О ГРАНИЦАХ СРЕДНЕГО РИСКА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ДАННЫХ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПО ЭКВИДИСТАНТНОМУ КАНАЛУ

Е. В. Митряев

Ленинград

Свойства систем связи с эквидистантными (равноудаленными) сигналами [1] описываются переходной матрицей

$$Qij = \begin{Vmatrix} Qq & \dots & q \\ qQ & \dots & q \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ qq & \dots & Q \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

где $i,\ j = 1,\ 2,\ \dots\ N$;

N — общее число сигналов;

Q — вероятность правильного приема сигнала:

q — вероятность трансформации переданного сообщения в определенное другое сообщение.

При этом, очевидно, соблюдается условие

$$Q + (N - 1)\,q = 1 \qquad (2)$$

Такими свойствами обладают, в частности, системы связи с ортогональными сигналами [1] с использованием совершенных кодов [2] и «взвешенной импульсно-кодовой модуляции» [3], минимизирующей абсолютную ошибку. Для краткости каналы связи таких систем будем называть эквидистантными.

Выведем формулу для вероятности появления погрешности

$$Y = |X - Z|, \qquad (3)$$

где Z — принятое число при условии передачи числа X.

В дальнейшем будем предполагать передаваемые и принимаемые числа и погрешности нормированными по максимуму шкалы измерения

$$X,\ Y,\ Z \in [0,1]. \qquad (4)$$

Пусть при передаче числа $X \leqslant 0{,}5$ произошла ошибка. Ввиду того, что под погрешностью мы понимаем модуль разности переданного и принятого значений, погрешности $0 < Y \leqslant X$ могут произойти с вероятностью вдвое большей, чем $X < Y \leqslant 1 - X$. При этом, согласно условию (4), погрешности $Y > 1 - X$ невозможны. Для больших точностей отсчета можно перейти к плотности вероятности погрешностей

$$p^*_{X < 0{,}5}(Y) = \begin{cases} 2A & \text{при } 0 < Y \leqslant X, \\ A & \text{при } X < Y \leqslant 1 - X, \\ 0 & \text{при } 1 - X < Y \leqslant 1, \end{cases} \qquad (5)$$

где A — постоянная и знак * означает, что плотность вероятности определена при дополнительном условии возникновения ошибки. Из условия нормировки

$$\int_0^1 p_X^*(Y) = 1$$

имеем $A = 1$.

Аналогичным образом

$$p_{X>0,5}^*(Y) = \begin{cases} 2 \text{ при } 0 < Y \leqslant 1 - X, \\ 1 \text{ при } 1 - X < Y \leqslant X, \\ 0 \text{ при } X < Y < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Плотности вероятностей (5) и (6) нетрудно преобразовать к форме, более удобной для расчетов

$$p_X^*(Y) = q_X(Y) + r_X(Y), \tag{7}$$

где

$$q_X(Y) = \begin{cases} 1 \text{ при } Y \leqslant 1 - X, \\ 0 \text{ при } Y > 1 - X, \end{cases}$$

$$r_X(Y) = \begin{cases} 1 \text{ при } Y \leqslant X \\ 0 \text{ при } Y > X. \end{cases}$$

Во многих случаях оценка качества передачи количественных данных производится по усредненной величине s-ой степени смещенных погрешностей

$$m_s = \int_0^1 Y^s p(Y)\, dY. \tag{8}$$

Следуя А. Вальду, будем называть m_s средним риском при степенной функции потерь [4]. При $s = 1$ выражение (8) имеет смысл абсолютной ошибки измерений, при $s = 2$ — дисперсии ошибок и т. д.

Рассмотрим влияние распределения передаваемых чисел X на величину среднего риска (8). Совместная плотность чисел X и погрешностей Y может быть представлена в виде

$$p(X, Y) = P p_X^*(Y)\, p(X), \tag{9}$$

где P — вероятность появления погрешности $Y \neq 0$;
$p(X)$ — плотность вероятностей X.

Отсюда плотность вероятностей погрешностей

$$p(Y) = P \int_0^1 p(X)\, p_X^*(Y)\, dX. \tag{10}$$

Подставляя выражения (7) и (10) в (8), получим

$$m_s = P \int_0^1 \int_0^1 Y^s [q_X(Y) + r_X(Y)\, p(X)\, dX dY = P \int_0^1 p(X)\, S_s(X)\, dX, \tag{11}$$

где

$$S_s(X) = \int_0^1 Y^s [q_X(Y) + r_X(Y)]\, dY = \frac{(1-X)^{s+1} + X^{s+1}}{s+1} \tag{11a}$$

— условный риск при s-ой степени функции потерь.

На рис. 1 приведены функции условного риска для $s = 1$, 2 и 3.

Из выражения (11) или рис. 1 легко заметить, что средний риск зависит от вида плотности распределения $p(X)$. Для установления границ этой зависимости найдем распределения, максимизирующие и минимизирующие средний риск.

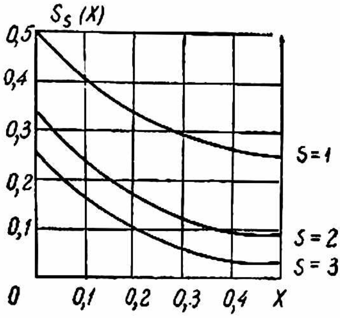

Рис. 1.

Математически задача ставится следующим образом. Требуется найти функцию $p(X)$, дающую экстремум функционалу (8) при ограничивающем условии

$$\int_0^1 p(X)\,dX = 1, \quad p(X) \geqslant 0. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что классические способы вариационного исчисления с применением уравнений Эйлера [5], в данном случае решения не дают. В связи с этим применим прямой метод решения поставленной изопериметрической задачи [5].

Будем искать $p(X)$ в виде суммы Римана

$$p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \xi_i(X), \tag{13}$$

где

$$\xi_i(X) = \begin{cases} 1 \text{ при } i\Delta X < X < (i+1)\Delta X, \\ 0 \text{ при других } X, \end{cases}$$

$Ci = p(i\Delta X)$ и $n = \frac{1}{\Delta X}$ — целое.

В новых обозначениях условие (12) преобразуется к виду

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i = n, \qquad C_i \geqslant 0 \tag{14}$$

Решение этой задачи достаточно тривиально: максимум функционала (8) для $s > 0$ достигается при

$$C_0 + C_{n-1} = n, \qquad C_i (i = 1, 2, \ldots, n-2) = 0 \tag{15}$$

и минимум при

$$C \sim \frac{n}{2} = 2, \qquad C_i\left(i \neq \sim \frac{n}{2}\right) = 0, \tag{16}$$

где $\sim \frac{n}{2}$ при четном n означает ближайшее целое к $\frac{n}{2}$.

При этом в пределе $(n \to \infty)$ получаем

$$m_{s\,\max} = PS_s(0) = \frac{P}{s+1},$$

$$m_{s\,\min} = PS_s(0{,}5) = \frac{P}{s+1} 0{,}5^s. \tag{17}$$

Заметим, что для эквидистантных каналов изменение порядка сопоставления сигналов и передаваемых цифровых данных не влияет на средний риск. Это следует из свойства равноудаленности сигналов. Строгое доказательство может быть проведено по методике, изложенной в работе [6]. Поэтому выражения (17) описывают верхнюю и нижнюю границы среднего риска.

Введем в рассмотрение оценку величины разброса среднего риска при изменении распределения параметра

$$\eta = 2\frac{S_{max} - S_{min}}{S_{max} + S_{min}}.$$

Подставляя выражения (17), получим

$$\eta(s) = 2\frac{1 - 0{,}5^s}{1 + 0{,}5^s}. \qquad (18)$$

График функции (18) приведен на рис. 2.

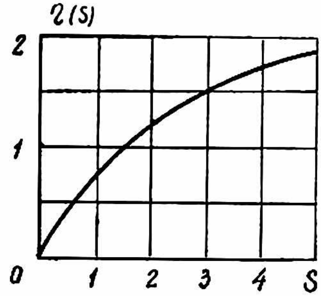

Рис. 2.

ВЫВОДЫ

Качество дискретной передачи количественных данных по эквидистантным каналам, оцениваемое по величине среднего риска при степенной функции потерь, зависит не только от уровня искажений, но и от вида функции, описывающей распределение передаваемых чисел. В частности, при передаче отсчетов случайного процесса уровень результирующего шума зависит от одномерного распределения мгновенных значений.

Относительное изменение среднего риска при переходе от наиболее предпочтительного к наименее предпочтительному распределению зависит от степени функции потерь и для дисперсии погрешностей составляет $\pm 60\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Советское радио», 1963.
2. У. Питерсон. Коды, исправляющие ошибки. Изд-во «Мир», 1964.
3. E. Bedrosian. Weighted PCM, Trans, IRE on IT, v. IT—4, 1958, № 1.
4. Л. С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Госэнергосбыт, 1961.
5. Н. И. Ахиезер. Лекции по вариационному исчислению. ГИТТЛ, 1955.
6. Е. В. Митряев. О передаче телеметрической информации при помощи групповых кодов. «Радиотехника и электроника», т. VIII, № 6, 1963.