кафедри фізики, Україна; e-mail: andrey.onishchenko@nure.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2118-9119>

Чорногор Леонід Феоктистович – д-р фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, завідувач кафедри космічної радіофізики, Україна; e-mail: Leonid.F.Chernogor@karazin.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5777-2392>