О ВЫБОРЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Ж. Ф. Пащенко, А. И. Терещенко

Харьков

В настоящее время системы резонаторов, связанных через отверстия, находят широкое применение в приборах сверхвысокочастотного диапазона. Связанные резонаторы могут быть использованы для перестройки и стабилизации частоты генераторов, в фильтрах, замедляющих системах и т. д.

Анализ таких систем затруднителен, так как целый ряд параметров (спектр частот, распределение полей и другие) может быть определен только после решения соответствующих электродинамических задач, которые, в свою очередь, сводятся к векторным интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям.

Как было показано в работах [1, 2], использование приближенных методов решения (метода Ритца или метода Галеркина) дает возможность свести интегральные уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений, которая может быть усечена и решена с требуемой точностью.

В работе [3] получено дисперсионное уравнение для спектра частот системы, состоящей из N резонаторов, связанных между собой через отверстия:

$$\begin{vmatrix} Y_{11}^{\mathrm{I}} + Y_{11}^{\mathrm{II}} & Y_{12}^{\mathrm{II}} & 0\; 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Y_{21}^{\mathrm{II}} & Y_{22}^{\mathrm{II}} + Y_{22}^{\mathrm{III}} & Y_{23}^{\mathrm{III}}\, 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots\; Y_{N-1,\,N-2}^{N-1} & & Y_{N-1,\,N-2}^{N-1} + Y_{N-1,\,N-1}^{N} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

где Y_{11}^{I}, $Y_{11}^{\mathrm{II}}, \ldots$ $Y_{N-1,\,N-1}^{N}$, Y_{12}^{II}, $Y_{23}^{\mathrm{III}}, \ldots, Y_{N-1,\,N-2}^{N-1}$ — клеточные матрицы собственных и взаимных проводимостей соответствующих резонаторов. Каждый из элементов определителя (1) является функцией касательных составляющих электрического поля $\vec{E}_\tau$ на отверстиях связи между резонаторами.

Одна из основных трудностей при решении системы (1) состоит в выборе подходящей аппроксимации функции $\vec{E}_\tau$. Для наиболее часто используемого на практике случая связи через прямоугольное отверстие (рис. 1) в качестве аппроксимирующей функции может быть выбран тригонометрический ряд Фурье [1],

$$\vec{E}_\tau = \sum_q e_q \vec{E}_q \qquad (2)$$

где $\vec{E}_q \sim \sin \frac{n\pi x}{A} \vec{e}_y$, $n = 1; 2, \ldots$, A — длина отверстия связи.

Точность определения корней уравнения (1) в значительной степени зависит от того, насколько аппроксимирующая функция передает все особенности поля в отверстии связи.

Баукамп [4]: а затем Майкснер [5] показали, что при решении задач дифракции, к которым может быть отнесена и рассматриваемая задача, необходимо потребовать для касательных составляющих поля удовлетворения условию на ребре. Согласно этому условию, нормальная компонента электрического поля имеет на ребре особенность вида $\rho^{-1/2}$ и терпит бесконечно большой разрыв при переходе с нижней границы отверстия на верхнюю. В связи с этим при решении уравнения (1) для резонаторов, связанных через прямоугольные или круглые отверстия, либо через отверстия, которые приводятся к таким простым формам путем использования методов конформного отображения, в качестве аппроксимирующей функции может быть взят полином Чебышева первого рода с весом

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

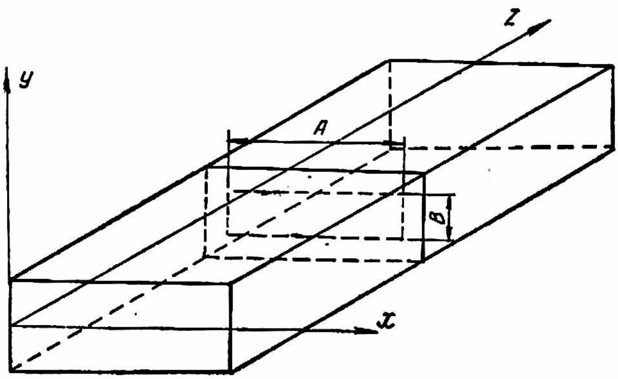

Рис. 1.

Этот полином ортогонален в интервале (—1, +1), т. е.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_k(y)\,T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m \\ \pi & \quad k = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \quad k = m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

В работах В. Л. Гончарова [6] и С. Н. Бернштейна [7] исследована сходимость ортогональных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(y)$, где в качестве $\varphi_n(y)$ взяты указанные полиномы Чебышева.

По приведенным формулам был произведен расчет спектра частот некоторых видов связанных резонаторов — прямоугольных, цилиндрических, а также сложной системы связанных резонаторов, состоящей из коаксиального, N — прямоугольных и цилиндрического резонаторов (рис. 2).

На этом рисунке P_1 — коаксиальный резонатор, P_2 — прямоугольные резонаторы, P_3 — цилиндрический резонатор, образующие вместе анодный блок коаксиального обращенного магнетрона.

В качестве аппроксимирующих функций были выбраны

1) собственные функции отверстий связи (в данном случае это тригонометрические ряды Фурье)

$$\vec{E}_q = \sqrt{\frac{2}{BA}} \sin\frac{n\pi x}{A}\,\vec{e}_y,$$

B — ширина отверстия;

2) полиномы Чебышева

$$\vec{E}_q = \frac{2}{\sqrt{\pi A}} \frac{T_{2m}\left(\frac{2y}{B}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2y}{B}\right)^2}} \sin\frac{n\pi x}{A}\vec{e}_y.$$

Было учтено по 15 членов для обеих аппроксимаций.

Сравнение результатов эксперимента с расчетными данными, полученными с помощью ЭЦВМ «Урал-2», показало, что ошибка в случае аппроксимации рядом Фурье не превосходит 5%, а в случае аппроксимации

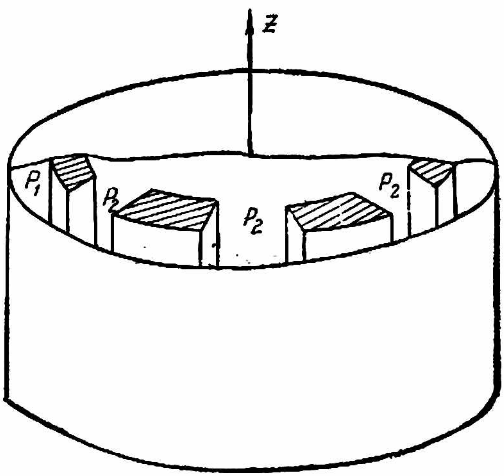

Рис. 2.

с использованием полиномов Чебышева — 3%. При выборе в качестве аппроксимирующих функций систем, хорошо учитывающих особенности функции на границе, количество членов ряда может быть уменьшено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Б. Ф. Емелин. Теория волноводов. Изд-во «Наука», М., 1966.
2. В. В. Никольский. Вариационные методы для внутренних задач. Изд-во «Наука», 1967.
3. Ж. Ф. Пащенко, А. И. Терещенко, А. Е. Зайцев, Г. Е. Бабиченко, В. П. Степанов. Тезисы докладов XVII Украинской республиканской научно-технической конференции, посвященной Дню радио, Киев, 1967.
4. G. J. Bouwkamp, Phil. Res. Reports, v 5, № 6, 1950, p. 401—422.
5. J. Meixner, Z. Naturforschung, 3a, 1948, p. 506—518.
6. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. ГИТТЛ, 1954.
7. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, 1954.