К ТЕОРИИ МИЛЛИМЕТРОВОГО ПРЯМОПРОЛЕТНОГО КЛИСТРОНА С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ДРЕЙФА

Л. А. Поспелов

Харьков

В работе [1] показано, что специального вида неоднородные замедляющие поля способны эффективно группировать движущийся в них поток электронов, предварительно промодулированный по скоростям. Об этом говорилось также в ряде работ [2—6]. Так, в кинематическом приближении были рассмотрены тормозящие поля дрейфа, образованные слабо искривленными электродами. В работе [6] изучалось поле пространственного заряда электронов, движущихся в электростатическом плоском конденсаторе. Работы [4, 5] посвящены выяснению группировки электронов в полях, напряженность которых спадает по экспоненте. В работе [5] задача решается в линейном гидродинамическом приближении для случая, когда скорости электронов не меняют своего направления. В работе [4] рассмотрен нелинейный режим группирования электронов без учета кулоновского взаимовоздействия между ними. В ней разобран только случай отражающих полей, когда все электроны меняют направления движения на обратное.

Постановка задач, решенных во всех указанных работах, относилась к клистрону, т. е. в некоторой начальной плоскости была задана скоростная модуляция потока и находилось распределение плотности тока по прошествии некоторого времени. Из результатов этих работ можно сделать вывод, что группировка электронов происходит быстрее в том случае, когда поле дрейфа тормозящее и фокусирующее.

В настоящей работе это явление проанализировано количественно применительно к прямопролетному клистрону.

Группировка электронов в неоднородном поле дрейфа

Как показано в работе [1], влияние неоднородного поля дрейфа сводится к увеличению угла дрейфа и параметра группировки в G и E раз соответственно

$$G = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\varphi}}; \tag{1}$$

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{(1-\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

где $V_0(1-\varphi)$ — потенциал поля произвольной точки пространства по отношению к катоду.

Пусть потенциал поля дрейфа

$$\varphi(x') = \beta \frac{1 - e^{-\alpha x'}}{1 - e^{-\alpha}}, \quad x' = \frac{x}{L}. \tag{3}$$

При $\alpha = 0$ зависимость (3) имеет вид $\varphi(x') = \beta x'$;
при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — это тормозящее фокусирующее поле:
при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ — тормозящее дефокусирующее.

В этом легко можно убедиться, если считать, что выражение (3) представляет собой распределение потенциала вдоль оси аксиально-симметричной системы электродов. Можно воспользоваться соотношением для поля во всем пространстве через значение поля вдоль оси [2]. Для поля (3) получим

$$\varphi(r, x) = \beta \frac{1 - e^{-\alpha x'} I_0\left(\alpha \frac{r}{L}\right)}{1 - e^{-\alpha}}. \tag{4}$$

Отсюда следуют указанные свойства. Поля вида (1) весьма удобны, так как интегралы от них, встречающиеся в проводимом анализе, вычисляются точно. Кроме того, зависимость (3) очень близка к распределению поля вдоль оси системы сильно искривленных отражателей в отражательных клистронах.

Подставляя формулу (1) в выражение (7) и (8), получим

$$G_0 = \frac{2}{\alpha} I_1; \tag{4}$$

$$F_0 = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{b} \left\{ I_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} - 1 \right) \right\}, \tag{5}$$

где

$$b = \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha}} - 1; \tag{6}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{b}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{b}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{b}} \right\}, \quad b < 0; \tag{7}$$

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{|b|}} \ln \frac{(1 - \sqrt{|b|})(\sqrt{1-\beta} + \sqrt{|b|})}{(1 + \sqrt{|b|})(\sqrt{1-\beta} - \sqrt{|b|})}, \quad b > 0. \tag{8}$$

Для случая $\beta = 1$ (отражательный клистрон) эти соотношения имеют вид [24]

$$G_0 = \frac{2}{\alpha} I_1; \tag{9}$$

$$F_0 = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{b} \left\{ I_1 + \frac{1}{\sqrt{b}} \right\}, \tag{10}$$

где

$$b = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}; \tag{11}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad \alpha > 0: \tag{12}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \operatorname{Arth} \frac{1}{\sqrt{|b|}}, \quad \alpha < 0. \tag{13}$$

В приведенных формулах для случая пролетного и отражательного клистрона отличие имеет место лишь для выражений (5) и (10). Это объясняется тем, что во втором случае скорость любого электрона в конце пути всегда равна нулю, в первом — отлична от нуля.

Из соотношения (10) следует, что $F_0 \sim e^{\frac{3}{2}\alpha}$ при достаточно больших положительных α ($F < 1$ при $\alpha < 0$). В этом же случае $G_0 \sim e^{\frac{\alpha}{2}}$, т. е. G_0 также возрастает. Но величина $\gamma \equiv \frac{F}{G} \sim e^{\alpha} > 1$, характеризующая эффективность группировки в неоднородном поле, возрастает значительно быстрее. Если аппроксимировать зависимостью (1) поле в реальных отражателях миллиметровых клистронов, то можно убедиться, что в них используются отражатели с $\alpha \sim (2-2{,}5)$, т. е. достигается величина $F \gtrsim 10$.

Рассмотрим далее поведение функций (4)—(8) при изменении степени замедления β и параметра неоднородности α.
При $\alpha \to 0$

$$I_1 \simeq \alpha \frac{1 \quad \sqrt{1-\beta}}{\beta}; \tag{14}$$

$$G_0 = 2\frac{1-\sqrt{1-\beta}}{\beta};$$

$$G_{0|\beta=1} = 2; \; G_{0|\beta=0} = 1;$$

$$|F_0| = \frac{G_0}{\sqrt{1-\beta}}; \; |F_0|_{\beta=0} = 1; \; |F_0|_{\beta\to 1} \approx \frac{2}{\sqrt{1-\beta}}. \tag{15}$$

Из соотношения (15) следует, что однородное тормозящее поле способно ускорить группировку, если степень замедления достаточно велика. При очень сильном замедленном $(1-\beta \ll 1)\, |F_0| = |\gamma_0| = \frac{2}{\sqrt{1-\beta}}$. Заметим, что при $1-\beta = \frac{1}{2}\xi_1 M_1$ формулы (5), (7), (8) перестают быть справедливыми, так как они получены из выражений типа

$$G = \frac{2}{\alpha\sqrt{b+\varepsilon}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{b+\varepsilon}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\beta+\varepsilon}}{\sqrt{b+\varepsilon}}\right\} \text{ (для } b > 0).$$

путем разложения в ряд Тейлора по $\varepsilon\left(\varepsilon \equiv \frac{1}{2} M_1\xi_1\right)$. При этом

$$G_0 = G_{|\varepsilon=0};$$

$$F_0 = \left.\frac{dG}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Однако, если интересоваться маломощными клистронами миллиметровых длин волн, у которых $\frac{1}{2}\varepsilon_1 M_1 \sim$ к. п. д. $\sim 10^{-2}$, то можно считать, что $1-\beta > \frac{1}{2}\xi_1 M_1$.

Наиболее интересен другой предельный случай, когда $b = 0$. Это возможно, если

$$\beta = 1 - e^{-\alpha}. \tag{16}$$

При этом выражения для G_0 и F_0 приобретают весьма простой вид:

$$G_0 = \frac{2}{\alpha}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} - 1\right\} = \frac{2}{\alpha}\{e^{\alpha} - 1\}; \tag{17}$$

$$F_0 = \frac{2}{3\alpha}\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-\beta})^3} - 1\right\} = \frac{2}{3\alpha}\left\{e^{\frac{3}{2}\alpha} - 1\right\}. \tag{18}$$

Отсюда параметр эффективности группирования:

$$|\gamma_0| = \frac{1}{3}\frac{e^{\frac{3}{2}\alpha}-1}{e^{\frac{\alpha}{2}}-1}. \tag{19}$$

Из этого соотношения следует, что использование сильно неоднородных полей при достаточно высокой степени замедления позволяет существенно повысить эффективность группирования. Или другими словами можно сказать, что наименьшего замедления достаточно, если неоднородное поле имеет степень неоднородности, равную $\alpha = \ln\frac{1}{1-\beta}$. Таблица, построенная по зависимостям (15)—(18), иллюстрирует это утверждение на примере нескольких значений параметра неоднородности. Из таблицы следует, что коэффициент эффективности группировки может достигать больших величин, если β мала.

α	0	0,5	1,0	1,6	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,6
G	1	1,12	1,3	1,53	1,72	2,0	2,3	2,7	3,2	3,9
F	1	1,6	2,3	4,2	6,3	11	20	35	67	662
β	0	0,39	0,63	0,80	0,86	0,92	0,95	0,95	0,98	0,99

Волны пространственного заряда в электронном потоке

В качестве исходных соотношений, способных учесть кулоновское взаимодействие между группирующимися электронами, можно взять систему гидродинамических уравнений и уравнений поля, описывающих бесстолкновительную электронную плазму:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_0); \tag{20}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv}{\partial x} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n - n_0), \tag{22}$$

где v, n — скорость и плотность электронов;

E — напряженность самосогласованного электрического поля;

E_0 — поля внешних источников в случае, когда $n = n_0 = 0$;

n_0 — плотность ионов, определяемая соотношением

$$n_0 = \frac{i_0}{v},\ \bar{v} = \sqrt{\bar{v}_0^2 - \frac{2e}{m}\int_0^x dx E_0(x)}, \tag{23}$$

если $n_0 = \bar{n}$.

В соотношении (23) i_0 — средний ток электронов; $\bar{n}$, $\bar{v}$ и $\bar{v}_0$ — средняя по времени плотность и скорость электронов в точках x и $x = 0$ соответственно.

Можно показать, что система уравнений (20—22) переходом к переменным Лагранжа может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений* [9, 10]:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e n_0 \frac{v - v_0}{v}; \tag{24}$$

* Можно показать, что к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (24—26) сводится система гидродинамических уравнений плазмы и в случае, когда внешние силы и среда (диэлектрическая и магнитные проницаемости) неоднородны и не стационарны, а магнитное поле продольно и постоянно. Этот случай является предметом отдельного сообщения.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{e}{m}\,\frac{E + E_0}{v}; \tag{25}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}. \tag{26}$$

Плотность электронов n определяется из уравнения (22).

Исключая из этой системы E, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{m}{e}\,v\,\frac{dv}{dx} - E_0\right) = -4\pi\,\frac{v - v_0}{v}\,n_0 \tag{27}$$

и

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{4\pi i_0}\,\frac{dE}{dx}. \tag{28}$$

Последнее уравнение немедленно интегрируется

$$t - t_0 = \int\limits_0^x \frac{dx}{v_0} + \frac{E_0}{4\pi i_0}. \tag{29}$$

В выражении (29) использовано условие, что

$$t\,|_{x=0} = t_0 \text{ и } E\,|_{x=0} = 0. \tag{30}$$

Если

$$v\,|_{x=0} = v_0(t_0) = v_{00}\,\{1 + \varepsilon(t_0)\}, \tag{31}$$

то из уравнения (24) следует

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = \frac{e}{m}\,\frac{E_0(0)}{v_0(t_0)}. \tag{32}$$

В случае слабой скоростной модуляции

$$\nu \ll 1 \ (\varepsilon \ll 1) \tag{33}$$

уравнение (27) принимает более простой вид

$$\nu'' - (\nu')^2 = \pm \frac{\zeta_0 \nu}{\sqrt{1 - \beta\,\dfrac{1 - e^{-\frac{\alpha x}{L}}}{1 - e^{-\alpha}}}} + \beta\alpha^2\,\frac{e^{-\alpha\frac{x}{L}}}{1 - e^{-\alpha}}, \tag{34}$$

где штрих означает дифференцирование по $\frac{x}{L}$,

$$\zeta_0 = \frac{\omega_p L}{v_0(0)} \tag{35}$$

и поле $E_0(x)$ принято в виде экспоненциальной зависимости.

Для $\beta = 0$ уравнение (34) решается точно и приводит к известной зависимости [1].

Граничные условия для ν запишутся в виде

$$\nu(0) = \varepsilon(t_0); \tag{36}$$

$$\nu'(0) = 2\,\frac{\beta\alpha}{1 - e^{-\alpha}}\,[1 - \varepsilon(t_0)]. \tag{37}$$

Из уравнения (34) можно заключить, что даже при слабой скоростной модуляции уравнение движения остается нелинейным и с переменными коэффициентами. Найти точное решение его не представляется возможным*. Однако отдельные сведения о решении можно получить в результате качественного анализа его членов.

* Мы намерены провести полный анализ решения уравнения (34) путем численного счета на ЭВМ.

Сравним первое и второе слагаемое правой части уравнения. Первое из них обусловлено влиянием пространственного заряда, второе — внешнего поля. Наиболее неблагоприятный для группировки случай, когда первое слагаемое максимально по абсолютной величине, а второе минимально. Это наблюдается при $x = L$. Таким образом, если даже в этом случае первое слагаемое меньше второго, т. е.

$$\frac{\zeta_0 |\nu|_{\max}}{\sqrt{1-\beta}} \ll \beta\alpha^2 \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \approx \beta\alpha^2 e^{-\alpha}, \tag{38}$$

то преобладать будет группирующее влияние внешнего поля. Распишем неравенство (38) подробнее, вспомнив, что $\zeta_0 = \frac{\omega_p}{\omega}\theta_0$, $|\nu|_{\max} \sim \xi$ и проследим случай, когда $\beta = 1 - e^{-\alpha}$.

Тогда вместо выражения (38) можно написать

$$\frac{\omega_p}{\omega}\Theta_0\xi < \beta\alpha^2 e^{-\frac{3}{2}\alpha}. \tag{39}$$

Поток будет хорошо сгруппирован, если $\Theta_0\frac{\xi}{2} \sim \frac{2}{F}$. Но тогда неравенство (39) можно переписать в виде

$$\frac{\omega_p}{\omega} < \frac{\beta\alpha^2}{4} e^{-\frac{3}{2}\alpha} F \sim e^{-\frac{3}{2}\alpha} F. \tag{40}$$

Отсюда следует, что если неоднородное поле обеспечивает $F \sim e^{\frac{3}{2}\alpha}$, т. е. имеет вид, даваемый соотношением (18) предыдущего раздела, то оно способно компенсировать нежелательное влияние пространственного заряда, характерный параметр которого $\omega_p \sim \omega$. Следует отметить, что на группировку сильное влияние оказывает пространственный заряд с $\frac{\omega_p}{\omega} \sim \Theta_0^{-1} \approx (2\pi N)^{-1}$

Номера зон, используемые в миллиметровых отражательных клистронах коротковолновой части миллиметрового диапазона N, составляют величину порядка нескольких десятков единиц. Поэтому компенсировать приходится пространственный заряд с $\frac{\omega_p}{\omega} \sim 10^{-2}$, для чего достаточно значений F, удовлетворяющих соотношению $e^{\frac{3}{2}\alpha} \gg F > 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена группировка электронов в неоднородных полях дрейфа, производящих замедление электронного потока. При этом неявно предполагалось, что такие поля можно создать в клистронах миллиметровых и субмиллиметровых длин волн. Кроме того, считалось, что сильные замедления не ухудшают взаимодействия сгруппированного потока с полем резонатора.

Первое предположение можно оправдать следующим образом. С ростом частоты ω ускоряющее напряжение должно возрастать, чтобы сделать достаточно большим коэффициент взаимодействия. Использование неоднородных полей с $F > 1$ позволяет перейти к еще большим V_0. Поэтому в качестве минимальных напряжений можно брать те, которые уже используются в работающих конструкциях. Например, в работе [8] применяются $V = 25$ *кв*. При этом напряжении пространство дрейфа имеет размеры $\sim 1{,}5$ *см* (для $\lambda < 1$ *мм*).

Далее необходимо понять, какие размеры и форму должен иметь электрод, который бы обеспечил требуемую неоднородность α. Форма электродов (один из них — крышка резонатора) определяется соотношением $\varphi(r, x) = 0$; 1. Отсюда можно получить размер электрода. Однако в этом нет необходимости. В реальной конструкции может оказаться приемлемым электрод более простой формы, например, типа цилиндрической выточки, т. е. такой, как у отражательного клистрона. При этом размеры электрода, обеспечивающие $\alpha \sim 3$, должны быть $\sim (1—2)$ *мм*. Отсюда видно, что трудностей конструктивного оформления, по-видимому, нет.

Для того чтобы обеспечить $M_2 \sim 1$, необходимо ускорить сгруппированный поток. Разгруппировка, если она будет, выразится соотношением (1), т. е. эффект разгруппирования можно сделать ничтожно малым, если провести разгон электронов за время, значительно меньшее времени группирования. При этом пространственный заряд также не успеет проявить свои разгруппирующие свойства. Поэтому количественный расчет можно проводить в кинематическом приближении. Это довольно несложно, однако в этом нет необходимости.

Заметим, что использование эффективных группирующих полей с $F > 1$ позволяет, как это следует из соотношений (17—19), получать генерацию во многих зонах, что существенно облегчает индикацию в момент создания новой конструкции.

Во всех приборах типа клистрона использование неоднородных полей дрейфа, по-видимому, позволит уменьшить критичность режима работы к выбору внешних параметров и увеличить полосу электронной настройки частоты. Это видно из того, что расстояние между i_{max} и i_{min} увеличивается, во столько раз можно уменьшить $\cos\delta$ (увеличить $\Delta\omega$) либо при том же δ можно уменьшить ток i_0 и увеличить рабочее напряжение без срыва колебаний в приборе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Поспелов. См. статью настоящего сборника.
2. J. R. Pierce, W. G. Shephard, Bell Syst. Techn. Journ., **26** (3), 460, (1947).
3. Д. М. Петров. Об электронике отражательного клистрона. Автореф. канд. дисс., Москва, 1957.
4. K. H. Kupferschmidt, Archiv der Elektrisch. Ubertragung, Bd. 14., H. 11, 478, (1960).
5. П. В. Блиох. Высокочастотные колебания в электронных пучках с периодически меняющимися параметрами. Изд-во ХГУ, Харьков, 1959.
6. W. E. Waters, IRE Trans. on Electron Dev., **49**, 19 (1947).
7. I. Picht, Einfürung in die Theorie der Electronen Optic, Leipzig, 1957.
8. Р. Курант. Уравнения с частотными производными. Изд-во «Мир», 1964.
9. G. Kalman, Ann. Physics, **10**, (1), 1, (1960).
10. L. Solymar, J. Electr. a. Control, **10**, (N4, 165 (1961), **11** (N5) 361 (1961), **12** (N4) 313 (1962).
11. B. B. van Iperen, W. Kuypers, Philips Techn. Rev., **26** (N3) 462 (1965).