

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КОАКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОГО МАГНИТО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАПОЛНЕНИЯ

Ю. Г. Костычев, А. Ф. Зоркин

Харьков

В настоящее время в технике СВЧ сантиметрового и дециметрового диапазона широко применяются конструкции на полосковых линиях передачи, одной из разновидностей которых является прямоугольный коаксиальный волновод. В частности, при конструировании ферритовых устройств типа фазовращателей определяющее значение имеют сведения о влиянии диэлектрического заполнения на дисперсионные свойства этой системы. Знание последних позволяет приближенно рассчитать фазовращатели путем введения эквивалентной магнитной проницаемости феррита [1]. В настоящей работе рассматривается симметрично заполненный диэлектриком (рис. 1) прямоугольный коаксиальный волновод.

## Постановка задачи

Рассматриваемая электродинамическая система, ее основные размеры и характер неоднородности среды изображены на рис. 1. Металлическая оболочка считается идеально проводящей. Для решения задачи сложное поперечное сечение разбивается на четыре области ( $i = 1; 1'; 2; 2'$ ) линиями  $y = y_{qi}$  ( $j = 1; 1'; q = 2; 2'$ ). В силу симметрии системы можно ввести внутренние условия на осях  $y = 0$  и  $x = 0$ . В качестве последних берутся условия электрической и магнитной стенки. Поле в каждой частичной области, соответствующее некоторому типу волны, представим как сумму ТМ- и ТЕ-решений однородных уравнений Максвелла, каждую из которых соответствует свой потенциал Герца  $\Pi_e^{(i)}$  и  $\Pi_h^{(i)}$  в каждой частичной области:

$$\begin{aligned} \Pi_e^{(i)} &= \sum_m A_{em}^{(i)} \sin x_m^{(i)} (y - y_i) \sin \gamma_m^{(i)} (x - x_i) e^{i\Gamma z}; \\ \Pi_h^{(i)} &= \sum_m A_{hm}^{(i)} \cos x_m^{(i)} (y - y_i) \cos \gamma_m^{(i)} (x - x_i) e^{i\Gamma z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$y_1 = -d; \quad y_1 = d; \quad y_2 = \frac{\delta\pi}{2x_m^{(2)}}; \quad \delta = 1 \text{ или } 0 \text{ в зависимости от вида}$$

симметрии относительно оси  $x$ ;

$$\gamma_m^{(2)} = \frac{m\pi}{(b-t)}; \quad \gamma_m^{(j)} = \frac{\pi m}{2b}, \text{ где } m \text{ может принимать четные или нечетные}$$

значения в зависимости от вида симметрии относительно оси  $y$ ;

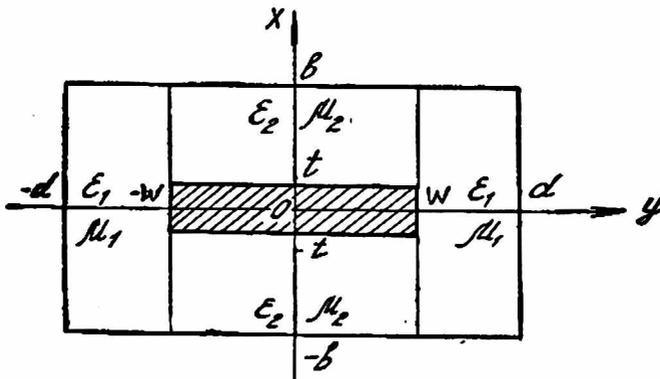
$$x_m^{(i)} = \sqrt{k_i^2 - (\gamma_m^{(i)})^2 - \Gamma^2}; \quad k_i = k_0 \sqrt{\epsilon_r^{(i)} \mu_r^{(i)}};$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0};$$

$\lambda_0$  — длина волны в свободном пространстве;  
 $\Gamma$  — постоянная распространения.

Таким образом, в общем случае в системе существуют все шесть компонент поля. Функции  $\Pi_{e,h}^{(i)}$  содержат неизвестные коэффициенты  $A_{e,hm}^{(i)}$  и величину  $\Gamma$ , для определения которых используются условия непрерывности касательных к границам раздела ( $y = y_{2j}$ ) составляющих электрического и магнитного полей [2]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau^{(2)} &= \vec{E}_\tau^{(1)}, \\ \vec{H}_\tau^{(2)} &= \vec{H}_\tau^{(1)}. \end{aligned} \quad (2)$$



### Вывод дисперсионного уравнения

Выполняя условия (2) и используя при этом метод неопределенных коэффициентов [3], приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \vec{G}_{h2} &= L_h \vec{G}_{h1}, \quad \vec{G}_{e1} = L_{e2} \vec{G}_{e2}, \\ d_2 \vec{G}_{h2} + s_{e2} \vec{G}_{e2} &= \frac{\beta_2^2}{\beta_j^2} d_2 L_h \vec{G}_{h1} + K_h s_{e1} \vec{G}_{e1}; \\ d_1 \vec{G}_{e1} - s_{h1} \vec{G}_{h1} &= \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} d_1 L_e \vec{G}_{e2} - K_e s_{h2} \vec{G}_{h2}; \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vec{G}_{e,h1}$  — вектор-столбцы, компоненты которых связаны с коэффициентами рядов (1)

$$G_{em}^{(i)} = A_{em}^{(i)} \beta_i^2 \sin \alpha_m^{(i)} (y_{2j} - y_i);$$

$$G_{hm}^{(i)} = A_{hm}^{(i)} \beta_i^2 \cos \alpha_m^{(i)} (y_{2j} - y_i);$$

$d_i, s_e, s_h$  — диагональные матрицы с элементами

$$d_{mi}^{(i)} = \Gamma \frac{\gamma_m^{(i)}}{\beta_i^2}, \quad s_{em}^{(i)} = \omega s^{(i)} \frac{\alpha_m^{(i)}}{\beta_i^2} \operatorname{ctg} \alpha_m^{(i)} (y_{2j} - y_i);$$

$$s_{hm}^{(i)} = \omega \mu^{(i)} \frac{\alpha_m^{(i)}}{\beta_i^2} \operatorname{tg} \alpha_m^{(i)} (y_{2j} - y_i), \quad \beta_i^2 = k_i^2 - \Gamma^2;$$

$K_{e, h}$ ,  $L_{e, h}$  — бесконечные матрицы, которые имеют следующий вид:

$$K_e = \left\| (-1)^n \frac{2 - \delta_{0m}}{b} \frac{\gamma_m^{(j)} \sin \gamma_m^{(j)} (b-t)}{(\gamma_m^{(j)})^2 - (\gamma_m^{(2)})^2} \right\|;$$

$$L_e = \left\| (-1)^n \frac{2}{b} \frac{\gamma_n^{(2)} \sin \gamma_n^{(j)} (b-t)}{(\gamma_m^{(j)})^2 - (\gamma_n^{(2)})^2} \right\|;$$

$$K_h = \left\| (-1)^m \frac{2}{b-t} \frac{\gamma_m^{(2)} \sin \gamma_n^{(j)} (b-t)}{(\gamma_n^{(j)})^2 - (\gamma_m^{(2)})^2} \right\|;$$

$$L_h = \left\| (-1)^m \frac{2 - \delta_{0m}}{b-t} \frac{\gamma_n^{(j)} \sin \gamma_n^{(j)} (b-t)}{(\gamma_n^{(j)})^2 - (\gamma_m^{(2)})^2} \right\|.$$

Система четырех матричных уравнений (3) приводится к системе двух относительно коэффициентов области «2»

$$\alpha_{11} \vec{G}_{e2} + \alpha_{12} \vec{G}_{h2} = 0;$$

$$\alpha_{21} \vec{G}_{e2} + \alpha_{22} \vec{G}_{h2} = 0,$$

где

$$\alpha_{11} = s_{e2} - K_h \left[ s_{ej} + \left( 1 - \frac{\beta_j^2}{\beta_2^2} \right) d_j^2 s_{hj}^{-1} \right] L_e;$$

$$\alpha_{12} = d_2 \left[ I - \frac{\beta_2^2}{\beta_j^2} L_h s_{hj}^{-1} K_e s_{h2} \right];$$

$$\alpha_{21} = \left( 1 - \frac{\beta_j^2}{\beta_2^2} \right) L_h s_{hj}^{-1} d_j L_e;$$

$$\alpha_{22} = L_h s_{hj}^{-1} K_e s_{h2} - I.$$

$I$  — единичная матрица.

По структуре системы (4) можно заключить, что в общем случае не могут существовать ТЕ- и ТМ-типы волн в «чистом» виде. Это возможно лишь в критическом случае ( $\Gamma = 0$ ) и в случае однородной среды. Последнее условие превращает уравнения (4) в следующие:

$$(s_{e2} - K_h s_{ej} L_e) \vec{G}_{e2} = 0;$$

$$(L_h s_{hj}^{-1} K_e s_{h2} - I) \vec{G}_{h2} = 0,$$

что свидетельствует о независимом существовании ТЕ- и ТМ-типов волн. При этом же условии возможно существование ТЕМ-волны.

Предполагая заполнение волновода существенно неоднородным, мы не можем воспользоваться приближением «слабой связи» между ТЕ- и ТМ-типами волн. Для выяснения возможности приближенного решения системы (4) рассмотрим предельный переход к нулевой толщине внутреннего проводника в случае асимметричных волн (ось  $x = 0$  играет роль электрической стенки). При этом матрицы  $K_{e, h}$  и  $L_{e, h}$  превращаются в единичные, а  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$  — в диагональные. Это означает, что система двух матричных уравнений (4) распадается на независимые системы двух обыкновенных:

$$\alpha_{kk}^{(11)} G_{ek}^{(2)} + \alpha_{kk}^{(12)} G_{hk}^{(2)} = 0,$$

$$\alpha_{kk}^{(21)} G_{ek}^{(2)} + \alpha_{kk}^{(22)} G_{hk}^{(2)} = 0,$$

$$k = 1, 2 \dots$$

и

$$\alpha_{00}^{(22)} G_{h0}^{(2)} = 0. \quad (6)$$

Дисперсионные уравнения, получаемые из систем (5) и (6), совпадают с таковыми для слоистого прямоугольного волновода (формула (11.22) [1]). В случае симметричных волн (ось  $x = 0$  играет роль магнитной стенки) указанный выше предельный переход не приводит к столь простым выражениям, так как матрицы не превращаются в единичные.

Систему уравнений (4) формально можно решить относительно одного вектор-столбца и из условия существования нетривиального решения бесконечной системы уравнений получить дисперсионное уравнение, приравняв определитель матрицы нулю. Однако практически решить этот определитель не представляется возможным ввиду чрезвычайной сложности его элементов. Поэтому рассмотрим систему уравнений (4) в диагональном приближении, которое имеет вид системы (5) или (6). Тогда дисперсионные уравнения в этом приближении будут достаточно простыми:

$$\alpha_{kk}^{(11)} \alpha_{kk}^{(22)} - \alpha_{kk}^{(12)} \alpha_{kk}^{(21)} = 0, \quad k = 1, 2 \dots \quad (7)$$

и

$$\alpha_{00}^{(22)} = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{kk}^{(11)} &= \left\{ \omega \epsilon_0 \frac{x_k^{(2)} \epsilon_r^{(2)}}{\beta_2^2} \operatorname{ctg} \left( x_k^{(2)} \omega - \frac{\delta \pi}{2} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{\infty} K_{ekm} L_{emk} \frac{x_m^{(j)}}{\beta_j^2} \left[ \epsilon_r^{(j)} + \frac{1}{\mu_r^{(j)}} \left( 1 - \frac{\beta_j^2}{\beta_2^2} \right) \left( \frac{\Gamma \gamma_m^{(j)}}{k_0 x_m^{(j)}} \right)^2 \operatorname{ctg} x_m^{(j)} (d - w) \right] \right\}; \\ \alpha_{kk}^{(22)} &= - \left\{ 1 + \frac{\mu_r^{(2)} \beta_j^2}{\mu_r^{(j)} \beta_2^2} x_k^{(2)} \operatorname{tg} \left( x_k^{(2)} \omega - \frac{\delta \pi}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{m=0}^{\infty} L_{hkm} K_{emk} \frac{1}{x_m^{(j)}} \operatorname{ctg} x_m^{(j)} (d - w) \right\}; \\ \alpha_{kk}^{(12)} &= \frac{\Gamma \gamma_k^{(2)}}{\beta_2^2} \left\{ 1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(j)}} x_k^{(2)} \operatorname{tg} \left( x_k^{(2)} \omega - \frac{\delta \pi}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{m=0}^{\infty} L_{hkm} K_{emk} \frac{1}{x_m^{(j)}} \operatorname{ctg} x_m^{(j)} (d - w) \right\}; \\ \alpha_{kk}^{(21)} &= \frac{\Gamma}{\omega \mu^{(j)}} \left( 1 - \frac{\beta_j^2}{\beta_2^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} L_{hkm} L_{emk} \frac{\gamma_m^{(j)}}{x_m^{(j)}} \operatorname{ctg} x_m^{(j)} (d - w). \end{aligned}$$

Эти обозначения пригодны как для симметричных волн, так и для асимметричных, с той лишь разницей, что для первых  $\gamma_l^{(j)} = \frac{l + \frac{1}{2}}{b} \pi$ , а для последних  $-\gamma_l^{(j)} = \frac{l}{b} \pi$ , ( $l = 0, 1, 2 \dots$ ). Суммы, входящие в (7) и (8), сходятся не хуже, чем  $m^{-3}$ . Таким образом, получены приближенные уравнения для нахождения постоянных распространения  $\Gamma_s$ , соответствующих собственным типам волн.

## Поля

Определение поля, соответствующего некоторой постоянной распространения, связано с решением системы уравнений (4). Использование метода Крамера для решения этой системы предполагает обращение бесконечной матрицы, что оказывается очень громоздким. Если учесть, что главный определитель решается достаточно приближенно, то метод Крамера может привести к значительным погрешностям. Поэтому целесообразно применить метод последовательных приближений, используя соотношения (3). Последовательность подстановок образует замкнутый цикл, удобный для реализации на ЭВМ:

$$\begin{aligned}\vec{G}_{hj}^{(N)} &= s_{kj}^{-1} K_{eSh2} \vec{G}_{h2}^{(N)} + \left(1 - \frac{\beta_j^2}{\beta_2^2}\right) s_{hj}^{-1} d_j L_e \vec{G}_{e2}^{(N)}; \\ \vec{G}_{ej}^{(N)} &= L_e \vec{G}_{e2}^{(N)}; \\ \vec{G}_{e2}^{(N+1)} &= \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_j^2} - 1\right) s_{e2}^{-1} d_2 L_h \vec{G}_{hj}^{(N)} + s_{e2}^{-1} K_{hSej} \vec{G}_{ej}^{(N)}; \\ \vec{G}_{h2}^{(N+1)} &= L_h \vec{G}_{hj}^{(N)}.\end{aligned}$$

Главное преимущество этого метода состоит в том, что параллельно отыскиваются коэффициенты всех областей ( $i = 2, j$ ).

В качестве нулевого приближения ( $N = 0$ ) можно взять, согласно системам (5) и (6), следующее:

$$\begin{aligned}\vec{G}_{h2}^{(0)} &= \|\delta_{km}\|, \\ \vec{G}_{e2}^{(0)} &= \left\| -\frac{\alpha_{kk}^{(21)}}{\alpha_{kk}^{(22)}} \delta_{km} \right\|,\end{aligned}$$

где  $\delta_{km}$  — символ Кронекера.

По-видимому, при достаточно большом числе повторений цикла процесс будет сходиться. Чтобы быть в этом уверенным, необходимо проверить условия непрерывности (2). На этом пути, как показано в работе [4], можно уточнять полученные из выражений (7) и (8) приближенные значения  $\Gamma$  для данного типа волны. Определив таким образом коэффициенты рядов (1), соответствующие  $s$ -ому типу волны, можно на основании известных формул получить выражения для полей  $\vec{E}_s$  и  $\vec{H}_s$ . Известно [5], что собственные типы волн ортогональны в смысле выполнения следующего соотношения:

$$\int_{S_{\perp}} [\vec{E}_s, \vec{H}_{s'}] \vec{z}_0 ds = N_s \delta_{ss'},$$

где  $S_{\perp}$  — площадь поперечного сечения волновода.

Поскольку поля определяются с точностью до постоянного множителя, то имеет смысл определить его таким образом, чтобы  $N_s = 1$ . Тогда собственные волны будут нормированы.

Полученные здесь выражения позволяют учесть потери в заполняющей среде, если  $\epsilon_r^{(i)}$  и  $\mu_r^{(i)}$  считать комплексными величинами. Однако гораздо проще воспользоваться условием малости мнимых составляющих проницаемости, предполагая, что их влияние при этом не сказывается на

структуре поля, полученной в случае идеальной среды. Постоянная затухания в этом приближении определяется по формуле

$$\Gamma_s'' = \frac{\omega}{2} \int_{S_1} \left\{ \mu'' |\vec{H}_s|^2 + \varepsilon'' |\vec{E}_s|^2 \right\} dS,$$

где  $\vec{H}_s$  и  $\vec{E}_s$  — нормированные поля собственных типов волн;  
 $\varepsilon''$  и  $\mu''$  — мнимые составляющие диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Егоров. Частично заполненные прямоугольные волноводы. Изд-во «Советское радио», 1967.
2. Г. В. Кисунько. Электродинамика полых систем. Изд-во ВКАС, 1949.
3. Н. Ф. Фунтова. О приближенных методах расчета критических частот волноводов. Уч. записки МГПИ им. Ленина, т. 88, 1954.
4. А. Ф. Зоркин. Исследование изгибов, коаксиально-секторных и кольцевых резонаторов на гребневых волноводах. Автореф канд. дисс., Харьков, 1967.
5. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Изд-во «Советское радио», 1957.