О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБОК ПРИ ПРЯМОМ ДВОИЧНОМ КОДЕ

Е. В. Митряев

Ленинград

Характерной особенностью большинства реальных каналов связи является их нестационарность. Это находит отражение в математических моделях нестационарных потоков ошибок, простейшей из которых является модель выбросов (пакетов) ошибок, когда вероятность ошибки достигает величин 0,3—0,4 [1]. В то же время при выводе формул среднего квадрата ошибок (СКО) обычно предполагается малая вероятность искажений. Это значительно упрощает вычисления, однако, получающиеся результаты, естественно, имеют ограниченное применение.

Цель данной работы заключается в выводе общих формул для определения **СКО** при использовании прямого безызбыточного двоичного кода (импульсно-кодовой модуляции), справедливых для всего диапазона возможных вероятностей ошибок, включая случай «обратной работы», при котором вероятность ошибок близка к единице.

Рассмотрим передачу по двоичному симметричному каналу (ДСК) n-разрядных двоичных чисел X_i $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$; $x^i(n-1)$ $(n-2)\ldots x^i(0)$, образованных цифрами 0 и 1.

При прямом кодировании, соответствующем арабскому написанию,

$$X_i = \sum_{\alpha=0}^{n-1} x^i(\alpha)\, 2^\alpha.$$

Искажение в канале любого из разрядов вызывает соответствующую погрешность при приеме. Если искажены t разрядов с весами $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t$, то модуль погрешности составит

$$|Y_{i,t,j}| = \Big|\sum_{k=1}^{t} \Delta x^i(\alpha_k)\, 2^{\alpha_k}\Big|, \tag{1}$$

а ее квадрат

$$Y_{i,t,j}^2 = \sum_{k=1}^{t} 2^{2\alpha_k} + 2\sum_{k=2}^{t}\sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{x^i(\alpha_k) + x^i(\alpha_l)}\, 2^{\alpha_k+\alpha_l}, \tag{2}$$

где индексом j обозначена конкретная комбинация искаженных разрядов (вектор ошибок),

Для ДСК все C_n^t векторов ошибок с одинаковым числом искажений t равновероятны. Поэтому с учетом соотношений (2) для фиксированного t средний квадрат погрешности составит

$$\overline{Y_{i,t}^2} = \frac{1}{C_n^2}\sum_{j=1}^{C_n^t} Y_{i,t,j}^2 = \frac{1}{C_n^t}\sum_{j=1}^{C_n^t}\sum_{k=1}^{t} 2^{2\alpha_k} +$$

$$+\frac{1}{C_n^t}\sum_{j=1}^{C_n^t}\sum_{k=2}^{t}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{x^j(\alpha k)+x^j(\alpha l)}2^{\alpha k+\alpha l+1}. \tag{3}$$

Выражение для $Y_{i,t}^2$ может быть записано в более простой форме, если заметить, что в двойной сумме соотношения (3) имеется всего C_{n-1}^{t-1} слагаемых $2^{2\alpha k}$, поскольку фиксация элемента αk уменьшает общее число элементов n, из числа которых производится выбор, и число выбираемых элементов t на единицу. Аналогичным образом в тройной сумме соотношения (3) имеется C_{n-2}^{t-2} слагаемых $(-1)^{x^j(\alpha_k)+x^j(\alpha_l)}2^{\alpha_k+\alpha_l+1}$ Поэтому из соотношений (3) имеем

$$Y_{i,t}^2=\frac{C_{n-1}^{t-1}}{C_n^t}\sum_{\alpha=0}^{n-1}2^{2\alpha}+\frac{C_{n-2}^{t-2}}{C_n^t}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}(-1)^{x^i(\alpha)+x^i(\beta)}2^{\alpha+\beta+1}=$$

$$=-\frac{t}{n}\frac{1}{3}(2^{2n}-1)+\frac{t(t-1)}{n(n-1)}D(X_i), \tag{4}$$

где

$$D(X_i)=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}(-1)^{x^i(\alpha)+x^i(\beta)}2^{\alpha+\beta+1} \tag{5}$$

и, как обычно, $C_n^r=0$ при $r<0$.

Используя метод доказательства по индукции, покажем, что соотношение (5) может быть записано в виде

$$D(X_i)=4\left(X_i-\frac{2^n-1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(2^{2n}-1) \tag{6}$$

При $n=2$ из выражения (5) имеем

$$D(X_i)=(-1)^{x(1)+x(0)}2^{1+0+1}=4(-1)^{x(1)+x(0)},$$

откуда

$$D(X=0)=D(00)=4;$$
$$D(X=1)=D(01)=-4..$$

Производить вычисления для $X=2$ и $X=3$ нет необходимости, поскольку, как следует из выражения (5), $D(\bar{X})=D(X)$, где через $\bar{X}$ изображено двоичное число с заменой 0 на 1 и 1 на 0.

Те же значения $D(X)$ получаются и из формулы (6).

Далее, пусть равенство (6) справедливо при $n=n^*$,

$$D(X_i)n^*=4\left(X_i-\frac{2^{n^*}-1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(2^{2n^*}-1). \tag{7}$$

Из выражения (5) видно, что при переходе от n^* к n^*+1 во внешней сумме добавляется член $\alpha=n^*$. Остальные члены остаются неизменными. Это дает приращение

$$\Delta D(X_i)=\sum_{\beta=0}^{n^*-1}(-1)^{x^i(n^*)+x^i(\beta)}2^{n^*+\beta+1}.$$

Чтобы оставить величину X_i прежней, необходимо положить

$$X_i(n^*)=X_i(n^*+1)-x(n^*)2^{n^*},$$

что эквивалентно предположению $x^i(n^*)=0$. Поэтому

$$\Delta D(X_i)=\sum_{\beta=0}^{n^*-1}(-1)^{x^i(\beta)}\,2^{n^*+\beta+1}. \tag{8}$$

Для двоичных цифр справедливо тождество

$$(-1)^x=1-2x,$$

поэтому из выражения (8) имеем

$$\Delta D(X_i)=\sum_{\beta=0}^{n^*-1}[1-2x^i(\beta)]\,2^{n^*+\beta+1}=2^{n^*+1}\Big[\sum_{\beta=0}^{n^*-1}2^\beta-2\sum_{\beta=0}^{n^*-1}x^i(\beta)\,2^\beta\Big]=$$
$$=2^{n^*+1}(2^{n^*}-1-2X_i). \tag{9}$$

Подставляя в равенство

$$D(X_i)_{n^*+1}=D(X_i)_{n^*}+\Delta D(X_i)$$

соотношения (7) и (9), после преобразований нетрудно получить

$$D(X_i)_{n^*+1}=4\left(X_i-\frac{2^{n^*+1}-1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(2^{n^*+2}-1),$$

что и завершает доказательство справедливости равенства (6).

Таким образом, подставляя формулу (6) в (4), имеем

$$Y^2_{i,t}=\frac{t}{n}\frac{1}{3}(2^{2n}-1)+\frac{t(t-1)}{n(n-1)}\left[4\left(X_i-\frac{2^n-1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(2^{2n}-1)\right]. \tag{10}$$

Квадрат погрешности Y_i^2 с учетом вероятностей ошибок разной кратности $P(t)$ определяется выражением

$$Y_i^2=\sum_{t=1}^{n}Y^2_{i,t}P(t). \tag{11}$$

Для ДСК вероятность ошибки кратности t описывается формулой

$$P(t)=C_n^t p^t q^{n-t}, \tag{12}$$

где p — вероятность искажения любого разряда и $q=1-p$.

Подставляя выражения (10) и (12) в (11), после преобразований получим

$$Y_i^2=\frac{1}{3}(2^{2n}-1)\,p+\left[4\left(X_i-\frac{2^n-1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(2^{2n}-1)\right]p^2,$$

откуда приведенный квадрат погрешностей

$$\gamma\left(\frac{X_i}{2^n-1}\right)=\frac{Y_i^2}{(2^n-1)^2}=\frac{1}{3}\frac{2^{2n}-1}{(2^n-1)^2}p+\left[\left(2\frac{X_i}{2^n-1}-1\right)^2-\frac{1}{3}\frac{2^{2n}-1}{(2^n-1)^2}\right]p^2 \tag{13}$$

По своему смыслу выражение (13) совпадает с приведенным по максимуму шкалы измерений условным риском при квадратичной функции потерь [2].

При больших n из формулы (13) имеем

$$\gamma(x)\approx\frac{1}{3}p(1-p)+(2x-1)^2p^2, \tag{14}$$

где $x=\dfrac{X_i}{2^n-1}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Формула (14) с инженерной точностью справедлива начиная с $n = 5 \div 6$. График зависимости $\gamma(x)$ для различных p приведен на рис. 1.

Рассмотрев графики, замечаем, что зависимость условного риска от x проявляется лишь при больших $p > (0,1, \div 0,2)$. При малых p этой зависимости не наблюдается. Из формулы (14) при малых p имеем

$$\gamma(x) = \gamma \approx \frac{1}{3} p, \tag{15}$$

где γ — приведенный средний квадрат погрешностей (СКО), не зависящий от распределения передаваемых количественных данных.

Формула (15) совпадает с известной из литературы [3].

В общем случае средний риск, при квадратичной функции потерь совпадающий с СКО, может быть определен усреднением условного риска (14) по распределению передаваемых данных

$$\gamma = \int_0^1 \gamma(x)\, p(x)\, dx, \tag{16}$$

где $p(x)$ — плотность вероятности x.

Рассмотрим влияние плотности вероятности $p(x)$ на СКО. Из выражений (4) и (5) следует, что $Y^2_{i,t}$ при любом t достигает максимума, если все слагаемые в D положительны,

$$x^i(\alpha) = x^i(\beta)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\beta = 0, 1, \ldots, n-2).$$

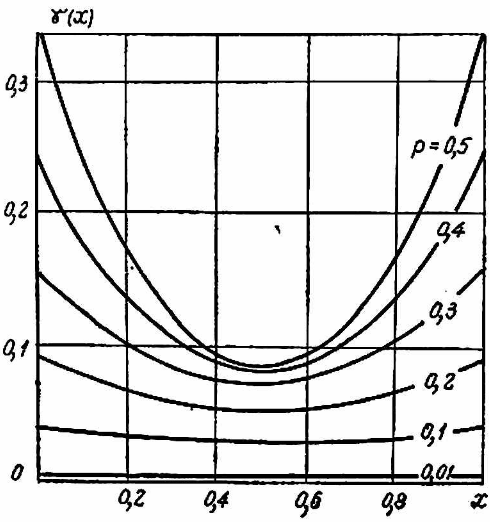

Рис. 1.

Другими словами, $Y^2_{i,t}$ максимально для $X = 0$ или $X = 2^n - 1$. Из формулы (10) видно, что минимум $Y^2_{i,t}$ при любых t достигается для $X = 2^{n-1} - 1$ или $X = 2^{n-1}$. Поэтому при любых распределениях $P(t)$ максимум и минимум Y^2 могут быть получены из выражений (11) и (10) для $X = 0$ и $X = 2^{n-1}$. При этом должно выполняться условие равновероятности всех ошибок одинаковой кратности, использованное при выводе этих формул.

Для получения конкретных границ положим, что передача производится по ДСК, для которого $P(t)$ описывается формулой (12). В этом случае плотность наименее предпочтительного распределения $p_1(x)$, максимизирующего СКО, может быть записана в виде

$$p_1(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака;

$p_2(x) = \delta(0,5 - x)$ — плотность наиболее предпочтительного распределения.

Подставляя $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в формулу (16), получим

$$\max_{p(x)} \gamma = \frac{1}{3} p + \frac{2}{3} p^2 \tag{17}$$

и

$$\min_{p(x)} \gamma = \frac{1}{3} p - \frac{1}{3} p^2, \tag{18}$$

Графики функций (17) и (18) приведены на рис. 2. Как и следовало ожидать, при малых p эти границы асимптотически сближаются к пределу, даваемому формулой (15). При больших величинах $p > 0{,}1$ влияние вида одномерного распределения передаваемых числовых данных становится заметным и при $p = 0{,}5$ отношение максимума и минимума СКО становится равным 4. Таким образом, ДСК при передаче количественной информации с помощью прямого двоичного кода принципиально является нелинейным каналом, причем его нелинейность тем больше, чем больше вероятность искажения элементарного импульса.

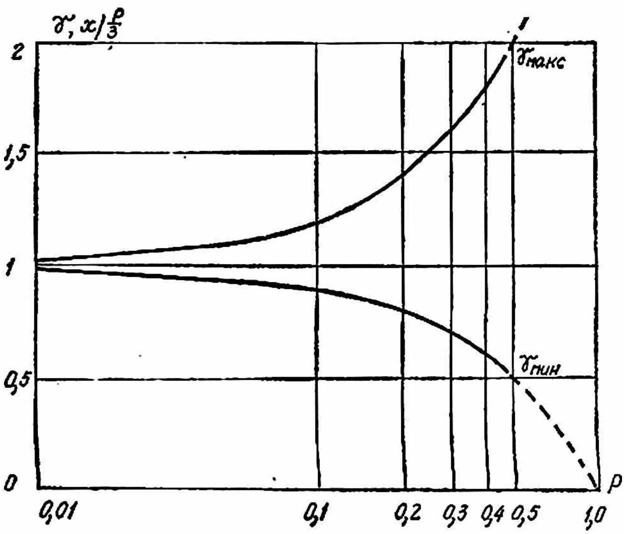

Рис. 2.

Для иллюстрации влияния практически встречающихся распределений приведем пример треугольной плотности распределения с модой $x^* = 0{,}5 + d$ $(0{,}5 < |d|$,

$$p_3(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x}{0{,}5 - d} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 - d, \\ 2\dfrac{1 - x}{0{,}5 + d} & \text{при } 0{,}5 - d < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя $p_3(x)$ в формулу (16), после вычислений получим

$$\gamma_3 = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}p^2 - \frac{p^2}{6}(5 - 4d^2). \tag{20}$$

Графики функции $\gamma_3(d)$ при параметре p приведены на рис. 3. Сравнивая рис. 2 и рис. 3, видим, что при распределениях, отличных от δ-распределений, границы (17) и (18) не достигаются и влияние вида априорного распределения на СКО ослабевает. Заметим также, что формула (15) справедлива не только для малых p, но и для любых $p < 1$, если плотность распределения $p(x)$ отвечает некоторым условиям. В частности, она верна при равномерном распределении.

ВЫВОДЫ

ДСК при передаче количественных данных с помощью прямого двоичного кода является нелинейным каналом, степень нелинейности которого зависит от вероятности искажения элементарного импульса p. При малых p такой канал является асимптотически линейным.

При любых распределениях $p(x)$ для ДСК средний квадрат ошибок может быть вычислен по формуле (16).

Верхняя и нижняя границы СКО для всевозможных распределений передаваемых количественных данных определяются формулами (10) и (11) соответственно при $X = 0$ и $X = 2^{n-1}$, что справедливо для любых распределений векторов ошибок по их кратностям, если все векторы ошибок одинаковой кратности равновероятны. Для ДСК эти границы даются формулами (17) и (18).

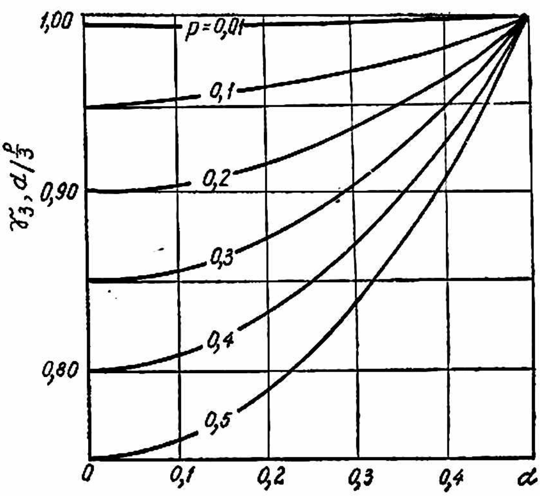

Рис. 3.

Для ряда распределений $p(x)$ известная из литературы формула (15) для определения СКО справедлива не только при малых p, но и при любых значениях p. В частности, эта формула справедлива для равномерного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гуров и др. Основы передачи данных по проводным каналам связи. Связьиздат, 1964.

2. Л. С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.

3. В. А. Каширин, Г. А. Шастова. Помехоустойчивость передачи сигналов телеизмерения по каналу с флуктуационными помехами. «Автоматика и телемеханика», т. XIX, № 8, 1958.