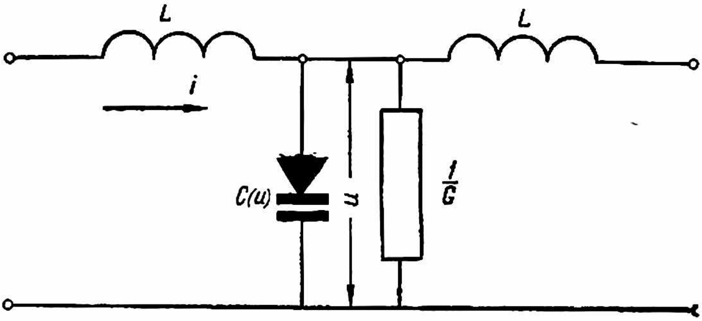
К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПО ЛИНИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ $p-n$ ПЕРЕХОДА

В. А. Артеменко

Харьков

Проблема распространения электромагнитных волн по нелинейным длинным линиям в последнее время все чаще привлекает к себе внимание. Интерес к этим вопросам обусловлен возможностью получения весьма крутых перепадов напряжения или тока. Сама же возможность получения крутых перепадов связана с использованием линий со слабо выраженной дисперсией. В этом случае, со спектральной точки зрения, различные гармонические составляющие взаимодействуют между собой и создаются условия для значительного расширения спектрального состава первоначального воздействия. С временной точки зрения происходит уменьшение длительности переднего и увеличение длительности заднего фронта импульса, обусловленное различием в скоростях распространения различных уровней напряжения.



Эквивалентная схема ячейки длинной линии с нелинейной емкостью p—n перехода.

Рассмотрим распространение сигнала по линии, ячейка которой схематически изображена на рисунке. Заметим, что на рисунке отсутствует источник смещающего напряжения, поэтому по такой линии возможно распространение сигнала только отрицательной полярности.

Линия, приведенная на рисунке, описывается следующей системой квазилинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= - C(u)\frac{\partial u}{dt} - Gu, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - L\frac{di}{dt}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(x, t)$, $i(x, t)$ — напряжение и ток в линии, L, $C(u)$, G — соответственно погонные индуктивность, нелинейная емкость и утечка в линии.

Исключая ток, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2}-LC'(u)\left(\frac{\partial u}{dt}\right)^2-LC(u)\frac{\partial^2 u}{dt^2}-LG\frac{\partial u}{dt}=0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-L\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-LG\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{2}$$

где q — заряд на емкости.

Выражение для дифференциальной емкости сплавного $p-n$ перехода имеет вид

$$\frac{dq}{du}=C(u)=C_0\left(1+\frac{E_{\text{см}}}{\varphi_{\text{к}}}+\frac{u}{\varphi_{\text{к}}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $\varphi_{\text{к}}$ — контактная разность потенциалов,
$E_{\text{см}}$ — напряжение обратного смещения,
C_0 — емкость $p-n$ перехода при отсутствии всех смещающих напряжений.

Пусть для малых u выражение (3) в окрестности $E_{\text{см}}$ может быть разложено в ряд Тэйлора:

$$\frac{dq}{du}=C(0)+C'(0)u+\frac{1}{2!}C''(0)u^2+\cdots, \tag{4}$$

где штрихами обозначены производные соответствующего порядка.

Ограничиваясь для емкости линейным приближением, путем интегрирования разложения (4), получаем выражение

$$q(u)=Cu+Du^2. \tag{5}$$

В предыдущем выражении для упрощения записи введены обозначения $C=C(0)$ и $D=\frac{1}{2}C'(0)$. Рассмотрим случай слабо нелинейной и слабо дисперсной линии, т. е. предположим, что выполняется условие

$$C'(0)\ll C(0)$$

и величины D и G можно представить в виде

$$D=\varepsilon D \text{ и } G=\varepsilon G, \tag{6}$$

где ε — малый параметр.

Подставив выражения (5) и (6) в (2), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-L(C+2\varepsilon Du)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\varepsilon LD\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\varepsilon LG\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{7}$$

Известно, что в случае линейной линии без потерь решением исходных уравнений будет служить уравнение вида

$$u=F(t-x\sqrt{LC}),$$

т. е. по линии распространяется сигнал неизменной амплитуды и формы. В нашем случае будем считать, что форма распространяющегося сигнала будет медленно меняться с расстоянием, что допустимо ввиду слабой нелинейности и слабой дисперсности линии. Поэтому решение уравнения (7) будем искать в виде

$$u = u(\varepsilon x,\ t - x\sqrt{LC}), \tag{8}$$

где C — емкость, не зависящая от напряжения.

Этот метод решения является естественным обобщением группы методов «малого параметра» на случай уравнений с частными производными. Он применялся и ранее [1].

Введем новые переменные

$$z = \varepsilon x, \quad \tau = (t - x\sqrt{LC}), \tag{9}$$

которые уже не являются независимыми, а связаны соотношениями (9). Представим производные, входящие в уравнение (7), в новых переменных. Учитывая (8), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2};\\ \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial z} - \sqrt{LC}\frac{\partial u}{\partial \tau};\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\varepsilon\sqrt{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial z\cdot\partial \tau} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Подставляя соотношения (10) в уравнение (7) и пренебрегая членами порядка малости ε^2, приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[2\sqrt{LC}\frac{\partial u}{\partial z} + LD\frac{\partial (u^2)}{\partial \tau} + LGu\right] = 0,$$

которое после интегрирования переписывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u\frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta u = \varphi(z). \tag{11}$$

В выражении (11)

$$\alpha = D\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{2}G\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Пусть на левом конце линии заданы граничные условия

$$x_0 = 0, \quad u_0 = \psi(t_0). \tag{12}$$

Найдем решение уравнения (11) при граничных условиях (12). Характеристическая система для уравнения (11):

$$\frac{dz}{ds} = 1; \quad \frac{d\tau}{ds} = \alpha u; \quad \frac{du}{ds} = \varphi(z) - \delta u, \tag{13}$$

где s — произвольный параметр.

Предположим, что начальное распределение вдоль линии нулевое, т. е. $\varphi(z) = 0$. Тогда, интегрируя (13), получим

$$\begin{gathered}z = s + z_0; \quad u = u_0 e^{-\delta s};\\ \tau = \frac{\alpha}{\delta}u_0(1 - e^{-\delta s}) + \tau_0.\end{gathered} \tag{14}$$

Система (14) определяет интегральную поверхность уравнения (11), проходящую через кривую $l(z,\ \tau,\ u)$ в пространстве, которая задана граничными условиями (12). Задача нахождения этой поверхности известна под названием задачи Коши. Обратим внимание, что постоянные интегрирования в (14) определены так, чтобы координаты линии l служили начальными данными при $s = 0$.

Подставляя в (14) условия (12), в новых переменных получим

$$z = s; \quad u = \psi(\tau_0)\, e^{-\delta s}; \qquad (15)$$

$$\tau = \frac{a}{\delta}\psi(\tau_0)\left(1 - e^{-\delta s}\right) + \tau_0.$$

Из трех выражений (15) легко получаем решение уравнения (11), разрешенное в явном виде относительно переменной τ:

$$\tau = \frac{a}{\delta} u\left(e^{\delta z} - 1\right) + \lambda\left(u e^{\delta z}\right), \qquad (16)$$

где λ определяется как функция, обратная функции ψ, т. е., если

$$\alpha = \psi(\beta), \text{ то } \beta = \lambda(\alpha).$$

Если подставить в первое из уравнений (1) значение дифференциальной емкости dq/du, полученное из (5), то следствием системы (1) будет уравнение связи между напряжением и током:

$$\frac{du}{di} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Du}{C} + \frac{G}{C}\cdot\frac{u}{\partial u/\partial t}}},$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{du}{di} = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 - \frac{Du}{C} - \frac{G}{2C}\cdot\frac{u}{\partial u/\partial t}\right).$$

Исследуем, как меняется профиль действующего на входе линии напряжения при распространении последнего по линии. Пусть на входе линии действует линейно изменяющееся напряжение, которое в переменных z, τ можно записать:

$$z = 0, \quad u = \begin{cases} k\tau & \text{для } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 \\ k\tau_1 & \text{для } \tau \geqslant \tau_1. \end{cases} \qquad (17)$$

Учитывая (17), решение (16) будет иметь вид

$$\tau = \frac{a}{\delta} u\left(e^{\delta z} - 1\right) + \frac{1}{k} u e^{\delta z}.$$

Разрешая предыдущее выражение относительно u, получим

$$u = \frac{\tau}{\left(\frac{1}{k} + \frac{a}{\delta}\right)e^{\delta z} - \frac{a}{\delta}}.$$

Изменение формы напряжения по мере распространения вдоль линии характеризуется частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau\left(\frac{1}{k} + a\right)e^{\delta z}}{\left[\left(\frac{1}{k} + \frac{a}{\delta}\right)e^{\delta z} - \frac{a}{\delta}\right]^2},$$

которая при определенных условиях может неограниченно возрастать. Известно, что для емкости $p-n$ перехода коэффициент $C'(0)$ в разложении (4) меньше нуля. Поэтому $D<0$ и $\alpha<0$. Тогда условием обращения производной $\partial u/\partial z$ в бесконечность служит равенство

$$\left(\frac{1}{k}-\frac{\alpha}{\delta}\right)e^{\delta z^*}+\frac{\alpha}{\delta}=0, \tag{18}$$

где z^* — координата, при которой $\partial u/\partial z$ обращается в бесконечность и, следовательно, образуется ударная волна. Из (18) следует, что

$$z^*=-\frac{1}{\delta}\ln\left(1-\frac{\delta}{k\alpha}\right). \tag{19}$$

Для получения положительных значений z^* необходимо, чтобы

$$0<1-\frac{\delta}{k\alpha}\leqslant 1. \tag{20}$$

Из выражения (20) можно заключить, что чем больше крутизна входного напряжения и чем больше степень нелинейности емкости, тем при меньшей длине линии образуется ударная волна. Кроме того, существует критическое затухание

$$\delta=k\alpha,$$

при превышении которого ударная волна не может образоваться ни при какой длине линии.

Из изложенного ясно, что при формировании ударных волн применение высокодобротных емкостей с высокой степенью нелинейности резко уменьшает необходимую длину линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Хохлов. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях, «Радиотехника и электроника», 1961, № 6.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.