ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ РЕЗОНАТОРНЫХ СИСТЕМ

Ж. Ф. Пащенко, А. И. Терещенко, А. Е. Зайцев

Харьков

Под сложной резонаторной системой будем понимать такую систему, которую можно представить в виде ряда резонаторов простой формы, связанных между собой.

Исследование таких колебательных систем ограничено особыми трудностями решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, к которым приводятся соответствующие краевые задачи электродинамики. Поэтому задача о связанных резонаторах решается достаточно точно лишь для частных случаев:

— когда связь осуществляется через отверстия, размеры которых малы по сравнению с длиной распространяющейся волны, и сами отверстия удалены на достаточно большие расстояния от поверхностей, ограничивающих объем. Для решения такого класса задач могут быть использованы квазистатические методы [1] или теория малых возмущений [2];

— если резонаторы связаны через узкие длинные щели. В этом случае можно использовать методы теории щелевых антенн [3, 4], которые позволяют свести задачу к исследованию интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр

$$\alpha = \frac{1}{\ln \frac{L}{d}},$$

где L и d — длина и ширина щели соответственно.

Применение методики, изложенной в работах [1, 2], к исследованию систем резонаторов со связью через отверстия значительных размеров дает весьма приближенные результаты. Расчеты же по формулам работ [3, 4] затруднительны из-за их громоздкости.

В связи с применением ЭВМ появляется возможность широко использовать метод Фурье [5] при исследовании сложных резонаторных систем. Методика расчета таких систем состоит в том, что, разлагая поля внутри связываемых областей по собственным функциям отверстия связи, можно свести решение интегрального уравнения относительно касательного поля на отверстии связи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для амплитуд поля $\vec{E}_\tau$.

В данной работе на основании использования общих принципов метода Фурье и матричного исчисления рассматривается система из N объемных резонаторов, связанных друг с другом через отверстия (рис. 1). Удовлетворяя условию непрерывности касательных составляющих магнитного поля на границе между каждым из связываемых резонаторов, можно получить, согласно работе [6], следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}\left[\vec{n}_{21}\vec{H}_1\left\{\vec{E}_{\tau_1}\right\}\right] + \left[\vec{n}_{12}\vec{H}_2\left\{\vec{E}_{\tau_1}\right\}\right] = 0;\\ \left[\vec{n}_{32}\vec{H}_2\left\{\vec{E}_{\tau_2}\right\}\right] + \left[\vec{n}_{23}\vec{H}_3\left\{\vec{E}_{\tau_2}\right\}\right] = 0;\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ \left[\vec{n}_{N,N-1}\vec{H}_{N-1}\left\{\vec{E}_{\tau N-1}\right\}\right] + \left[\vec{n}_{N-1,N}\vec{H}_N\left\{\vec{E}_{N-1}\right\}\right] = 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

где

$$\vec{H}_1\left\{\vec{E}_{\tau_1}\right\},\ \vec{H}_2\left\{\vec{E}_{\tau_2}\right\}\ldots,\vec{H}_N\left\{\vec{E}_{\tau N}\right\}$$

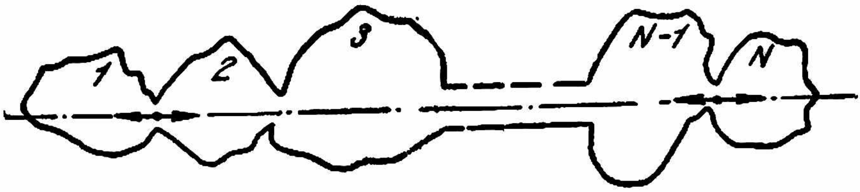

Рис. 1.

магнитные поля в каждом из резонаторов, возмущенные касательным электрическим полем на соответствующей границе раздела:

$\vec{n}_{21}, \vec{n}_{12}, \ldots, \vec{n}_{N-1,N}$ — внешние нормали для соответствующих объемных резонаторов.

В настоящее время не существует регулярных методов решения интегральных уравнений типа (1) в случае неквазистационарных возмущений. Поэтому целесообразно использовать приближенные методы — метод Галеркина или метод Ритца — и представить касательные составляющие $\vec{E}_\tau$ на отверстиях связи между резонаторами в виде полных линейно независимых систем функций $\vec{\varepsilon}_q$, удовлетворяющих граничным условиям на контурах отверстий:

$$\begin{gathered}\vec{E}_{\tau_1} = \sum_{q_1} e_{q_1}\vec{\varepsilon}_{q_1};\\ \vec{E}_{\tau_2} = \sum_{q_2} e_{q_2}\vec{\varepsilon}_{q_2};\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ \vec{E}_{\tau N-1} = \sum_{q_{N-1}} e_{q_{N-1}}\vec{\varepsilon}_{q_{N-1}}.\end{gathered} \qquad (2)$$

В качестве $\vec{\varepsilon}$ может быть выбрана система собственных функций соответствующих отверстий связи.

Подставляя поля в виде (2) в (1), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения e_q, которая в матричном обозначении запишется так:

$$\begin{gathered}\left(Y^{\mathrm{I}}_{11} + Y^{\mathrm{II}}_{11}\right)e_1 + Y^{\mathrm{II}}_{12}e_2 = 0;\\ Y^{\mathrm{II}}_{21}e_1 + \left(Y^{\mathrm{II}}_{22} + Y^{\mathrm{III}}_{22}\right)e_2 + Y^{\mathrm{III}}_{23}e_3 = 0;\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ Y^{N-1}_{N-1,N-2}e_{N-2} + \left(Y^{N-1}_{N-1,N-1} + Y^{N}_{N-1,N-1}\right)e_{N-1} = 0,\end{gathered} \qquad (3)$$

где $Y^{\text{I}}_{11}, Y^{\text{II}}_{11}, \ldots, Y^{N}_{N-1,\,N-1}$ — клеточные матрицы собственных проводимостей;

$Y^{\text{II}}_{12}, Y^{\text{III}}_{23}, \ldots, Y^{N-1}_{N-1,\,N-2}$ — матрицы взаимных проводимостей соответствующих резонаторов.

$e_1, e_2, \ldots, e_{N-1}$ — матрицы-столбцы вида

$$e_q = \begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_L \end{Vmatrix}.$$

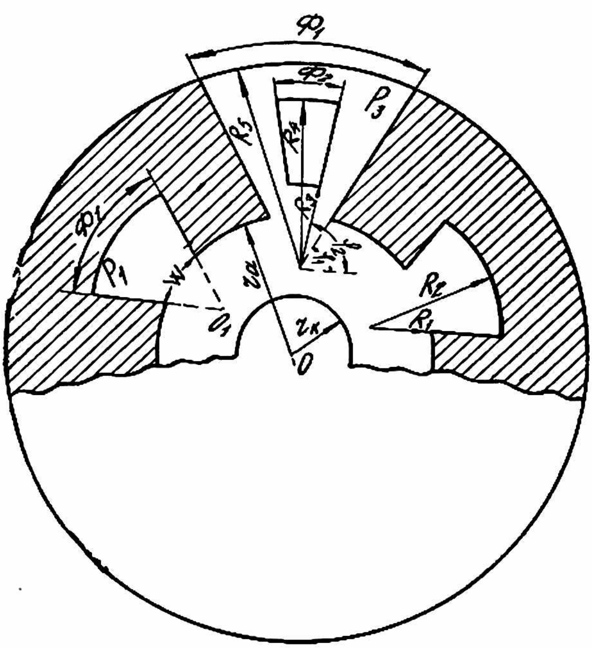

Рис. 2.

Нетривиальное решение системы (3) существует в том случае, когда определитель ее равен нулю

$$\begin{vmatrix} Y^{\text{I}}_{11}+Y^{\text{II}}_{11} & Y^{\text{II}}_{12} & 0 & 0\ldots0 \\ Y^{\text{II}}_{21} & Y^{\text{II}}_{22}+Y^{\text{III}}_{22} & Y^{\text{III}}_{23} & 0\ldots0 \\ 0 & Y^{\text{III}}_{32} & Y^{\text{III}}_{33}+Y^{\text{IV}}_{33} & Y^{\text{IV}}_{34}\ldots0 \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ 0 & 0\ldots Y^{N-1}_{N-1,\,N-2} & Y^{N-1}_{N-1,\,N-1} & +Y^{N}_{N-1,\,N-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Решение уравнения (4) дает спектр частот системы связанных резонаторов.

Проиллюстрируем изложенную общую методику конкретным примером. Рассмотрим резонаторную систему, представляющую собой закрытый магнетронный анодный блок, связанный с нагрузкой через ряд отверстий в торцевой стенке (рис. 2). Подобная система была исследована в работе (7); она может использоваться для возбуждения волны H_{01} в цилиндрических волноводах, а также для возбуждения колебаний H_{01n}, если в качестве нагрузки взят цилиндрический резонатор. Учесть влияние нагрузки на спектр частот магнетрона при использовании метода согласования проводимостей [8] трудно, так как не удается использовать условие ортогональности функций при определении неизвестных коэффициентов в выражении для полей в связанных с нагрузкой резонаторах анодного блока. Поэтому в данном случае значительно удобнее пользоваться описанным выше матричным методом.

Система уравнений для коэффициентов разложения по собственным функциям отверстий связи лопаточных резонаторов анода с коаксиальным резонатором пространства взаимодействия и с нагрузкой в виде цилиндрического резонатора запишется так:

$$\begin{gathered}\left(\frac{N}{2}Y^{p_2}_{11}-Y^{p_1}_{11}\right)e_1+\frac{N}{2}Y^{p_2}_{12}e_2=0;\\ \frac{N}{2}Y^{p_2}_{21}e_1+\left(\frac{N}{2}Y^{p_2}_{21}-Y^{p_3}_{22}\right)e_2+Y^{p_3}_{23}e_3=0;\\ -Y^{p_3}_{32}e_2+\left(Y^{p_3}_{33}-\frac{N}{2}Y^{н}_{33}\right)e_3=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Спектр частот находим из условия равенства нулю определителя системы (5), т. е.

$$\begin{vmatrix}\frac{N}{2}Y^{p_2}_{11}-Y^{p_1}_{11} & Y^{p_2}_{11} & 0\\ \frac{N}{2}Y^{p_2}_{21} & \frac{N}{2}Y^{p_2}_{22}-Y^{p_3}_{22} & Y^{p_3}_{23}\\ 0 & -Y^{p_3}_{32} & Y^{p_3}_{33}-\frac{N}{2}Y^{н}_{33}\end{vmatrix}=0.\tag{6}$$

Связь коаксиального резонатора пространства взаимодействия с резонаторами анодного блока осуществляется через узкие длинные щели, поэтому собственные векторные функции на этой границе могут быть записаны в виде

$$\vec{\varepsilon}_{q_1}=\sqrt{\frac{2}{Wh_a}}\sin\frac{l\pi z}{h_a}e^{j\frac{2\pi n}{N}q}\vec{e}_\varphi;\tag{7}$$

$$l=1,\ 2,\ 3\ldots,$$

где W и h_a — ширина и длина щели соответственно;

N — количество резонаторов анодного блока;

q — номер резонатора;

n — целое число.

Собственные функции на отверстии связи лопаточного резонатора с нагрузкой

$$\vec{\varepsilon}_{q_2}=-C_\varphi\left[\frac{J'_\nu(\varkappa_{mn}r)}{J'_\nu(\varkappa_{mn}R_3)}-\frac{N'_\nu(\varkappa_{mn}r)}{N'_\nu(\varkappa_{mn}R_3)}\right]\times\cos\nu(\varphi-\varphi_2)e^{j\frac{2\pi n}{N/2}q}\vec{e}_\varphi,\tag{8}$$

где

$$C_\varphi=\sqrt{\frac{2(2-\delta_{0\nu})}{\Phi_2}}\frac{1}{\sqrt{\left\{\left[r^2-\left(\frac{\nu}{\varkappa_{mn}}\right)^2\right]\left[\frac{J_\nu(\varkappa_{mn}r)}{J'_\nu(\varkappa_{mn}R_3)}-\frac{N_\nu(\varkappa_{mn}r)}{N'_\nu(\varkappa_{mn}R_3)}\right]^2\right\}_{r=R_3}^{R_4}}}$$

$$\delta_{0\nu}=\begin{cases}1 & \nu=0,\\ 0 & \nu\neq0,\end{cases}\quad \nu=\frac{p\pi}{\Phi_2},\quad p=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Здесь $\varkappa_{mn}$ — корни уравнения $\frac{J'_m(\varkappa_{mn}R_4)}{N'_m(\varkappa_{mn}R_4)}=\frac{J'_m(\varkappa_{mn}R_3)}{N'_m(\varkappa_{mn}R_3)}$;

Φ — угловой размер отверстия связи.

Как было показано в работе [6], при вычислении собственных и взаимных проводимостей резонаторов, в оболочках которых имеются отверстия, необходимо учитывать все виды полей, которые могут в них возбуждаться, т. е. ТЕ, -ТМ, -ТЕМ-поля, а также градиентные магнитные поля.

Для рассматриваемого нами случая при выборе аппроксимирующих функций в виде выражений (7) и (8) коэффициент возбуждения волн ТМ и ТЕМ равен нулю, поэтому

$$Y_{ij}^{pk} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ \frac{1}{ik} \left(\oint \left[\vec{n}\, \vec{e}_{q_r} \right] \vec{H}_g^{pk} ds \right)^2 + \frac{ik}{k_{\mathrm{TE}}^2 - k^2} \left(\oint \left[\vec{n}\, \vec{e}_{qn} \right] \vec{H}_{\mathrm{TE}}^{pk} ds \right)^2 \right\}, \tag{9}$$

где $\vec{H}_g^{pk}$ — градиентное магнитное поле в рассматриваемом резонаторе (коаксиальном, лопаточном и цилиндрическом);

$\vec{H}_{\mathrm{TE}}^{pk}$ — магнитное поле в невозмущенном резонаторе.

Подставляя значения полей $\vec{H}_{\mathrm{TE}}^{p_1}$, $\vec{H}_g^{p_1}$ и $\vec{e}_{q_1}$ из формулы (7) в (9), получим следующее выражение для $Y_{11}^{p_1}$:

$$Y_{11}^{p_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_m \sum_s \sum_l C_{ms}^2 \frac{(\sin m\varphi - \cos m\varphi)^2}{m^2} \frac{1}{\pi W \left| \chi_{ms}^2 + \left(\frac{l\pi}{h_a}\right)^2 \right|} \times$$
$$\times \left[\frac{I_m(\chi_{ms} r_a)}{I'_m(\chi_{ms} r_k)} - \frac{N_m(\chi_{ms} r_a)}{N'_m(\chi_{ms} r_k)} \right]^2 \left[\frac{2 - \delta_{0l}}{ik} \left(\frac{l\pi}{h_a}\right)^2 + \frac{ik}{k_{msl}^2 - k^2} 2\chi_{ms}^2 \right], \tag{10}$$

где

$$C_{ms} = \frac{r_a}{\sqrt{\left\{ \left[r^2 - \left(\frac{m}{\chi_{ms}}\right)^2 \right]^2 \left[\frac{I_m(\chi_{ms} r)}{I'_m(\chi_{ms} r_k)} - \frac{N_m(\chi_{ms} r)}{N'_m(\chi_{ms} r_k)} \right]^2 \right\}_{r=r_k}^{r_a}}};$$

$k_{\mathrm{TE}} = k_{msl}$ — собственное волновое число невозмущенного коаксиального резонатора пространства взаимодействия. Остальные выражения для проводимостей имеют аналогичный вид.

Подставляя найденные значения проводимостей Y_{ij}^{pk} в уравнение (6), находим резонансные частоты системы.

С помощью ЭВМ «Урал-2» был рассчитан закрытый анодный блок магнетрона, который связан с нагрузкой (цилиндрическим резонатором) через отверстия в одной из торцевых стенок. Для случая, когда в анодном блоке магнетрона возбуждаются колебания π — вида, а в связанном с ним резонаторе — колебания H_{01n}, сравнение результатов расчета и холодных измерений дало расхождение, не превышающее 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Сб. «Электроника больших мощностей», 3, 216, (1964).
2. Н. В. G. Casimir, Phil. Reports, v. 6,172, (1951).
3. А. И. Ахиезер и Г. Я. Любарский. ЖТФ, 24, 1967, (1954).
4. А. И. Ахиезер и Г. Я. Любарский, ЖТФ, 25,1597, (1955).
5. Г. В. Кисунько. Электродинамика полых систем, Изд-во ВКАС, Л., (1949).
6. Б. М. Машковцев, К. Н Цибизов, Б. Ф. Емелин. Теория волноводов. Изд-во «Наука», 1966.
7. Б. В. Минич. «Изв. Сибирского отделения АН СССР», 7, 19, 1960.
8. Магнетроны сантиметрового диапазона (пер. с англ. под ред. С. А. Зусмановского), т. 1, Изд-во «Советское радио», 1950.