

УРАВНЕНИЯ ПЛАВАЮЩЕГО ТРАНСФОРМАТОРА

Э. А. Свирцева

Харьков

Термин «плавающий», отнесенный к многополюснику, пока еще плохо известен в литературе. Он обозначает, что ни один из внешних выводов многополюсника не соединен с узлом схемы, принятым за базисный. Уравнения плавающего многополюсника полностью определяют его поведение при любом способе подключения к схеме. Если есть уравнения плавающего трансформатора, из них всегда можно вывести, например, уравнения проходного трансформатора, которые на сегодня довольно тщательно изучены. Обратный же переход возможен далеко не всегда. Таким образом, проходной трансформатор можно рассматривать как частный случай плавающего [1].

Уравнения плавающего многополюсника должны связывать между собой все внешние токи и напряжения его. Это могут быть токи и напряжения, относящиеся к внешним сторонам или к внешним полюсам многополюсника. Например, для четырехполюсника (рис. 1, а) напряжения и токи сторон — это $\dot{I}_{12}, \dot{I}_{24}, \dot{I}_{43}, \dot{I}_{31}, \dot{U}_{12}, \dot{U}_{24}, \dot{U}_{43}, \dot{U}_{31}$, а напряжения и токи полюсов — $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4$. И форму уравнений многополюсника можно выбрать по-разному. Все системы уравнений при любом выборе переменных равноценны в математическом отношении, каждая система может быть приведена к любой другой. Но для нас наиболее подходят уравнения узловых напряжений

$$\|\dot{I}\| = \|y\| \cdot \|\dot{U}\| \quad (1)$$

Здесь $\|\dot{I}\|$ — матрица-столбец полюсных токов (в случае четырехполюсника, показанного на рис. 1, состоит из $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$);

$\|\dot{U}\|$ — матрица-столбец узловых напряжений (в нашем случае она состоит из $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4$);

$\|y\|$ — квадратная матрица проводимостей, у которой величины коэффициентов зависят от природы многополюсника.

О преимуществе такой формы уравнений говорилось в работе [2]. В нашем случае эта форма удобна еще и потому, что дает возможность физической интерпретации тех преобразований, которым мы будем подвергать эти уравнения. Например, разложению матричного уравнения (1) на два

$$\|\dot{I}'\| = \|y'\| \cdot \|\dot{U}\|; \quad (2)$$

$$\|\dot{I}''\| = \|y''\| \cdot \|\dot{U}\|, \quad (3)$$

где

$$\|\dot{I}'\| + \|\dot{I}''\| = \|\dot{I}\|; \quad (4)$$

$$\|y'\| + \|y''\| = \|y\| \quad (5)$$

соответствует расслоение исходного многополюсника на два, соединенных между собой параллельно посредством внешних полюсов (рис. 1, а). Это позволяет рассматривать обособленно влияние различных явлений, имеющих место в трансформаторе, на его работу.

Нам удобнее рассматривать отдельно токораспределение в трансформаторе, обусловленное электрическим полем в нем, и отдельно — токораспределение, обусловленное магнитным полем, так как они не связаны

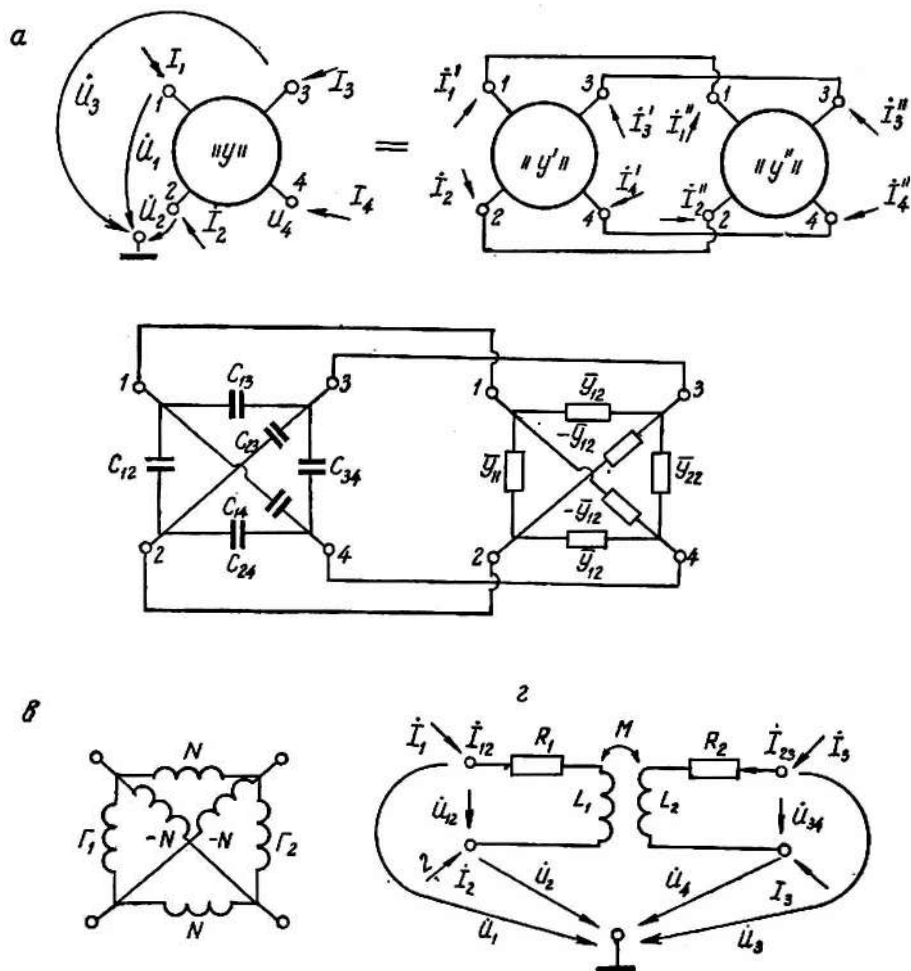


Рис. 1. Схемы замещения плавающего трансформатора.

между собой. Первое определяется напряжениями внешних узлов трансформатора $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4$, а второе — напряжениями, приложенными к обмоткам, т. е. разностями узловых напряжений $\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2$ и $\dot{U}_{34} = \dot{U}_3 - \dot{U}_4$.

Пусть уравнение (2) учитывает токи, определяемые напряжениями узлов. Из теории цепей известно, что проводимости, существующие между полюсами внутри обратимого четырехполюсника, можно отразить с помощью эквивалентной схемы, состоящей из шести различных двухполюсников

ков (рис. 1, б). Величины проводимостей этих двухполосников определяются матрицей

$$\|y'\| = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} & y'_{14} \\ y'_{12} & y'_{22} & y'_{23} & y'_{24} \\ y'_{13} & y'_{23} & y'_{33} & y'_{34} \\ y'_{14} & y'_{24} & y'_{34} & y'_{44} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Предполагаем, что проводимости между отдельными полюсами трансформатора существуют за счет паразитных емкостей. Поэтому на первых порах положим, что двухполосники состоят из емкостей. Тогда матрица $\|y'\|$ принимает вид

$$\|y'\| = j\omega \begin{vmatrix} C_{12} + C_{13} + C_{14} & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} + C_{24} & -C_{23} & -C_{24} \\ -C_{13} & -C_{23} & C_{13} + C_{23} + C_{34} & -C_{34} \\ -C_{14} & -C_{24} & -C_{34} & C_{14} + C_{24} + C_{34} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Эквивалентная схема, соответствующая такой матрице, показана на рис. 1, б.

Перейдем к уравнению (3). Будем считать, что оно учитывает явления, в которых принимает участие магнитное поле (явления самоиндукции и взаимной индукции). Для трансформатора это наиболее существенные явления, так как они положены в основу его работы. Матрица $\|y''\|$ для трансформатора без потерь известна.

$$\|y''\| = \frac{\begin{vmatrix} L_2 & -L_2 & -M & M \\ -L_2 & L_2 & M & -M \\ -M & M & L_1 & -L_1 \\ M & -M & -L_1 & L_1 \end{vmatrix}}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & -\Gamma_1 & -N & N \\ -\Gamma_1 & \Gamma_1 & N & -N \\ -N & N & \Gamma_2 & -\Gamma_2 \\ N & -N & -\Gamma_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}}{j\omega} \quad (8)$$

На основании этой матрицы построена так называемая универсальная схема замещения трансформатора (рис. 1, в). Здесь N , Γ_1 , Γ_2 — величины с размерностями, обратными индуктивностям.

Стремясь составить уравнения трансформатора, наиболее полно отражающие физические процессы в нем, запишем эти уравнения с учетом потерь.

За основу возьмем уравнения z-типа для трансформатора с потерями, связывающие между собой напряжение \dot{U}_{12} , \dot{U}_{34} и токи \dot{I}_{12} , \dot{I}_{34} (рис. 1, з),

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_{12} + j\omega M \dot{I}_{34} \\ \dot{U}_{34} &= j\omega M \dot{I}_{12} + (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_{34} \end{aligned} \quad (9)$$

Они же в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_{12} \\ \dot{U}_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{34} \end{vmatrix}$$

От них перейдем к y -уравнениям

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{34} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_{12} \\ \dot{U}_{34} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} R_2 + j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_1 + j\omega L_1 \end{vmatrix}}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{34} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы удобнее было изучать параметры трансформатора, перейдем к безразмерным переменным, положив

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{L_1}{R_1}; \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}; \quad \tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}; \\ n &= \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}; \quad \Omega = \omega \tau; \\ k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad \sigma = 1 - k^2.\end{aligned}$$

Кроме того, избавимся от комплексов в заменителях коэффициентов матрицы $\|y\|$. Тогда она примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\|\bar{y}\| &= \frac{\left\| \begin{array}{c} 1 - \Omega^2 \sigma - j \frac{\Omega}{n} (1 + n^2) \\ G_1 (1 + j n \Omega), -j \Omega k \sqrt{G_1 G_2} \\ -j \Omega k \sqrt{G_1 G_2}, G_2 (1 + j \Omega / n) \end{array} \right\|}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} = \\ &= \frac{\left\| \begin{array}{c} G_1 [1 + \Omega^2 (n^2 + k^2)] - j \frac{G_1 \Omega}{n} (1 + \sigma n^2 \Omega^2), \\ -\sqrt{G_1 G_2} \left[\frac{\Omega^2 k}{n} (1 + n^2) + j \Omega k (1 - \Omega^2 \sigma) \right], \\ (-\sqrt{G_1 G_2}) \left[\frac{k \Omega^2}{n} (1 + n^2) + j \Omega k (1 - \Omega^2 \sigma) \right], \\ G_2 \left[1 + \Omega^2 \left(k^2 + \frac{1}{n^2} \right) - j \frac{G_2 \Omega}{n} (n^2 + \sigma \Omega^2) \right] \end{array} \right\|}{1 + \Omega^2 [2k^2 + n^2 + 1/n^2] + \Omega^4 \sigma^2} \quad (11).\end{aligned}$$

Легко убедиться, что в плавающую матрицу $\|y'\|$ четырехполосника, изображенного на рис. 1, *г*, войдут те же самые коэффициенты y_{11} , $y_{12} = y_{21}$ и y_{22} , что и в матрицу (10). Для этого в уравнении (9) перейдем к новым переменным $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$, которые связаны со старыми следующими зависимостями:

$$\dot{I}_{12} = \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \quad (12)$$

$$\dot{I}_{34} = \dot{I}_3 = -\dot{I}_4 \quad (13)$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 \quad (14)$$

$$\dot{U}_{34} = \dot{U}_3 - \dot{U}_4 \quad (15)$$

В соотношениях (12), (13), (14), (15) учтено, что в четырехполоснике рис. 1, *г* энергия передается только через стороны 12 и 34, откуда следует, что токи сторон 13 и 24 отсутствуют

$$I_{13} = 0; \quad \dot{I}_{24} = 0$$

Запишем эти соотношения в матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_{12} \\ \dot{U}_{34} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{array} \right\| \quad (16)$$

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \\ -1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{34} \end{array} \right\| \quad (17)$$

Теперь переход к новым переменным в уравнении (9) можно выразить так:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \\ \dot{i}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{i}_{12} \\ \dot{i}_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \cdot \|\bar{y}\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_{12} \\ \dot{U}_{34} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \cdot \|\bar{y}\| \cdot \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда

$$\|y^r\| = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \|\bar{y}\| \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11}, & -\bar{y}_{11}, & -\bar{y}_{12}, & \bar{y}_{12} \\ -\bar{y}_{11}, & \bar{y}_{11}, & \bar{y}_{12}, & -\bar{y}_{12} \\ -\bar{y}_{12}, & \bar{y}_{12}, & \bar{y}_{22}, & -\bar{y}_{22} \\ \bar{y}_{12}, & -\bar{y}_{12}, & -\bar{y}_{22}, & \bar{y}_{22} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Действительно, в плавающую матрицу вошли только три величины \bar{y}_{11} , \bar{y}_{22} и \bar{y}_{12} . Для графического исследования зависимостей этих параметров от нормированной частоты запишем их в параметрической форме

$$\bar{y}_{11} \begin{cases} X_1 = \operatorname{Re} \bar{y}_{11} = \frac{G_1 [1 + \Omega^2 (n^2 + k^2)]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{y}_{11} \begin{cases} Y_1 = \operatorname{Im} \bar{y}_{11} = \frac{G_1 [-\Omega/n (1 + \sigma n^2 \Omega^2)]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{x}_{22} \begin{cases} X_2 = \operatorname{Re} \bar{y}_{22} = \frac{G_2 \left[1 + \Omega^2 \left(k^2 + \frac{1}{n^2} \right) \right]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\bar{x}_{22} \begin{cases} Y_2 = \operatorname{Im} \bar{y}_{22} = \frac{G_2 [-\Omega/n (n^2 + \sigma \Omega^2)]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (23)$$

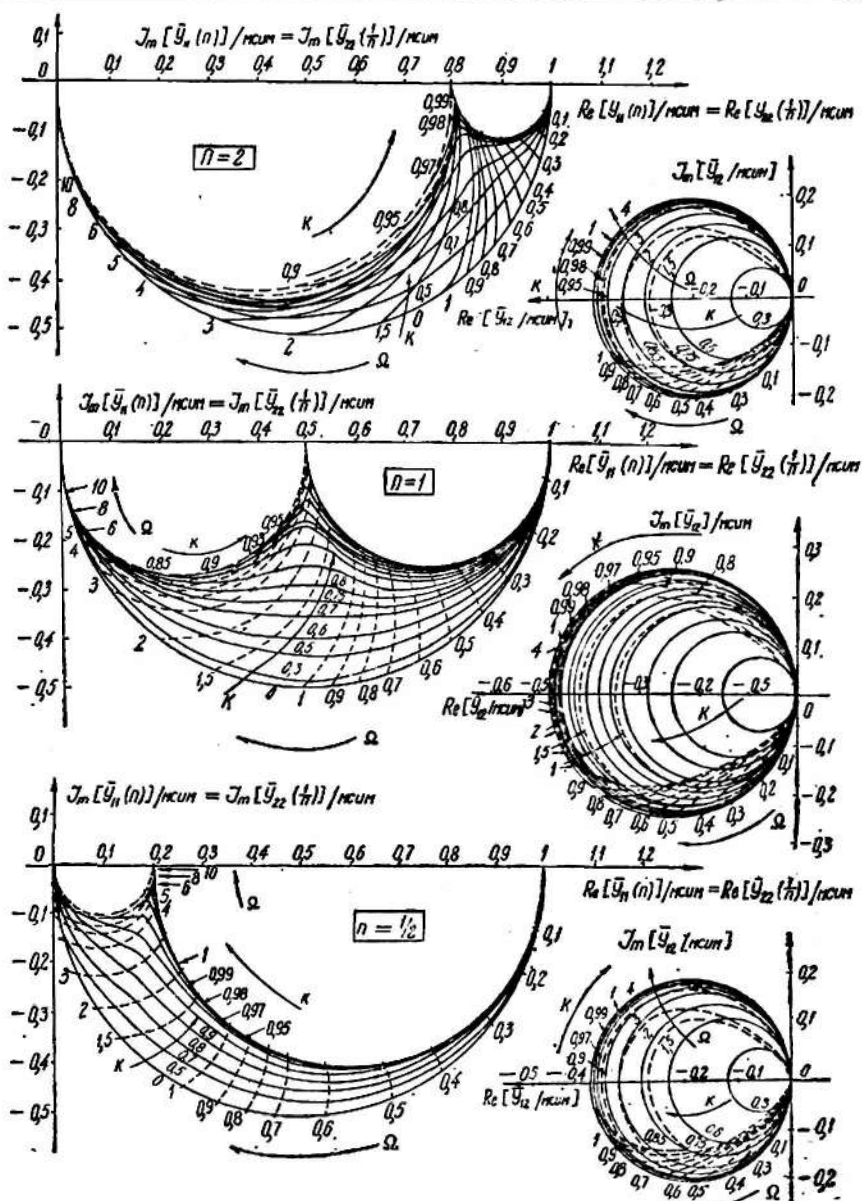
$$\bar{y}_{12} \begin{cases} X = \operatorname{Re} \bar{y}_{12} = \frac{\sqrt{G_1 G_2} \cdot [-k^2 \Omega^2 / n (1 + n^2)]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (24)$$

$$\bar{y}_{12} \begin{cases} Y = \operatorname{Im} \bar{y}_{12} = \frac{\sqrt{G_1 G_2} \cdot [-\Omega k (1 - \Omega^2 \sigma)]}{1 + \Omega^2 \left[2k^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \Omega^4 \sigma^2} \end{cases} \quad (25)$$

Следует обратить внимание, что $\bar{y}_{11}(1/\bar{n}) = \bar{y}_{22}(n)$, значит, достаточно рассмотреть зависимости \bar{y}_{11} и \bar{y}_{12} . Графики y_{12} и y_{11} (y_{22}) показаны на рис. 2.

Кривые \bar{y}_{12} представляют собой окружности. В этом можно убедиться и аналитическим путем. Исключив частоту Ω , переходим к уравнению

$$Y^2 + X^2 + \frac{kn}{1+n^2} X = 0. \quad (26)$$

Рис. 2. Частотные зависимости $Y_{12}(n) = Y_{21}(n)$, $Y_{11}(n) = Y_{22}(1/n)$.

Радиус этой окружности

$$R = \frac{kn}{2(1+n^2)}. \quad (27)$$

Центр ее смещен на расстояние, равное R , влево от начала координат. Кривые \bar{y}_{12} ($-\bar{y}_{21}$) пересекают ось абсцисс при частоте Ω , которую можно определить из формулы (25): ординаты кривых равны нулю, когда

$$1 - \Omega^2 \sigma = 0. \quad (28)$$

Это равенство выполняется при

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

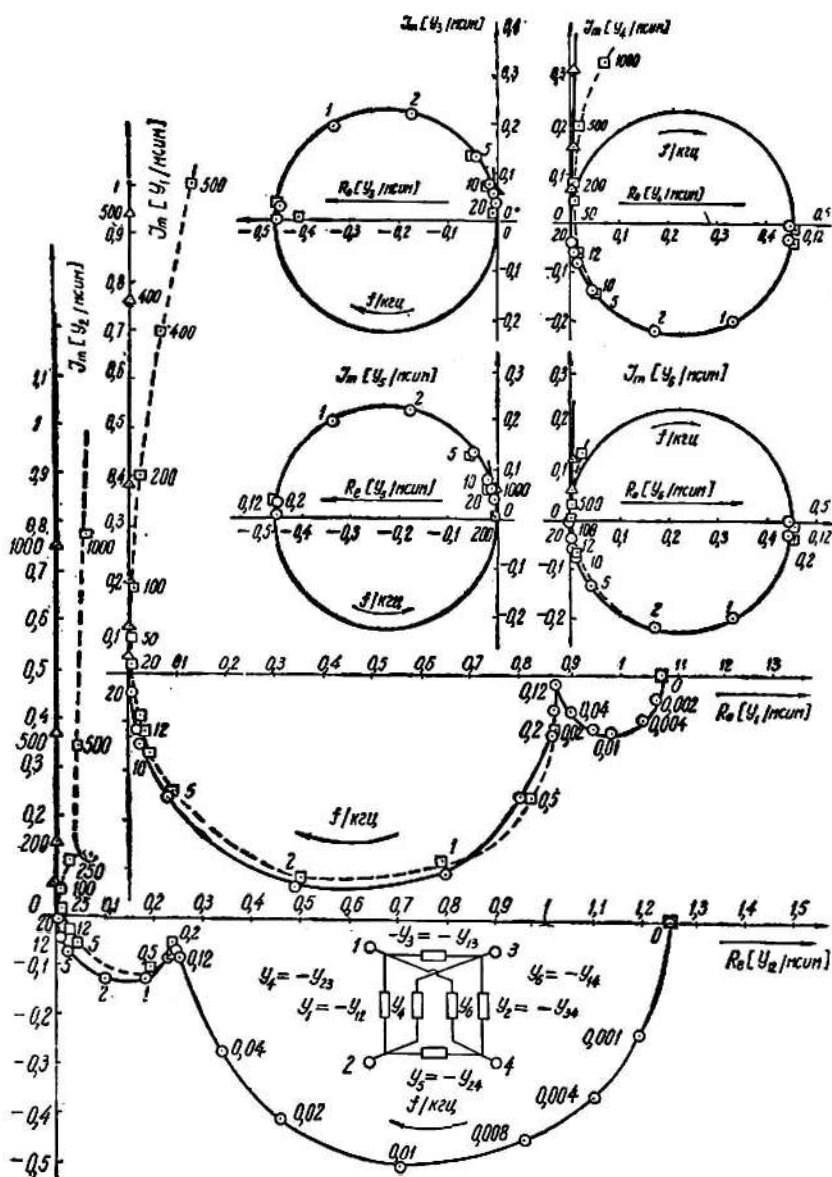


Рис. 3. Частотные годографы параметров трансформатора:

○ — коэффициенты матрицы; △ — коэффициенты матрицы; □ — коэффициенты уравнений реального трансформатора.

От элементов матрицы $\|\bar{y}\|$ проходного четырехполюсника может перейти к элементам матрицы $\|y''\|$, пользуясь соотношением (19).

Ненормированные зависимости y_{11} , $\bar{y}_{12} = \bar{y}_{21}$, \bar{y}_{22} по характеру не отличаются от нормированных. Множители G_1 , G_2 , $\sqrt{G_1 G_2}$ можно рассматривать как масштабные. Приведенная частота Ω для каждого реального трансформатора приобретает свой конкретный смысл.

На рис. 3 пунктиром показаны кривые частотных зависимостей коэффициентов матрицы $\|y''\|$ для трансформатора с $L_1 = 13,4$ гц, $L_2 = 3,75$ гц,

$R_1 = 8000$ ом, $R_2 = 910$ ом, т. е. с $\tau_1 = 16,6$ мксек, $\tau_2 = 4,13$ мксек, $n \cong 2$, $\tau = 8,3$ мксек, $\frac{\omega}{\Omega} = 120,5$. Точки этих кривых отмечены кружками.

Емкостные проводимости являются чисто мнимыми величинами и с частотой они растут. Поэтому после добавления $\|y'\|$ кривые элементов результирующей матрицы $\|y\|$ будут отличаться от кривых матрицы $\|y''\|$ приращениями по вертикальной оси. Эти приращения увеличиваются от нуля при $\Omega = 0$ до бесконечности $\Omega = \infty$.

На рис. 3 линиями, отмеченными треугольниками, показаны частотные зависимости элементов матрицы $\|y\|$ для случая, если паразитные емкости имеют следующие значения:

$$\begin{array}{lll} C_{12} \cong 250 \text{ пф}; & C_{13} \cong 10 \text{ пф}; & C_{14} \cong 20 \text{ пф}; \\ C_{23} \cong 50 \text{ пф}; & C_{24} \cong 10 \text{ пф}; & C_{34} \cong 150 \text{ пф}; \end{array}$$

На том же рисунке показаны результаты экспериментальной проверки частотных зависимостей коэффициентов матрицы $\|y\|$ трансформатора с указанными параметрами. Точки кривых, полученных опытным путем, отмечены квадратами.

Из графиков видно, что существенные расхождения между результатами расчета и эксперимента можно наблюдать лишь на очень высоких частотах: кривые отклоняются вправо от оси ординат и даже на некоторых из них появляются петли. В этом случае, обычно лежащем уже за пределами области применения трансформатора, на его поведении сказываются распределенные параметры. Их влияние не отражено в уравнениях. В случае необходимости они учитываются, тогда в уравнениях появятся составляющие, изменяющиеся по закону тангенса гиперболического от комплексного аргумента, так как им описывается входная проводимость линии с потерями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Свирщева. Матрицы и схемы замещения трансформатора. Материалы радиоэлектроники и электрические машины. Изд-во ЛГУ, 1964.
2. Э. А. Свирщева. Анализ обобщенным методом узловых напряжений схем с индуктивными связями. Сб. научных работ аспирантов ЛПИ. Изд-во ЛГУ, 1963.
3. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд-во АН СССР, 1951.