ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОЛУЧЕВЫХ ЛБВ О-ТИПА

В. Г. Шульга, В. Е. Коновалов

Харьков

Рассмотрим замедляющую систему, пронизываемую n разноскоростными электронными потоками. Будем считать, что электронные потоки в общем случае разнесены в пространстве. Это может быть реализовано как в пределах одного пространства взаимодействия, так и путем пропускания электронных потоков в n пространствах взаимодействия. Последнее может приводить к образованию n связанных замедляющих систем, причем при достаточно сильной связи, согласно работе [1], существует один вид колебаний для всех потоков. Будем считать, что электростатическое поле пространственного заряда каждого потока не экранируется замедляющей системой, а проникает в пространство взаимодействия соседних потоков.

Электронные потоки движутся только вдоль оси z со скоростями v_{ek} $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$, близкими к фазовой скорости v_0 какой-либо пространственной гармоники поля линии замедления. Скорости остальных пространственных гармоник будем предполагать настолько далекими от $v_{e1}, v_{e2} \ldots v_{ek}$, что взаимодействием электронов с полем этих гармоник можно пренебречь. Предполагается одномерная задача; постоянные параметры электронных потоков не зависят от z; амплитуда сигнала мала; все переменные величины меняются по волновому закону $\exp(j\omega t - \Gamma z)$; замедляющая система заменяется длинной линией.

Действие электронных потоков на линию замедления определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial I_k}{\partial z} = -jB_kV_k - \sum_{l=1}^{n} m_{lk}\frac{\partial i_l}{\partial z}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial z} = -jX_kJ_k,$$

где B_k и X_k — погонные проводимости и сопротивления k-ой линии замедления соответственно;

m_{lk} — коэффициент связи l-го потока с k-ой линией, характеризующий проницаемость замедляющей системы l-го потока ($m_{ll} = 1$);

i_l — переменная составляющая конвекционного тока l-го потока.

Тогда, используя соотношения из теории длинных линий $Z_0 = \left(\frac{X}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma_0 = j(XB)^{\frac{1}{2}}$ и уравнение (1), запишем выражение для V_k:

$$V_k = -\frac{\Gamma\Gamma_0 Z_{0k}}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2}\sum_{l=1}^{n} m_{lk}i_l, \qquad (2)$$

а поле на основании $E = \frac{\partial V}{\partial z}$ как

$$E_k = -\frac{\Gamma^2 \Gamma_0 Z_{0k}}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2} \sum_{l=1}^{n} m_{lk} i_{lk}. \tag{3}$$

Поле, действующее на k-ый поток, состоит из поля пространственного заряда рассматриваемого потока, поля пространственного заряда, обусловленного присутствием других потоков, и поля системы:

$$E_{k\Sigma} = E_k + \sum_{l=1}^{n} p_{lk} E_{\rho l}, \tag{4}$$

где $E_{\rho l}$ — поле пространственного заряда l-го потока;
p_{lk} — коэффициент связи, выражающий ослабление электростатического поля пространственного заряда l-го потока в k-ом потоке, вызванное их пространственным разнесением. В общем случае $p_{lk} \neq p_{kl}$.

Нетрудно показать, что если два пучка являются полыми цилиндрическими с радиусами a и $b (a < b)$, то

$$p_{1,2} = \frac{K_0(\beta b)}{K_0(\beta a)}; \quad p_{2,1} = \frac{I_0(\beta a)}{I_0(\beta b)}.$$

Если два потока представляют тонкие параллельные плоскости на расстоянии d, то

$$p_{1,2} = p_{2,1} = e^{-\beta d},$$

где β — фазовая постоянная распространения в системе. Для перемешанных потоков $p_{1,2} = p_{2,1} = 1$, для экранированных $p_{1,2} = p_{2,1} = 0$.

Поле пространственного заряда описывается уравнением Пуассона:

$$\nabla E_\rho = \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Используя уравнение непрерывности, его можно представить в виде

$$E_\rho = \frac{ji}{\omega \varepsilon_0'}, \tag{6}$$

где ρ и i — переменные составляющие плотности пространственного заряда и тока;
ε_0' — эквивалентная диэлектрическая проницаемость, обусловленная конечными размерами поперечного сечения электронного потока.

Из совместного решения уравнения движения и уравнения непрерывности получим следующее выражение для переменной составляющей конвекционного тока k-го потока:

$$i_k = \frac{j\eta E_{k\Sigma} I_k \beta_{ek}}{v_k^2 (j\beta_{ek} - \Gamma)^2}, \tag{7}$$

где $\eta = \frac{e}{m}$;
I_k, v_k — постоянные составляющие тока и скорости электронного потока соответственно;
β_{ek} — фазовая постоянная потока;
Γ — постоянная распространения.

Решая совместно (3), (4), (6) и (7), получим систему линейных однородных уравнений с n неизвестными $E_{n\Sigma}$. Условием нетривиальности решения системы является равенство нулю определителя системы

$$\det_n = 0, \tag{8}$$

которое является характеристическим уравнением n-лучевой ЛБВ.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двулучевой ЛБВ с разноскоростными пространственно разнесенными потоками. При этом предположим, что поля системы, действующие на оба потока, равны. Это обстоятельство, существенно упрощающее вычисления, имеет место, когда два потока находятся в одном пространстве взаимодействия или в двух сильно связанных одинаковых замедляющих системах для симметричных потоков.

Остановимся подробно на выводе характеристического уравнения двулучевой ЛБВ.

Используя вышеуказанные предположения, запишем уравнения линии замедления с двумя электронными потоками в следующем виде:

$$\frac{\partial I_c}{\partial z} = -jBV_c - \frac{\partial}{\partial z}(i_1 + i_2); \qquad \frac{\partial V_c}{\partial z} = -jXV_c, \tag{9}$$

где индекс «c» относится к величинам, характеризующим систему, а «1» и «2» к электронным потокам соответственно. Исключая I_c и заменив дифференцирование по z умножением на Γ, получим следующее выражение для поля системы:

$$E_c = \frac{\Gamma^2\Gamma_0 Z_0 (i_1 + i_2)}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2}. \tag{10}$$

Каждый из электронных потоков движется в результирующем поле $E_{1\Sigma}$ и $E_{2\Sigma}$ соответственно

$$E_{1\Sigma} = E_c + E_{\rho 1} + p_{21}E_{\rho 2}; \qquad E_{2\Sigma} = E_c + E_{\rho 2} + p_{12}E_{\rho 1}. \tag{11}$$

Из уравнения движения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\eta E_{\Sigma}$$

с учетом $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ и $\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma$ получим

$$v_{1,2} = -\frac{\eta E_{1,2\Sigma}}{v_{1,2}(j\beta_{e1,2} - \Gamma)}. \tag{12}$$

Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}(\rho v) = \rho\frac{\partial v}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

получим

$$\rho_{1,2} = \frac{\Gamma v_{1,2}\bar{\rho}_{1,2}}{v_{1,2}(j\beta_{e1,2} - \Gamma)}$$

или с учетом выражения (12)

$$\rho_{1,2} = -\frac{\eta\rho_{1,2}\Gamma E_{1,2\Sigma}}{v_{1,2}^2(j\beta_{e1,2} - \Gamma)^2}. \tag{13}$$

Выражение для $i_{1,2}$ можно получить из уравнения конвекционного тока

$$-i = \rho\bar{v} + \bar{\rho}v$$

и, учитывая формулы (12) и (13), имеем

$$i_{1,2} = \frac{j\eta\beta_{e1,2}I_{1,2}E_{1,2\Sigma}}{v_{1,2}^2(j\beta_{e1,2} - \Gamma)^2}. \tag{14}$$

Поле пространственного заряда электронного потока можно записать из уравнения Пуассона (5) с учетом выражения (13)

$$E_{\rho 1,2} = -\frac{\beta_{q1,2}^2 E_{1,2\Sigma}}{(j\beta_{e1,2} - \Gamma)^2}, \tag{15}$$

где $\beta_q = \frac{\omega_q}{v}$; $\omega_q = \left(-\frac{\eta\rho}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ — эффективная плазменная частота, учитывающая конечность размеров сечения потока.

Решая совместно формулы (10), (11), (14) и (15), получим систему однородных уравнений относительно неизвестных $E_{1\Sigma}$ и $E_{2\Sigma}$

$$\begin{gathered} E_{1\Sigma}\left[1 + \frac{j2C_1^3\beta_{e1}\Gamma^2\Gamma_0}{(\Gamma^2-\Gamma_0^2)(j\beta_{e1}-\Gamma)^2} + \frac{\beta_{q1}^1}{(j\beta_{e1}-\Gamma)^2}\right] + \\ + E_{2\Sigma}\left[\frac{p_{21}\beta_{q2}^2}{(j\beta_{e2}-\Gamma)^2} + \frac{j2C_2^3\beta_{e2}\Gamma^2\Gamma_0}{(\Gamma^2-\Gamma_0^2)(j\beta_{e2}-\Gamma)^2}\right] = 0; \\ E_{1\Sigma}\left[\frac{p_{21}\beta_{q1}^2}{(j\beta_{e1}-\Gamma)^2} + \frac{j2C_1^3\beta_{e1}\Gamma^2\Gamma_0}{(\Gamma^2-\Gamma_0^2)(j\beta_{e1}-\Gamma)^2}\right] + \\ + E_{2\Sigma}\left[1 + \frac{j2C_2^3\beta_{e2}\Gamma^2\Gamma_0}{(\Gamma^2-\Gamma_0^2)(j\beta_{e2}-\Gamma)^2} + \frac{\beta_{q2}^2}{(j\beta_{e2}-\Gamma)^2}\right], \end{gathered} \tag{16}$$

где $C_{1,2} = \left[\frac{Z_0 I_{1,2}}{4V_{1,2}}\right]^{\frac{1}{3}}$.

Определитель этой системы, равный нулю, дает характеристическое уравнение двулучевой ЛБВ с произвольным пространственным разнесением потоков

$$\det_2 = 0, \tag{17}$$

который является алгебраическим уравнением шестой степени относительно постоянной распространения Γ.

Для упрощения расчетов положим $C_1 = C_2 = C$. Введем обозначения, принятые в линейной теории ЛБВ [2, 3]:

$$\begin{gathered} \Gamma = j\beta;\ \Gamma_0 = j\beta_0;\ \beta = \beta_e(1 + jC\delta); \\ \beta_0 = \beta_e(1 + Cb + jCd);\ \beta_{e1} = \beta_e(1 + Ch); \\ \beta_{e2} = \beta_e(1 - Ch);\ \beta_e = \frac{2\omega}{v_1 + v_2};\ \delta = x + jy. \end{gathered} \tag{18}$$

Параметр h характеризует разность скоростей электронных потоков, параметр b — отклонение средней скорости потоков от скорости невозмущенной волны в линии замедления. Параметр d учитывает потери в линии замедления. Комплексная величина $\delta = x + jy$ характеризует постоянную распространения волны в линии с электронными потоками. Положительная величина x соответствует нарастанию амплитуды вдоль линии замедления, а положительная величина y означает, что фазовая скорость волны больше средней скорости электронов.

Подставим обозначения выражения (18) в формулу (17) и, считая $C \ll 1$, получим характеристическое уравнение шестой степени относительно δ:

$$\begin{gathered} \left[1 + \frac{1}{(j\delta + jd - b)(j\delta - h)^2} - \frac{B_1}{(j\delta - h)^2}\right]\left[1 + \frac{1}{(j\delta + jd - b)(j\delta + h)^2} - \frac{B_2}{(j\delta + h)^2}\right] = \\ = \left[\frac{1}{(j\delta + jd - b)(j\delta - h)^2} - \frac{p_{21}B_1}{(j\delta - h)^2}\right]\left[\frac{1}{(j\delta + jd - b)(j\delta + h)^2} - \frac{p_{21}B_2}{(j\delta + h)^2}\right], \end{gathered} \tag{19}$$

где $B_{1,2} = \left(\frac{\beta_{q1,2}}{\beta_{e1,2}C_{1,2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ и в дальнейшем положим $B_1 = B_2 = B$. Будем считать, что $p_{1,2} = p_{21} = p$.

При $p = 1$ это хорошо перемешанные потоки, уравнение (19) переходит в уравнение, приведенное в работе [3]:

$$(b - j\delta - jd)\left[1 - \frac{B}{(j\delta - h)^2} - \frac{B}{(j\delta + h)^2}\right] = \frac{1}{(j\delta - h)^2} + \frac{1}{(j\delta + h)^2}. \quad (20)$$

При $p = 0$, что соответствует случаю полностью экранированных потоков, (19) переходит в уравнение, приведенное в работе [4]:

$$(b - j\delta - jd) = \frac{1}{(j\delta + h)^2 - B} + \frac{1}{(j\delta - h)^2 - B}. \quad (21)$$

В случае синхронизма электронных потоков $h = 0$, выражение (19) при $p = 1$ переходит в

$$(b - j\delta - jd)(\delta^2 + 2B) + 2 = 0, \quad (22)$$

а при $p = 0$

$$(b - j\delta - jd)(\delta^2 + B) + 2 = 0. \quad (23)$$

Уравнения (22) и (23) легко преобразовываются в характеристическое уравнение однолучевой ЛБВ [2]

$$(b' - j\delta' - jd')(\delta'^2 + B') + 1 = 0,$$

где

$$b' = 2^{-\frac{1}{3}}b;\ \delta' = 2^{-\frac{1}{3}}\delta;\ d' = 2^{-\frac{1}{3}}d;$$

$B' = 2^{\frac{1}{3}}B$ для (22) и $B' = 2^{-\frac{2}{3}}B$ для (23).

Уравнение (19) удобно переписать в виде

$$(j\delta + jd - b)^2\,[(\delta^2 + h^2)^2 + 2B(\delta^2 - h^2) + B^2(1 - p^2)] -$$
$$- 2(j\delta + jd - b)[\delta^2 - h^2 + B(1 + p)] = 0. \quad (24)$$

Переписав выражение (24) в каноническом виде, получим алгебраическое уравнение пятой степени относительно δ:

$$(j\delta + jd - b)\,[(\delta^2 + h^2)^2 + 2B(\delta^2 - h^2) +$$
$$+ B^2(1 - p^2)] - 2(\delta^2 - h^2) - B(1 - p) = 0. \quad (25)$$

Известно, что решение уравнения пятой степени и выше в общем случае не может быть найдено в радикалах. Поэтому корни уравнения (25) находятся приближенно. Находим их, решая (25) на ЭЦВМ при следующих значениях параметров:

параметр скорости $b = +12 \div -12$;

параметр потерь $d = 0$; 0,2; 0,6; 1,0;

параметр пространственного заряда $B = 0{,}5$; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 6,0; 8,0;

параметр рассинхронизма электронных потоков $h = 0{,}1$; 0,3; 0,5; 0,7; 1,0; 1,25; 1,5; 2,0; 2,25;

параметр связи электронных потоков $p = 0$; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0.

На рис. 1 и 2 показаны корни характеристического уравнения (25) в зависимости от параметра скорости при фиксированных значениях остальных параметров $B = 1{,}0$; $d = 0$, $p = 0{,}75$; $h = 1{,}0$; 2,0.

Как видно из рис. 1 и 2, в системе распространяется пять волн. Фазовая постоянная волны линии замедления обозначена y_5, фазовая постоянная волн пространственного заряда медленного и быстрого потоков — через y_1 и y_3 (медленная и быстрая) и y_4 и y_2 (медленная и быстрая) соответственно.

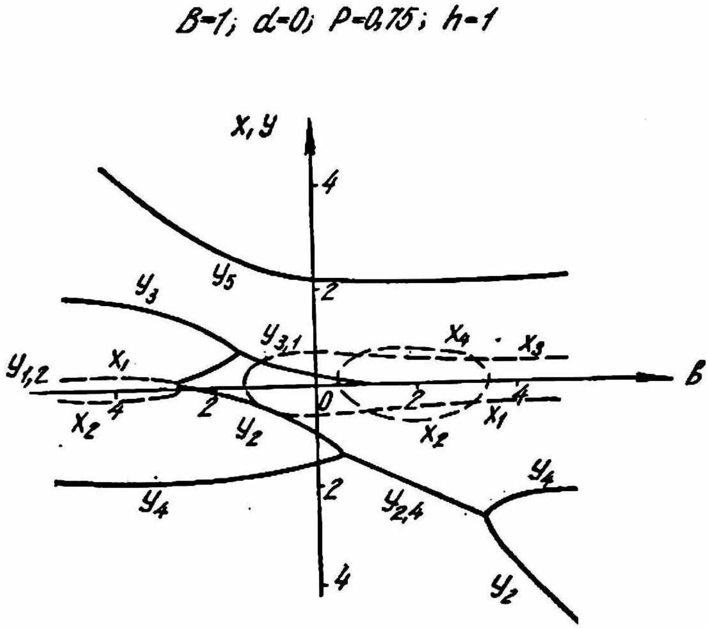

Рис. 1. Решение характеристического уравнения двулучевой ЛБВ.

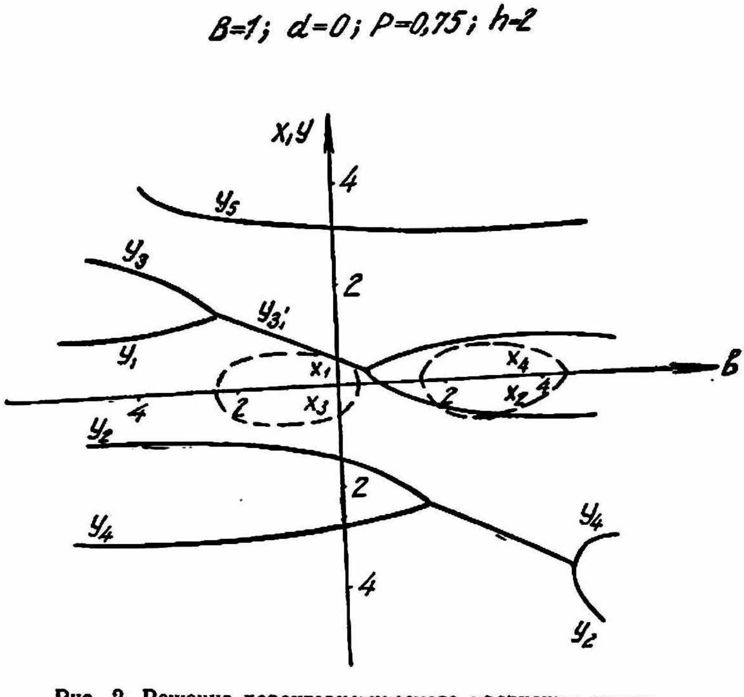

Рис. 2. Решение характеристического уравнения двулучевой ЛБВ.

При взаимодействии волны линии замедления с медленными волнами пространственного заряда электронных потоков возникает пара волн с меняющейся амплитудой (возрастающая и убывающая), как в однолучевой ЛБВ.

При взаимодействии ближайших по скорости волн пространственного заряда медленного и быстрого потоков возникает пара волн с меняющейся амплитудой, как в электронно-волновой лампе.

Для определенного соотношения параметров h, B, d и p в некотором интервале параметра скорости b в системе распространяются одновременно обе нарастающие волны. Результирующий сигнал на выходе системы определяется интерференцией двух нарастающих волн. Коэффициент усиления в этом случае может быть рассчитан по следующей формуле:

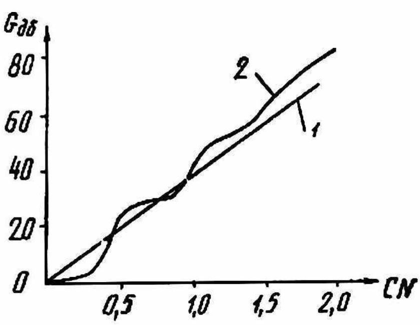

Рис. 3. Зависимость усиления от электрической длины лампы:
1 — однолучевой ЛБВ $B = 1$, $d = 0$, $b = 1$; 2 — двулучевой ЛБВ $B = 1$, $d = 0$, $p = 0{,}75$, $h = 1{,}25$, $b = 2$.

$$G = A_1 + 54{,}5CNx_1 + 10\lg\left[1 + 2\frac{E_1}{E_2}e^{2\pi CN(x_2-x_1)}\cos(2\pi CN\Delta y + \Delta\varphi) + \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 e^{4\pi CN(x_2-x_1)}\right], \tag{26}$$

где $A_{1,2}$ — параметр начальных потерь нарастающих волн;
CN — электрическая длина лампы;
$x_{1,2}$, $y_{1,2}$ — безразмерные амплитудные и фазовые постоянные электронных потоков;
$\Delta\varphi$ — начальная разность фаз.

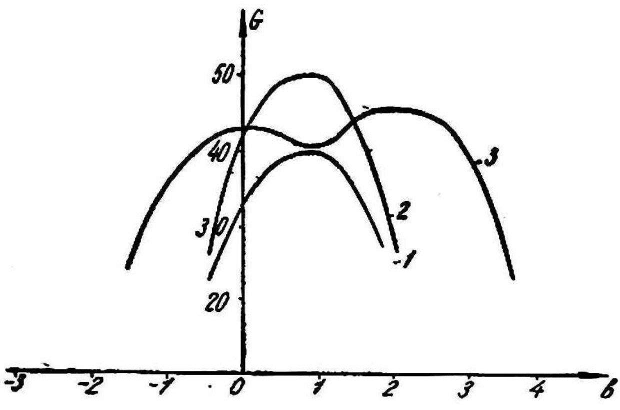

Рис. 4. Зависимость усиления от параметра скорости:
1 — однолучевой ЛБВ; 2 — однолучевой ЛБВ с удвоенным током пучка; 3 — двулучевой ЛБВ при $CN = 1$, $B = 1$, $d = 0$, $p = 0{,}75$, $h = 1{,}25$.

На рис. 3 и 4 показаны зависимость результирующего сигнала от приведенной длины лампы и коэффициент усиления от параметра скорости b. Расчет проведен без учета начальных фаз и амплитуд нарастающих волн и при отсутствии затухания в системе.

Из рисунков видно, что при выбранных значениях параметров наблюдается возрастание коэффициента усиления и расширение полосы пропускания двулучевой ЛБВ по сравнению с однолучевой.

Таким образом, задаваясь определенными соотношениями параметров в двулучевой ЛБВ, можно получить больший коэффициент усиления и шире полосу пропускания, чем в однолучевой для соответствующих параметров электронных потоков.

Авторы признательны А. М. Кобылину, выполнившему программирование и решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. K. Birdsall. Proc of the Symposium Millimeter Wases, 341, 1959.
2. Д. Р. Пирс. Лампа с бегущей волной. Изд-во «Советское радио», 1952.
3. И. К. Викулов, А. С. Тагер. «Радиотехника и электроника, 1962, № 5.
4. H. S. Wy, «Tubes hyperquences», Paris, 1965, 83—91.