О РЕШЕНИИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

В. А. Артеменко

Харьков

Теория линейных цепей в настоящее время хорошо разработана. Нелинейные линии еще недостаточно изучены, поэтому исследование решений исходных уравнений в нелинейном случае представляет определенный интерес.

Пусть в рассматриваемой линии погонная емкость будет функцией напряжения, причем активные потери в линии отсутствуют. Тогда линия описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -L\frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -C(u)\frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

где u, i — напряжение и ток в линии;
L, $C(u)$ — погонные индуктивность и емкость;
z, t — расстояние и время.

Вводя для сокращения записи $B^2 = LC(u)$ и исключая из системы (1) ток, получаем уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - B^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2BB'\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

Полученное уравнение является нелинейным относительно первой производной напряжения по времени. Кроме того, коэффициенты, входящие в уравнение, зависят от искомой функции, так как $B = B(u)$. Известно, что решением системы (1) в линейном случае является выражение вида

$$u = \varphi(z - vt) \text{ или } u = \psi\left(t - \frac{z}{v}\right), \tag{3}$$

где v — скорость распространения возмущения по линии.

Оказывается, что в нелинейном случае решением системы (1) будет служить выражение такого же вида:

$$u = \varphi\left(t - \frac{z}{v}\right), \tag{4}$$

или, учитывая ранее введенное обозначение $B^2 = LC(u)$, а также то, что характеристиками системы (1) служат прямые линии

$$v = \frac{dz}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{LC(u)}}, \tag{5}$$

запишем выражение (4) как

$$u = \varphi(t - Bz). \tag{4'}$$

Заметим, что в качестве искомого решения мы выбрали второе из выражений (3), поскольку при исследовании распространения возмущения по линии нам чаще всего задаются граничные, а не начальные условия. Поэтому решение в виде (4) легко согласуется с временными функциями, заданными в качестве граничных условий.

В справедливости решения (4′) можно убедиться непосредственной подстановкой. С этой целью определим все производные, входящие в уравнение (2).

Для первых производных из (4′) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varphi'}{1 + \varphi' B' z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\varphi'' B}{1 + \varphi' B' z}. \tag{6}$$

Для второй производной по времени можно получить выражение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\varphi'' - B'\varphi' z \frac{\partial u}{\partial t} - (\varphi')^2 B'' z \frac{\partial u}{\partial t}}{(1 + \varphi' B' z)^2},$$

которое после использования (6) окончательно приведет к

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\varphi'' - (\varphi')^3 B'' z}{(1 + \varphi' B' z)^3}. \tag{7}$$

Аналогично вторая производная по расстоянию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{B^2\varphi'' + BB'(\varphi')^2 + (BB'\varphi'' z - \varphi' B - (\varphi')^2 (B')^2 z + B(\varphi')^2 z B'')\frac{\partial u}{\partial z}}{(1 + \varphi' B' z)^2}$$

после подстановки в нее значения $\partial u/\partial z$ из выражения (6) приведет окончательно к

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{B^2\varphi'' + 2BB'(\varphi')^2 + 2B(B')^2(\varphi')^3 z - B^2(\varphi')^3 B'' z}{(1 + \varphi' B' z)^3}. \tag{8}$$

Третий член в уравнении (2)

$$2BB'\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{2BB'(\varphi')^2 + 2B(B')^2(\varphi')^3 z}{(1 + \varphi' B' z)^3}. \tag{9}$$

Подставляя полученные выражения (7), (8) и (9) в исходное уравнение (2), для

$$\varphi' B z \neq 1 \tag{10}$$

получим выражение

$$B^2\varphi'' + 2BB'(\varphi')^2 + 2B(B')^2(\varphi')^3 z - B^2(\varphi')^3 B'' z -$$
$$- B^2(\varphi'' - (\varphi')^3 B'' z) - 2BB'(\varphi')^2 - 2B(B')^2(\varphi')^3 z \equiv 0,$$

которое и является следствием того, что (4′), где φ произвольная функция, служит решением исходной системы (1).

Таким образом, если на левом конце линии задано граничное условие

$$u(t, 0) = F(t), \tag{11}$$

то выражение

$$u(t, z) = F\left(t - \frac{z}{v(u)}\right) \tag{12}$$

будет служить решением задачи распространения граничного возмущения вдоль линии, причем решением в неявном виде. В большинстве случаев (12) не может быть разрешено в явном виде относительно $u(t, z)$, поэтому при исследовании качественной картины процесса иногда целесообразно пользоваться приближенными методами.

Взаимосвязь между током и напряжением в линии легко определить непосредственно из системы (1), из которой следует, что

$$i = \int_0^u \sqrt{\frac{C(\alpha)}{L}}\, d\alpha. \tag{13}$$

Итак, при заданных граничных условиях (11) выражения (12) и (13), дополненные условием (5), будут служить решениями исходных уравнений (1). Полученные решения описывают «простые волны» в длинной линии. Однако решение в виде простой волны не может существовать неограниченно долго, так как большинство нелинейных емкостей уменьшают свою величину при увеличении напряжения, в результате чего

$$B' < 0$$

и условие (10) с течением времени нарушается. После этого выражения (12) и (13) уже не будут описывать правильной картины, поскольку решение станет неоднозначным. Далее решение может быть представлено в виде ударных волн, но исследование процесса образования и дальнейшего движения ударных волн не входит в задачу настоящего сообщения.

Пусть в качестве емкости в длинной линии используется емкость смещенного в обратном направлении $p-n$ перехода, которая может быть записана в виде

$$C = C_0 (a + bu)^{-\frac{1}{2}},$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$a = 1 + E_{\text{см}}/\varphi_{\text{к}} \text{ и } b = 1/\varphi_{\text{к}}.$$

В предыдущих выражениях $E_{\text{см}}$ — напряжение обратного смещения, $\varphi_{\text{к}}$ — контактная разность потенциалов, C_0 — емкость при отсутствии всех смещающих напряжений.

В этом случае для связи тока с напряжением при помощи выражения (13) получим

$$i = \int_0^u \sqrt{\frac{C_0}{L}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{a + b\alpha}} = \frac{4}{3b} \sqrt{\frac{C_0}{L}} \left(\sqrt[4]{(a + bu)^3} - \sqrt[4]{a^3} \right).$$

В заключение отметим, что последнее выражение не может быть представлено в виде простого соотношения

$$i = u \cdot 1/w,$$

справедливого для линейного случая, где w — волновое сопротивление.