

**МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ІНТЕНСИВНОСТІ  
ЕЛЕКТРОСТИМУЛЯЦІЇ ВІД ЧАСТОТИ СЛІДУВАННЯ СТИМУЛІВ**

**Вступ**

Електростимуляція полягає у такому впливі імпульсного електричного струму з певним набором параметрів на тіло пацієнта, при якому виникають необхідні позитивні терапевтичні ефекти. Особливо поширена електростимуляція скелетних м'язів. Вона є ефективним методом реабілітації при різних травмах та порушеннях, а також допоміжним способом під час підготовки спортсменів. Існуючі апарати, як правило, мають ряд стандартних режимів, можливості точної підстройки параметрів стимулів обмежені. Це не дозволяє достатньо врахувати індивідуальні особливості пацієнта. У той же час дуже багато залежить від обраного м'яза, його властивостей, віку, статі пацієнта і т.п. Тому досить актуально визначати апріорно деякі параметри стимулів струму, зокрема його частоту.

**Сутність дослідження**

Розглянемо особливості м'язових скорочень та вплив на них частоти сигналу. Розрізняють поодинокі та тетанічні скорочення. Поодинокі скорочення можна викликати за допомогою короткого прямокутного імпульсу напруги (тривалістю близько 1 мс) [1 – 3]. Викликане цим стимулом скорочення утворюється не відразу, а з деякою часовою затримкою близько 10 мс. Далі відбувається скорочення протягом 30 – 50 мс та розслаблення тривалістю приблизно 50 – 60 мс. Т.ч. одиночне скорочення відбувається загалом за 100 мс (рис. 1). Цей проміжок часу різний для різних м'язів і багато в чому залежить від їх стану [4 – 7].

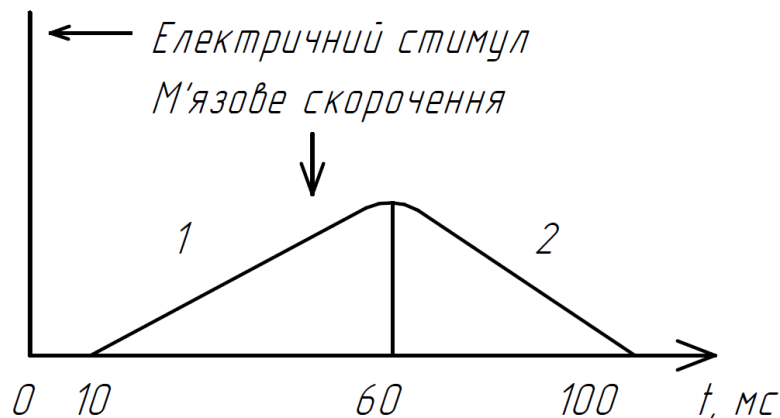


Рис. 1. Одиночне м'язове скорочення: 1 – фаза укорочення; 2 – фаза розслаблення

Тривалість деполяризації потенціалу дії м'язового волокна дорівнює 3 – 5 мс, після чого мембрана відновлює здатність збудження. Час скорочення становить близько 50 мс, тому ще під час скорочення волокно може відповідати на нові стимули. Таке накладання скорочень називається тетанічним (тетанус) [8 – 10]. Воно має місце як в окремому м'язовому волокні, так і м'язі в цілому. Амплітуда тетануса значно більша за амплітуду одиночного скорочення, тому що періодична стимуляція викликає додаткове скорочення, яке підсумовується з попереднім.

Тетанус може бути зубчастим та гладким. Зубчастий тетанус виникає тоді, коли частота стимулів така, що кожен подальший стимул подається після скорочення (фаза укорочення 1), але до тих пір, поки розслаблення ще не закінчилося. Гладкий тетанус з'являється при більшій частоті стимулів, коли частота стимулів така, що кожен наступний стимул подається під час фази укорочення, до початку розслаблення. Так, для розглянутого на рис. 1 випадку зубчастий тетанус спостерігається на частотах 10 – 20 Гц, гладкий – на частотах вище 20 Гц.

Щодо амплітуди скорочень можна сказати таке. Вона мінімальна при одиночному скороченні, збільшується при зубчастому тетанусі та максимальна при гладкому. Однак збільшення амплітуди та сили скорочення з подальшим зростанням частоти зупиняється і збільшення частоти призводить до зменшення амплітуди скорочень. Це називається песимумом реакції у відповідь. Тобто, існує деяка оптимальна частота стимуляції м'яза. Частоти більше оптимальної є песимальними [11 – 13].

Таким чином, оптимум – це гладкий тетанус з максимальною амплітудою при оптимальній частоті подразнення, коли кожен імпульс у послідовності діє на м'яз у фазу екзальтації, коли умови для збудження та підсумовування одиночних скорочень найкращі. Песимум теж гладкий тетанус, але з мінімальною амплітудою при песимальній частоті подразнення, коли кожен імпульс у серії діє на м'яз у фазу відносної рефрактерності, коли умови для збудження та підсумовування одиночних скорочень найгірше. На рис. 2 зображено залежності сили скорочення деякого м'яза від частоти проходження електричних стимулів.

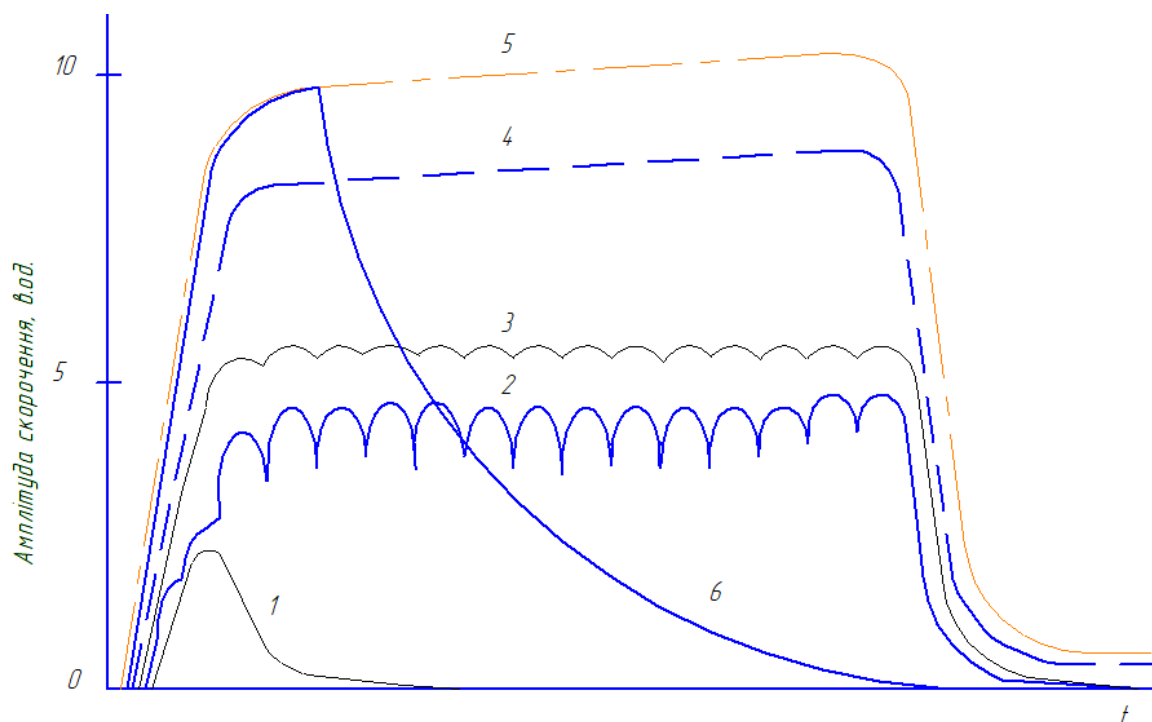


Рис. 2. Залежність сили скорочення м'язів від частоти стимулів:  
 1 – одиночне скорочення; 2,3 – зубчастий тетанус (частоти стимуляції 12 та 20 Гц відповідно);  
 4,5 – гладкий тетанус (частоти стимуляції 30 та 50 Гц відповідно); 5 – оптимум;  
 6 – песимум (частота стимуляції 100 Гц)

У людському організмі частота та режим посилення моторними нейронами нервових імпульсів до м'яза забезпечують асинхронне залучення у процес скорочення більшої чи меншої кількості рухових одиниць та підсумовування їх окремих скорочень.

З урахуванням відомих даних та узагальнюючи все сказане вище, можна отримати наступну якісну безперервну залежність амплітуди скорочення м'яза від частоти стимулюючого сигналу, що представлена на рис. 3.

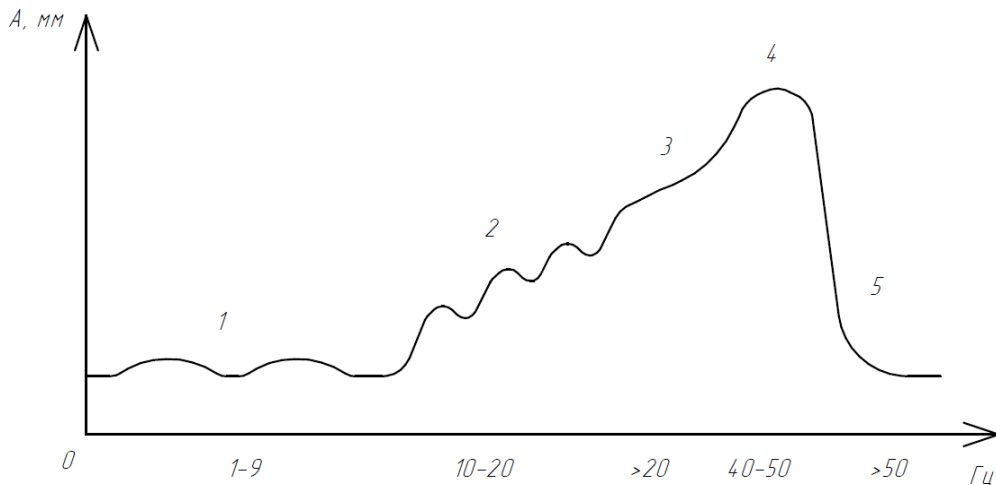


Рис. 3. Якісна безперервна залежність амплітуди скорочення м'яза від частоти стимулюючого сигналу

Видно, що зі збільшенням частоти стимулів спочатку виникають поодинокі м'язові скорочення (1), потім зубчастий тетанус (2), гладкий тетанус (3) і, нарешті, оптимум (4) і песимум (5).

У зв'язку з цим виявляється актуальною задача моделювання цих процесів з метою отримання аналітичного виразу, який дозволить апріорно знайти оптимальну частоту стимуляції. Для цього доцільно використовувати підхід типу «чорної скриньки», згідно з яким розглядається тільки взаємозв'язок між вхідними та вихідними змінними, не вдаючись у деталі фізіологічних процесів, що відбуваються в рухових одиницях і всього м'яза в цілому.

На початковому етапі моделювання виконується структурна ідентифікація моделі. Вона полягає у виборі відповідного аналітичного опису.

Таким чином, необхідно отримати деякий аналітичний опис, що встановлює зв'язок між вхідними та вихідними змінними. Позначимо частоту стимулів через  $f$  (тоді циклічна частота  $\omega = 2\pi f$ ), амплітуду скорочення через  $A$  (у відносних одиницях). Слід знайти певну залежність  $A=F(\omega)$ , таку, щоб при  $A$  і  $\omega \geq 0$  вона в діапазоні значень  $\omega \geq 0$  і  $\omega < 300$  якісно описувала криву на рис. 3, а сама функція  $F$  належала до класу  $r$ -гладких функцій з порядком гладкості  $r \geq 1$ , принаймні щоб  $F \in C^1(\omega)$ .

Тому що на рис. 3 виділено 5 різних областей, очевидно, що функція  $A=F(\omega)$  може бути представлена як суперпозиція  $F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega) + F_4(\omega) + F_5(\omega)$ , де  $F_i(\omega)$  – деякі безперервні функції частоти.

Використаємо одиничну ступінчасту функцію (функцію Хевісайда), зміщену праворуч по осі часу, яка записується у вигляді

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, t \geq \tau, \\ 0, t < \tau. \end{cases} \quad (1)$$

Функція  $1(t - \tau)$  має властивість відсічення, тому множення будь-якої функції  $f(t)$  на функцію  $1(t - \tau)$  звертає функцію  $f(t)$  в нуль при  $t < \tau$ , і залишає незмінним значення при  $t \geq \tau$ .

Шляхом додавань 2-х ступінчастих функцій можна отримати вираз для одиничного прямокутного вікна тривалістю  $\tau_n$ :

$$1(\tau_n) = 1(t - \tau_1) - 1(t - \tau_2), \quad (2)$$

де  $\tau_1, \tau_2$  – зрушення по осі часу, що відповідають початку та кінцю одиничного імпульсу.

Таким чином, якщо використовувати дуальне перетворення частоти в час можна отримати наступний опис функції  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = \sum_{i=1}^5 F_i(\omega) \cdot 1(\tau_{ni}), \quad (3)$$

де  $1(\tau_{ni})$  – поодинокі прямокутні функції, відповідні межах ділянок 1 – 5 на осі часу, які отримано дуальним перетворенням осі частот.

Оскільки практичний інтерес становлять лише ділянки 3 та 4, тому що саме вони дозволяють отримати оптимальне значення частоти стимуляції, обмежимося ділянками 3 і 4. Тоді вираз для  $F(\omega)$  набуває вигляду

$$F_0(\omega) = F(\omega) \cdot 1(\tau_0), \quad (4)$$

де  $F_0(\omega)$  – фрагмент вихідної функції, що підлягає моделюванню,  $1(\tau_0)$  – одиничне прямокутне вікно, межі якого відповідають діапазону частот від 20 до 60 Гц.

Використовуючи апроксимацію функції Хевісайду у вигляді безперервної функції

$$1(t) \approx \frac{1}{2}(1 + \text{th}(kt)) = \frac{1}{1 + e^{-2kt}}, \quad (5)$$

де чим більше  $k$ , тим крутіше підйом функції, отримуємо вираз

$$F_0(\omega) = F(\omega) \cdot \frac{1}{2}(1 + \text{th}(k \tau_0)). \quad (6)$$

Оскільки функція, яка моделюється,  $F(\omega)$  задана тільки на дискретній множині  $(m+1)$  точок  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , то необхідно мінімізувати зважену середню квадратичну помилку виду

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^m r_k [F_M(\omega_k) - F(\omega_k)]^2, \quad (7)$$

де  $r_k > 0$  – деякі апріорі задані ваги;  $F_M(\omega_k)$  – значення, які розраховано за моделлю;  $\omega_k$  – дискретний набір значень частоти.

Як показали дослідження, у даному випадку можна ефективно використовувати поліноміальні функції виду

$$\varphi(\omega) = a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + a_1 \omega + a_0, \quad (8)$$

де  $a_i$  – деякі коефіцієнти;  $n$  – ступінь полінома. Тоді завдання зводиться до визначення необхідного ступеня  $n$  та визначення значень  $a_i$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ).

Враховуючи гладкий характер залежності, що моделюється, було випробувано поліноми ступеня від 3 до 5 [14] (рис. 4). Остаточний вибір було зроблено за поліномом ступеня  $n = 4$ , який найбільш точно і просто відображає криву електростимуляції (крива 4) і має похідну третього ступеню, що важливо для подальших теоретичних розрахунків.

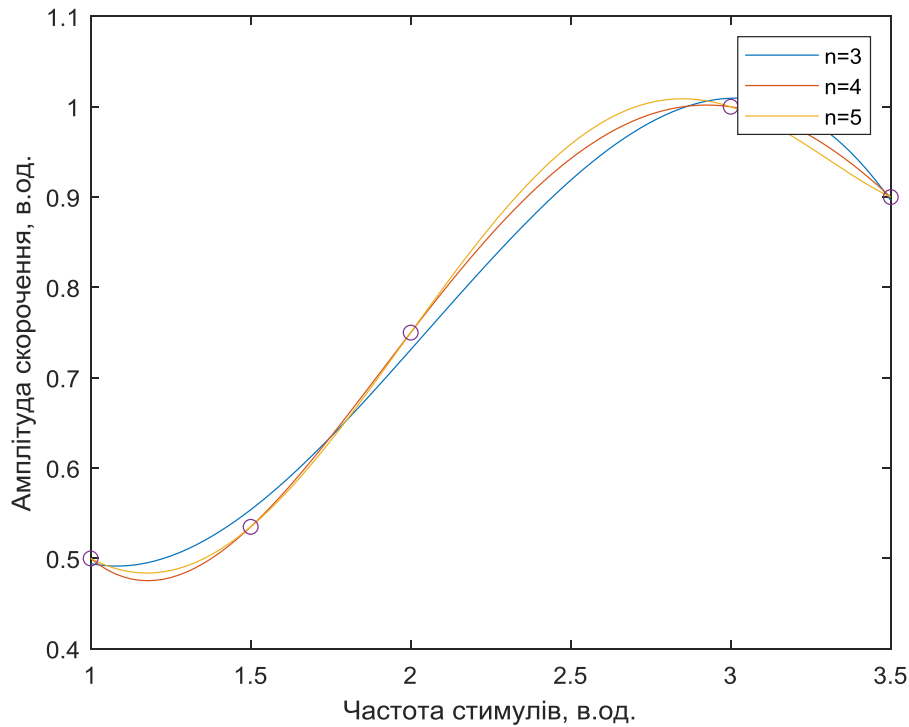


Рис. 4. Визначення оптимального ступеня полінома

Для визначення невідомих коефіцієнтів  $a_0, \dots, a_4$  реалізовано процедуру параметричної оптимізації за критерієм мінімальності функції помилки  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=0}^m [F(\omega_k) - \varphi(\omega_k)]^2} \quad (9)$$

у просторі параметрів, що варіюються,  $a_i (i = \overline{0, n})$ . Розмірність простору таких параметрів дорівнює 5.

Для знаходження екстремуму цільової функції було використано метод випадкових напрямів. Відповідно до нього з деякої точки  $x^k$  простору параметрів, що варіюються, відбувається перехід у наступну точку  $x^{k+1}$  з кроком  $a_k > 0$  по випадковому напрямку  $S^k = [S_1^k, S_2^k, S_3^k, S_4^k, S_5^k]^T$ , компонентами якого є  $S_i^k$ , випадково розподілені на інтервалі  $[-1, 1]$ :

$$x^{k+1} = x^k + a_k S^k. \quad (10)$$

Критерієм зупинки процесу було виконання умови

$$\frac{|x^{k+1} - x^k|}{|x^k|} < \epsilon, \quad (11)$$

де  $\epsilon$  – вектор, компоненти якого є граничні рівні помилки кожного параметра, що варіюються.

В результаті було отримано такий аналітичний вираз для апроксимуючої функції  $F_M$ :

$$F_M(\omega) = a_4 \omega^4 + a_3 \omega^3 + a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0, \quad (12)$$

де  $\omega$  – значення поточної частоти стимулів;  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  – вектор параметрів моделі.

Для визначення оптимальної частоти стимулюючого впливу знайдемо першу похідну від функції:

$$F'_M(\omega) = a_1 + 2a_2\omega + 3a_3\omega^2 + 4a_4\omega^3. \quad (13)$$

Відомо, що певна точка  $\omega^*$  є точкою екстремуму функції  $F_M(\omega)$ , якщо у цій точці похідна дорівнює нулю, або немає. Тому прирівнюємо  $F'_M(\omega)$  нулю, отримуємо рівняння третього ступеня:

$$a_1 + 2a_2\omega + 3a_3\omega^2 + 4a_4\omega^3 = 0 \quad (14)$$

і розв'язуємо його щодо  $\omega$ , щоб знайти значення оптимальної частоти слідування стимулів.

Перепишемо рівняння (14) у вигляді

$$\omega^3 + c\omega^2 + d\omega + e = 0, \quad (15)$$

$$\text{де } c = \frac{3a_3}{4a_4}; \quad d = \frac{a_2}{2a_4}; \quad e = \frac{a_1}{4a_4}.$$

Підстановка  $\omega = y - \frac{c}{3}$  призводить до «неповного» кубічного рівняння

$$y^3 + py + q = 0, \quad (16)$$

$$\text{де } p = -\frac{c^2}{3} + d, \quad q = 2\left(\frac{c}{3}\right)^3 - \frac{cd}{3} + e.$$

Його рішення знаходяться як

$$\begin{aligned} y_1 &= A + B, \\ y_{2,3} &= -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{де } A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^3.$$

У якості  $A$  і  $B$  беруться будь-які значення кубічного коріння з відповідних комплексних чисел, що задовольняють співвідношенню  $AB = -p/3$ . Якщо рівняння (15) дійсне, то (у тих випадках, коли це можливо) слід брати дійсні значення цього коріння. Якщо кубичне рівняння (15) дійсно, то воно має або один дійсний корінь і два сполучені комплексні корені, або три дійсні корені, принаймні, два з яких рівні, або три різні дійсні корені залежно від того, чи буде  $Q$  відповідно позитивно, дорівнює нулю або негативно [15].

### Результати досліджень

Для знайденого оптимального значення ступеня апроксимуючого полінома  $n = 4$  визначено коефіцієнти полінома  $a = (1,915 \ -3,020 \ 2,075 \ -0,510 \ 0,040)$ . Виходячи з цього побудовано модельну траєкторію (рис. 5), яка адекватна експериментальній кривій електростимуляції на ділянках 3, 4 і 5 (рис. 3). Оцінено точність моделі за допомогою модуля максимального відхилення  $\varepsilon = \max|y_i - y_{Mi}|$ , де  $y_{Mi}$  – значення відгуку, розраховані за допомогою моделі, а  $y_i$  – експериментально одержані дані. Похибка не перевищує 5%. Розв'язок рівняння (13) із знайденими коефіцієнтами  $a_1 - a_4$  дає значення оптимальної частоти стимулюючих сигналів у відносних одиницях  $\approx 2,973$ , що відповідає реальній частоті  $f^* \approx 59,46$  Гц і збігається з експериментальними даними (60 Гц).

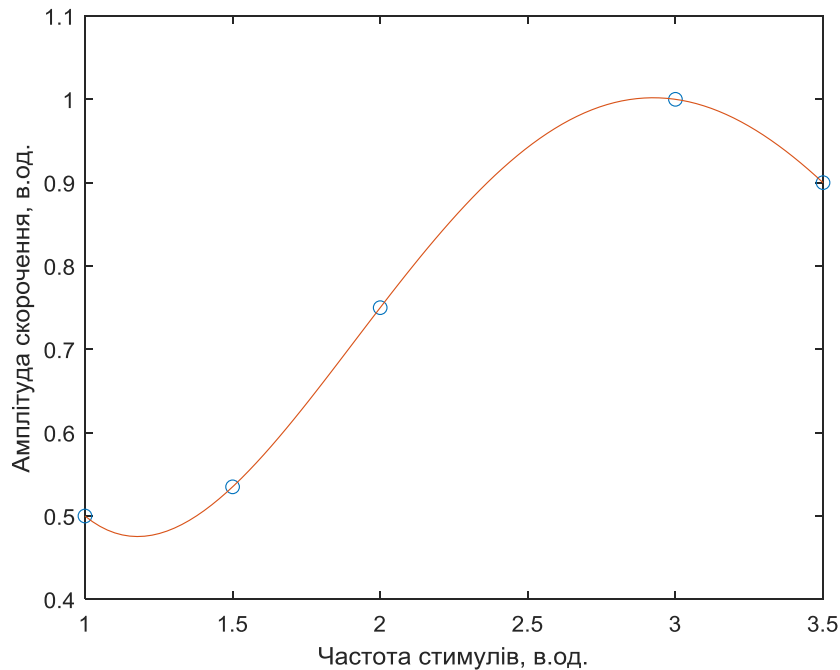


Рис. 5. Модельна траєкторія об'єкту

Перевага такого моделювання полягає також у можливості використовувати дану модель з екстраполяцією результатів, причому така екстраполяція відбувається в ході багаторазових послідовних процедур. За результатами попередньої стимуляції прогнозується подальша поведінка так, щоб оперативно вийти на індивідуальну оптимальну частоту стимуляції. Однак слід враховувати, що при цьому також можлива зміна форми електростимуляційної характеристики – затягування крутості фронтів, зміна значення амплітуди та ін. Тоді слід коригувати модель: у найпростішому випадку визначати нові значення параметрів, більш складному – використовувати структурну ідентифікацію, яка може полягати у зміні ступеня багаточлена або виборі іншої апроксимуючої функції з подальшою ідентифікацією параметрів.

## Висновки

Запропоновано аналітичну модель електроміостимуляційної характеристики, яка пов'язує амплітуду скорочення м'язів з частотою стимулів. Модель отримано шляхом апроксимації експериментальної залежності поліномом четвертого ступеня. Знайдено оптимальні значення коефіцієнтів полінома, що забезпечують мінімум помилки моделювання. На цій основі отримано аналітичний вираз для розрахунку оптимальної частоти електричних стимулів. Побудовано модельну траєкторію, порівняння якої з експериментальною кривою електроміостимуляції дозволяє оцінити точність моделі на рівні 95 %. Теоретично знайдено значення оптимальної частоти стимуляції, що збігається з експериментальними даними. Отримані результати можуть бути використані для вибору оптимальних індивідуальних параметрів електростимуляції протягом ряду сеансів реабілітації. Похибка знаходиться в допустимих для практики межах, що дозволяє використовувати таку модель у ході інженерної діяльності при побудові пристроїв адаптивної електростимуляції.

## Список літератури:

1. Himori K., Tatebayashi D., Kanzaki K., Wada M., Westerblad H., Lanner J. T. Neuromuscular electrical stimulation prevents skeletal muscle dysfunction in adjuvant-induced arthritis rat // PLoS ONE. 2017. № 12 (6).
2. Шайдук А. М., Останин С. А. Структура спектра электромиосигнала при хаотическом следовании отдельных импульсов // Известия Алтайского государственного университета. 2011. № 69. С. 181-185.

3. Пестриков П. П., Пестрикова Т. В. Измерительная система для регистрации сигналов поверхностной электромиографии мышц предплечья // Электронное научное издание "Ученые заметки ТОГУ". 2019. № 2 (10). С. 173–180.
4. Сафин Д. Р., Пильщиков И. С., Ураксеев М. А., Гусев В. Г. Оценка эффективности различных конструкций электродов и усилителей биосигналов в системах управления протезами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2009. № 2(10). С. 88–101.
5. Шайдук А. М., Останин С. А., Юсупов Е. Р. Экспериментальное обнаружение средней частоты следования миоимпульсов по поверхностной электромиограмме // Журнал радиоэлектроники. 2011. № 9. С. 1–8.
6. Дацок О. М., Прасол І. В., Єрошенко О. А. Побудова біотехнічної системи м'язової електростимуляції // Вісник НТУ "ХП". Серія: Інформатика та моделювання. 2019. № 13 (1338). С. 165–175. doi: <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2019.13.15>
7. Yeroshenko O., Prasol I., Datsok O. Simulation of an electromyographic signal converter for adaptive electrical stimulation tasks // Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries. 2021. № 1 (15). P. 113–119. doi: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.113>
8. Griffin L., Decker M. J., Hwang J. Y., Wang B., Kitchen K., Ding Z. Functional electrical stimulation cycling improves body composition, metabolic and neural factors in persons with spinal cord injury // Electromyogr Kinesiol. 2009. № 19(4). P. 614–622.
9. Bersch I., Tesini S., Bersch U., Frotzler A. Functional electrical stimulation in spinal cord injury: clinical evidence versus daily practice // Artif Organs. 2015. № 39(10). P. 849–854.
10. Yeroshenko O., Prasol I. Simulation of the electrical signal of the muscles to obtain the electromyogram spectrum // Technology Audit and Production Reserves. 2022. № 2 (2(64)). P. 16–21. doi: <http://doi.org/10.15587/2706-5448.2022.254566>
11. Seibt R. Messung muskulärer Ermüdung mittels OEMG bei variierender Kraftanforderung – eine Weiterentwicklung des JASA-Verfahrens // Zbl Arbeitsmed. 2013. № 63. P. 270–275. doi: <https://doi.org/10.1007/BF03350866>
12. Bersch I., Friden J. Electrical stimulation alters muscle morphological properties in denervated upper limb muscles // EBioMedicine. 2021. № 74. P. 1397–1407. doi: <http://doi.org/10.1016/j.ebiom.2021.103737>
13. Potočník B., Holobar A. A new optical flow model for motor unit conduction velocity estimation in multichannel surface EMG // Computers in Biology and Medicine. 2017. № 83. P. 59–68. doi: <http://doi.org/10.1016/j.combiomed.2017.02.006>
14. Єрошенко О. А., Прасол І. В. Побудова поліноміальної математическої моделі електростимуляції // Інформаційні системи та технології в медицині: III Міжнародна науково-практична конференція: зб. наук. пр. Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. С. Жуковського «Харків. авіац. ін-т». 2021. С. 80–81.
15. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. Москва : Наука, 2003. 832 с.

*Надійшла до редколегії 22.04.2022*

*Відомості про авторів:*

**Прасол Ігор Вікторович** – д-р техн. наук, доцент, Харківський національний університет радіоелектроніки, професор кафедри біомедичної інженерії; Україна; email: [igor.prasol@nure.ua](mailto:igor.prasol@nure.ua); ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2537-7376>.

**Єрошенко Ольга Артурівна** – аспірант кафедри біомедичної інженерії, Харківський національний університет радіоелектроніки, асистент кафедри електронних обчислювальних машин; Україна; email: [olha.yeroshenko@nure.ua](mailto:olha.yeroshenko@nure.ua); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6221-7158>.