О ВЛИЯНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА НА РАЗРЕШАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА

В. А. Омельченко

Харьков

Достигаемая разрешающая способность спектроанализатора при спектральном анализе зависит от времени анализа и динамического диапазона составляющих сигналов. В литературе [1, 2] рассматривают определение времени анализа, при котором обеспечивается требуемая разрешающая способность без учета динамического диапазона. Влияние последнего описывают [3] для определенного вида анализирующих фильтров.

В настоящей статье предлагается способ определения разрешающей способности в зависимости от динамического диапазона и времени анализа при анализе узкополосным произвольным фильтром.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА ПО ТЕКУЩЕМУ СПЕКТРУ ВЗВЕШЕННОГО СИГНАЛА

При определении разрешающей способности спектроанализатора обычно используют временную точку зрения. Считают, что две гармоники разрешены, если в суммарном отклике от них существуют два однозначно определимых максимума, соответствующих частотам гармоник.

При одновременном анализе для разрешения составляющих сигнала

$$f(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t, \tag{1}$$

представляющего собой сумму двух гармоник разных частот, необходимо время анализа $T_а$, в течение которого на выходе каждого из фильтров с центральными частотами $\omega_{ф_1} = \omega_1$ и $\omega_{ф_2} = \omega_2$ формируется отклик, содержащий информацию о соответствующей гармонике. В этом случае в огибающей отклика, который формируется на выходе фильтра с центральной частотой $\omega_{ф_2}$ при условии $U_1 > U_2$, существует седловина, разделяющая временные интервалы преимущественного влияния каждой из гармоник.

Поэтому в качестве критерия разрешающей способности может быть принято условие определенного превышения амплитуды колебаний в момент времени $t = T_а$ над амплитудой колебаний в момент времени $t = t_с$ (здесь $t_с$ — время появления седловины в огибающей отклика).

Критерий разрешающей способности может быть представлен в виде

$$\frac{A(T_а)}{A(t_с)} = a, \tag{2}$$

где $A(t)$ — амплитуда колебаний огибающей отклика на выходе фильтра с центральной частотой $\omega_{ф_2}$,

a — величина превышения.

Найдем выражение для критерия разрешающей способности при спектральной точке зрения.

Пусть $g(t)$ — временная характеристика произвольного узкополосного фильтра. Из работы [1] известно, что она может быть представлена в виде

$$g(t) = \operatorname{Re} V(t)\, e^{j\omega_\phi t} = V_1(t)\sin\omega_\phi t + V_2\cos\omega_\phi t,$$

где ω_ϕ — центральная частота фильтра.

Тогда сигнал (1) создает на выходе фильтра отклик

$$y(t) = \int_0^t (U_1\cos\omega_1\tau + U_2\cos\omega_2\tau)\cdot \operatorname{Re} V(t-\tau)\, e^{j\omega_\phi(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \operatorname{Re} e^{j\omega_\phi t} S_\text{в}(\omega_\phi,\ t), \tag{3}$$

где

$$S_\text{в}(\omega_\phi,\ t) = \int_0^t (U_1\cos\omega_1\tau + U_2\cos\omega_2\tau)\, V(t-\tau)\, e^{-j\omega_\phi\tau}\, d\tau$$

— текущий спектр взвешенного сигнала с весом $V(t-\tau)$.

Представив выражение (3) в виде

$$y(t) = S_{1\text{в}}(\omega_\phi,\ t)\cos\omega_\phi t - S_{2\text{в}}(\omega_\phi,\ t)\sin\omega_\phi t,$$

где $S_{1\text{в}}(\omega_\phi t)$ и $S_{2\text{в}}(\omega_\phi t)$ — соответственно действительная и мнимая составляющие спектра взвешенного сигнала, получаем, что огибающая отклика

$$A(t) = \sqrt{[S_{1\text{в}}(\omega_\phi,\ t)]^2 + [S_{2\text{в}}(\omega_\phi,\ t)]^2}$$

совпадает с амплитудным текущим спектром взвешенного сигнала $|S_\text{в}(\omega_\phi, t)|$.

Поэтому при условии

$$\omega_{\phi 1} = \omega_1$$
$$\omega_{\phi 2} = \omega_2$$

критерий разрешающей способности (2) может быть представлен в виде

$$\frac{\left|\int_0^{T_\text{а}} f(\tau)\, V(T_\text{а}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|}{\left|\int_0^{t_\text{с}} f(\tau)\, V(t_\text{с}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|} = a, \tag{4}$$

где

$$\left|\int_0^{T_\text{а}} f(\tau)\, V(T_\text{а}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|,$$

$$\left|\int_0^{t_\text{с}} f(\tau)\, V(t_\text{с}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|$$

— значение амплитудного текущего спектра взвешенного сигнала на частоте $\omega = \omega_{\phi_2}$, соответственно, при $t = T_\text{а}$ и $t = t_\text{с}$.

Выражение (4) можно привести к виду

$$\frac{\left|\int_0^{T_\text{а}} U_2\cos\omega_2\tau V(T_\text{а}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|}{\left|\int_0^{T_\text{а}} U_1\cos\omega_1\tau V(T_\text{а}-\tau)\, e^{-j\omega_{\phi_2}\tau}\, d\tau\right|} = p, \tag{5}$$

где величина превышения p определяется из условия

$$p = \left\{ a^2 \frac{\left[\left|\int\limits_0^{t_c} f(\tau) V(t_c - \tau) e^{-j\omega_{\phi_2}\tau} d\tau\right|\right]^2}{\left[\left|\int\limits_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau) e^{-j\omega_{\phi_2}\tau} d\tau\right|\right]^2} - \right.$$

$$-1 - 2\left[\frac{\int\limits_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau)\cos\omega_{\phi_2}\tau\, d\tau}{\left[\left|\int\limits_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau) e^{-j\omega_{\phi_2}\tau} d\tau\right|\right]^2} \times \right. \tag{6}$$

$$\times \int\limits_0^{T_a} U_2 \cos\omega_2\tau V(T_a - \tau)\cos\omega_{\phi_2}\tau\, d\tau +$$

$$\left. \left. + \frac{\int\limits_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau)\sin\omega_{\phi_2}\tau\, d\tau}{\left[\left|\int\limits_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau) e^{-j\omega_{\phi_2}\tau} d\tau\right|\right]^2} \cdot \int\limits_0^{T_a} U_2 \cos\omega_2\tau V(T_a - \tau)\sin\omega_{\phi_2}\tau\, d\tau \right] \right\}^{1/2}.$$

Условие (5) означает, что для разделения составляющих сигнала (1) необходимо, чтобы амплитуда взвешенного текущего спектра меньшей из составляющих на ее частоте имела определенное превышение над амплитудой взвешенного текущего спектра большей составляющей на той же частоте.

Так как выполняется равенство

$$\omega_{\phi_2} = \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega$ — разрешающая способность при динамическом диапазоне уровней сигнала

$$D = \frac{U_1}{U_2},$$

условие разрешения (5) преобразуется в выражение

$$\frac{\left|\int\limits_0^{T_a} \cos(\omega_1 + \Delta\omega)\,\tau V(T_a - \tau) e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau} d\tau\right|}{\left|\int\limits_0^{T_a} \cos\omega_1\tau V(T_a - \tau) e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau} d\tau\right|} = pD, \tag{5'}$$

которое представляет собой уравнение для определения разрешающей способности $\Delta\omega$ в функции от времени анализа T_a и динамического диапазона D. Учитывая конкретный вид временной характеристики фильтра, можно определить функциональную зависимость

$$\Delta\omega = \Delta\omega(T_a, D).$$

Критерий разрешающей способности можно трактовать также в терминах амплитуд колебаний, создаваемых гармониками в анализирующих фильтрах.

Представив (5) в виде

$$\frac{1}{U_1}\left|\int_0^{T_a} U_1 \cos\omega_1\tau V(T_a-\tau)\, e^{-j\omega_{\Phi}\tau}\, d\tau\right| = \frac{p_ш U_ш}{pD}, \qquad (5а)$$

где

$$p_ш = \frac{\left|\int_0^{T_a} \cos\omega_2\tau V(T_a-\tau)\, e^{-j\omega_{\Phi}\tau}\, d\tau\right|}{U_ш}$$

— количественная характеристика пороговой чувствительности по отношению к шумам, $U_ш$ — эффективное значение шума, получаем, что для разделения составляющих сигнала требуется затухание вынужденных колебаний в фильтре с центральной частотой ω_{Φ}, до $\frac{p_ш U_ш}{pD}$ исходного уровня.

2. ЗАВИСИМОСТЬ $\Delta\omega = \Delta\omega(T_a D)$ ДЛЯ ФИЛЬТРА С ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ТИПА $\frac{\sin x}{x}$

По критерию разрешения в форме (5) найдем искомую зависимость для фильтра с временной характеристикой

$$g(t) = \begin{cases} \cos\omega_p t, & 0 \leqslant t \leqslant T_a \\ 0 & t \,\bar{\in}\, [0,\ T_a]. \end{cases}$$

В этом случае отклик

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} \int_0^t f(\tau)\cos\omega_{\Phi}(t-\tau)\, d\tau, & 0 \leqslant t \leqslant T_a \\ 0, & t \,\bar{\in}\, [0,\ T_a] \end{cases}$$

имеет огибающую

$$A(t) = \begin{cases} \left\{\left[\int_0^t f(\tau)\cos\omega_{\Phi}\tau\, d\tau\right]^2 + \left[\int_0^t f(\tau)\sin\omega_{\Phi}\tau\, d\tau\right]^2\right\}^{1/2}, & 0 \leqslant t \leqslant T_a \\ 0 & t \,\bar{\in}\, [0,\ T_a], \end{cases}$$

которая совпадает с текущим спектром сигнала для моментов времен $0 \leqslant t \leqslant T_a$. При $t = T_a$ огибающая отклика

$$y(T_a) = \left\{\left[\int_0^{T_a} f(\tau)\cos\omega_{\Phi}\tau\, d\tau\right]^2 + \left[\int_0^{T_a} f(\tau)\sin\omega_{\Phi}\tau\, d\tau\right]^2\right\}^{1/2}$$

равна огибающей спектра отрезка сигнала длительности T_a.

Текущий спектр гармоник имеет осциллирующий характер. Поэтому при определении разрешающей способности из условия (5') требуем, чтобы одновременно выполнялось условие

$$\frac{d}{d\,\Delta\omega}\left|\int_0^{T_a} \cos\omega_1\tau e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau}\,d\tau\right| = 0, \tag{7}$$

т. е. в рассматриваемом случае разрешающую способность можно определить из системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\left|\int_0^{T_a} \cos(\omega_1+\Delta\omega)\,\tau e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau}\,d\tau\right|}{\left|\int_0^{T_a} \cos\omega_1\tau e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau}\,d\tau\right|} - pD = 0;\\ \frac{d}{d\,\Delta\omega}\left|\int_0^{T_a} \cos\omega_1\tau e^{-j(\omega_1+\Delta\omega)\tau}\,d\tau\right| = 0\end{gathered} \tag{8}$$

Система уравнений (8) соответствует требованию превышения основного максимума амплитудного спектра меньшей гармоники над максимумом некоторого бокового лепестка амплитудного спектра большей гармоники на частоте, меньшей при длительности отрезка сигнала T_a.

Для сигнала (1) система (8) при $\omega_1 \gg \Delta\omega$ имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\sin\frac{\Delta\omega T_a}{2}}{\frac{\Delta\omega T_a}{2}} = \frac{1}{pD};\\ \operatorname{tg}\frac{\Delta\omega T_a}{2} = \Delta\omega\frac{T_a}{2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Решением системы (9) является один из корней $\frac{\Delta\omega_к T_a}{2}$ ее второго уравнения, которые стремятся к значениям аргумента $\frac{2k+1}{2}\pi$, т. е.

$$\frac{\Delta\omega_к T_a}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi - \varepsilon_к,$$

причем для отклонения $\varepsilon_к$ значения корня от $\frac{2k+1}{2}\pi$ выполняется асимптотическое приближение

$$\varepsilon_к \sim \frac{1}{k\pi}. \tag{10}$$

Отклонения $\Delta\varphi_к$ максимальных значений функции $\frac{\sin x}{x}$ от значений в точках $\frac{2k+1}{2}\pi$ получаем, пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа. С учетом (10) асимптотическое приближение для величин максимумов имеет вид

$$\Delta\varphi_к \sim \frac{1}{k^2\pi^2}. \tag{11}$$

Асимптотики для положений (10) и величин (11) максимумов функции $\frac{\sin x}{x}$ показывают, что при больших диапазонах, когда сравнивается максимум амплитудного текущего спектра малой гармоники с максимумом удаленного лепестка амплитудного текущего спектра большей гармоники, первое уравнение системы (9) можно представить в виде

$$\Delta f = \frac{pD}{\pi T_{\text{в}}}. \qquad (12)$$

ВЫВОДЫ

1. Зависимость разрешающей способности от времени анализа с учетом динамического диапазона при анализе произвольным узкополосным фильтром может быть определена по текущему спектру взвешенного сигнала.

2. Для фильтра с частотной характеристикой типа $\frac{\sin x}{x}$ при больших динамических диапазонах D разрешающая способность пропорциональна D.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
2. Н. Ф. Воллернер и В. Г. Криксунов. Некоторые вопросы автоматизации аппаратурного спектрального анализа. «Приборы и техника эксперимента». Изд-во АН СССР, 1962.
3. В. А. Мартынов, Ю. И. Селихов. Панорамные приемники и анализаторы спектра. Изд-во «Советское радио», 1964.