

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ГРЕБЕНКА — ЩЕЛЬ — ГРЕБЕНКА

В. Е. Коновалов, В. Г. Шульга

Ввиду возросшего интереса к многолучевым ЛБВ возникает потребность в исследовании свойств замедляющих систем, пригодных для работы в этих приборах [1, 2],

Рассмотрим периодическую систему типа гребенка — щель — гребенка, показанную на рис. 1. Электродинамические свойства исследуются при

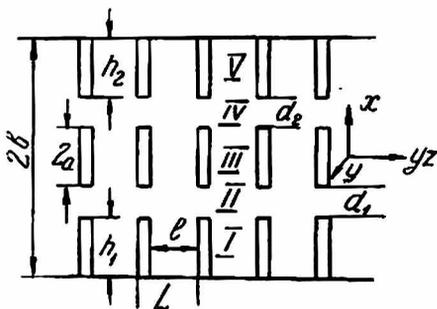


Рис. 1.

следующих предположениях: система бесконечно протяженная вдоль осей y и z ; период системы значительно меньше замедленной длины волны; поля в пространстве взаимодействия представляются в виде одной бегущей волны, что справедливо при условии $d \ll L$ [3].

Ограничимся рассмотрением волны E -типа, представляющей в данном случае наибольший практический интерес. При решении задачи воспользуемся методом частичных областей. Разобьем систему на следующие области: I, V — канавки гребенки; II, IV — пространства взаимодействия; III — щели. Для каждой из областей запишем выражения для продольных полей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла и граничным условиям.

В канавках гребенки и щелях E_z составляющие записываются с учетом только колебаний ТЕМ:

область I — $b_1 < x < -c_1$;

$$E_z = A_1 \sin k(x + b_1) e^{i\tau z}; \quad (1)$$

область II — $-c_1 < x < -a$,

$$E_z = A_2 \operatorname{ch}(\tau x + \varphi_1) e^{i\tau z}; \quad (2)$$

область III — $-a < x < a$,

$$E_z = A_3 \cos(kx + \psi) e^{i\tau z}; \quad (3)$$

область IV — $a < x < c_2$,

$$E_z = A_4 \operatorname{ch}(\tau x + \varphi_2) e^{i\tau z}; \quad (4)$$

область V — $c_2 < x < b_2$,

$$E_z = A_5 \sin k(x - b_2) e^{i\tau z}; \quad (5)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; ω — круговая частота; ε_0 — диэлектрическая постоянная свободного пространства; $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ — неизвестные постоянные; $-\tau^2 = k^2 - \gamma^2$. Остальные составляющие полей получаем из уравнений Максвелла с учетом, что $\frac{\partial}{\partial y} = 0$.

Произведем сшивание полей, приравнивая импедансы ($W = \frac{E_z}{H_y}$) на границах смежных областей,

$$\begin{aligned} mk \operatorname{tg} kh_1 &= -\tau \operatorname{cth}(\varphi_1 - \tau c_1); \\ \tau \operatorname{cth}(\varphi_1 - \tau a) &= mk \operatorname{ctg}(\psi - ka); \\ mk \operatorname{ctg}(ka + \psi) &= \tau \operatorname{cth}(\tau a + \varphi_2); \\ \tau \operatorname{cth}(\tau c_2 + \varphi_2) &= mk \operatorname{tg} kh_2; \\ m &= \frac{l}{L}. \end{aligned} \quad (6)$$

Исключая из последнего уравнения неопределенные постоянные $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$B_1 - m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} ka = \frac{m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} ka + B_2}{m \frac{k}{\tau} + B_1 \operatorname{tg} ka} = \frac{m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} ka + B_2}{m \frac{k}{\tau} - B_2 \operatorname{tg} ka}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1 - m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} kh_1 \operatorname{cth} \tau d_1}{\operatorname{cth} \tau d_1 - m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} kh_1}; \\ B_2 &= \frac{1 - m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} kh_2 \operatorname{cth} \tau d_2}{m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} kh_2 - \operatorname{cth} \tau d_2}. \end{aligned}$$

Когда $h_1 = h_2 = h$; $d_1 = d_2 = d$, то $B_1 = -B_2 = B$ и (7) преобразуется к виду

$$\left(B - m \frac{k}{\tau} \operatorname{tg} ka\right) \left(m \frac{k}{\tau} + B \operatorname{tg} ka\right) = 0. \quad (8)$$

Дисперсионное уравнение (8) распадается на два уравнения, где первое

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 - \frac{\tau}{k} \operatorname{cth}\left(\frac{\tau}{k} dk\right) (\operatorname{tg} kh - \operatorname{ctg} ka) - \operatorname{tg} kn \operatorname{ctg} ha = 0 \quad (9)$$

соответствует синфазному распределению поля в щелях, а второе

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 - \frac{\tau}{k} \operatorname{cth}\left(\frac{\tau}{k} dk\right) (\operatorname{tg} kh + \operatorname{tg} ka) + \operatorname{tg} kh \operatorname{tg} ka = 0 \quad (10)$$

— противофазному распределению (для простоты предполагаем $m = 1$).

Рассмотрим частные случаи, получающиеся в результате предельных переходов в (7) и (8).

1. При $a = 0$ (отсутствие щелей) уравнение (7) переходит в дисперсионное уравнение для двойной разновысокой гребенки [4]

$$\frac{k(\operatorname{ctg} kh_1 + \operatorname{ctg} kh_2)}{\left(\frac{k}{\tau}\right)^2 + \operatorname{ctg} kh_1 \operatorname{ctg} kh_2} = \tau \operatorname{th} \tau (d_1 + d_2). \quad (11)$$

2. При $a = 0$ (8) преобразуется в дисперсионное уравнение двойной разновысокой гребенки [4] для синфазных и противофазных волн

$$kh \operatorname{tg} kh = \tau h \operatorname{cth}\left(\tau h \frac{d}{h}\right); \quad (12)$$

$$kh \operatorname{tg} kh = \tau h \operatorname{th}\left(\tau h \frac{d}{h}\right). \quad (13)$$

3. При $d \rightarrow \infty$ (8) распадается на дисперсионное уравнение открытых щелей [5]

$$\operatorname{ctg} ka = -\frac{\gamma}{k}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} ku = \frac{\gamma}{k}; \quad (15)$$

для симметричных (14) и антисимметричных (15) волн и дисперсионное уравнение плоской гребенки [4]

$$\frac{\gamma}{k} = \operatorname{tg} kh. \quad (16)$$

При $d \rightarrow h$ (10) описывает дисперсию двойной разновысокой гребенки. Как показано в [6], полосы пропускания определяются следующими соотношениями:

$$\text{длинноволновая отсечка } ks = n\pi; \quad (17)$$

$$\text{коротковолновая отсечка } kh = (1 + \alpha) \frac{\pi}{2}; \quad (18)$$

$$ka = \mu \frac{\pi}{2}, \quad (19)$$

где $s = h + d - a$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\mu = 1, 3, 5, \dots$, $\alpha = 0, 2, 4, \dots$. При расчете коротковолновой отсечки для $h < a$ в выражениях (18) и (19) h и a необходимо поменять местами.

Границы полос пропускания для (9) находим так же, как и для (10) — из условия предельных значений фазовой скорости волн, распространяющихся в системе. При этом соотношение для длинноволновой отсечки

$$ks = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad (20)$$

для коротковолновой

$$kh = (1 + \alpha) \frac{\pi}{2}; \quad (21)$$

$$ka = \frac{1 + \mu}{2} \pi. \quad (22)$$

Характерно, что при $h < a$ и $h > a$ соотношения (21) и (22) сохраняются в отличие от (18) и (19) для этих случаев. Согласно [6] полосы пропускания «синфазных» и «противофазных» волн (10) чередуются, начиная с «противофазной» $n = 0$. Четным номерам полос пропускания соответствуют «противофазные» волны, нечетным — «синфазные».

Полосы пропускания (9) также чередуются, только здесь при всех n , в том числе и $n = 0$, распространяются «синфазные» волны.

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые $\frac{d\phi}{dc} = f(kh)$ для медленных волн в полосе частот $n = 0$ для (9) и $n = 1$ пунктиром для (10) при различных d/h и a/h . Дисперсионные кривые рассчитаны при $d/h = 10; 4; 1; 0,25$ и $a/h = 0,5; 1; 2$, соответственно (рис. 2).

Как видно из рисунков, дисперсия системы в этом случае положительная. Полоса медленных волн с уменьшением d/h сужается. Дли-

новолновая граница медленных волн смещается в коротковолновую область с уменьшением a/h и тем скорее, чем меньше d/h . Коротковолновая отсечка «синфазной» волны (9) ($n = 0$) с изменением d/h и a/h остается неизменной и определяется только высотой гребенки h . Коротковолновая отсечка «синфазной» волны (10) ($n = 1$) определяется высотой гребенки

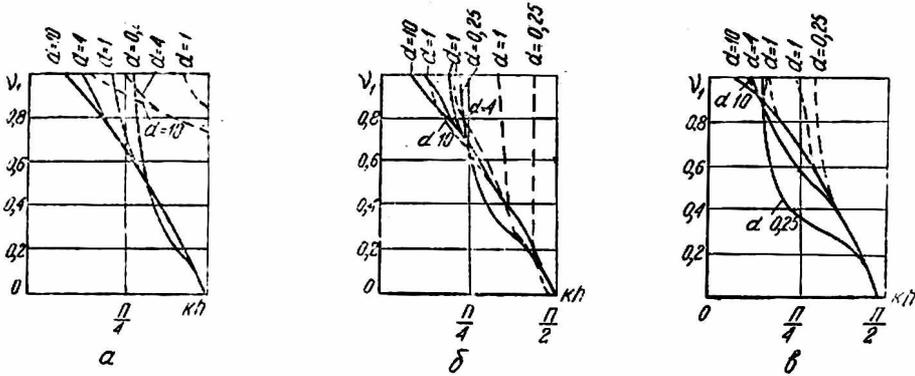


Рис. 2.

и неизменна до тех пор, пока $a \geq h$. При $a < h$ отсечка определяется протяженностью щелей. Так, для $a = 0,5h$ (на рис. 2, a не показано) коротковолновой отсечке соответствует $kh = \pi$.

При $a > h$ полоса медленных волн для (9) шире, чем для (10) при равных остальных параметрах. При $a < h$ с уменьшением a полоса медленных волн (9) ($n = 0$) сужается, а (10) ($n = 1$) расширяется.

На рис. 3 приведены полосы пропускания волн (9) (без штриховки) и волн (10) (заштриховано) при $a/h = 0,5; 1; 2$ соответственно для $d/h = 0,5; 0,25$. Известно, что на практике желательно обеспечить распространение в рабочем диапазоне только одной волны. С этой точки зрения распределение полос пропускания на рис. 3 позволяет определить влияние различных параметров на разделение частотных диапазонов волн различных типов. Меняя соотношение между параметрами a/h и d/h , можно расширить и сузить полосы пропускания. Так, при $a/h = 2, d/h = 0,5$ полоса ($n = 3$) волн (9) равна нулю (рис. 3, в). Кроме того, для определенных d/h и a/h можно получить изменение знака дисперсии. На рис. 3, а при $a/h = 0,5, d/h = 0,25$ в четных полосах волн (9), начиная с $n = 2$, дисперсия становится отрицательной.

Условия изменения знака дисперсии можно записать следующим образом:

«синфазные» волны (9) — симметричное поле в щелях;

$$(1 + \alpha)s < (2n + 1)h \text{ — четные полосы;}$$

$$(1 + \mu)s < (2n + 1)a \text{ — нечетные полосы;} \tag{23}$$

«противофазные» и «синфазные» волны (10) — несимметричное поле в щелях;

$$(1 + \alpha)s < 2nh \text{ — «противофазные» нечетные полосы;}$$

$$\mu s < 2na \text{ — «синфазные» нечетные полосы.} \tag{24}$$

Несомненный интерес для характеристик замедляющей системы представляет распределение продольной составляющей электрического поля в пространстве взаимодействия. Из (4) и (6) можно выразить так:

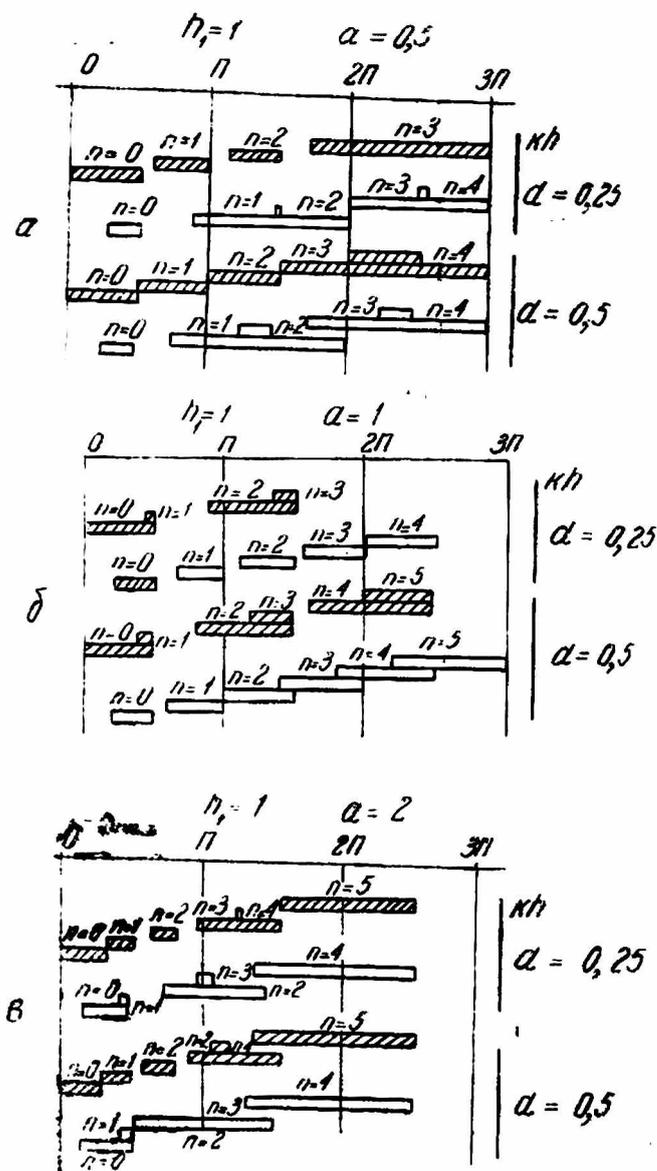


Рис. 3.

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} (\text{ch } \tau x + \text{th } \varphi \text{ sh } \tau x); \quad (25)$$

α пробегает от a до $a + d$; A — постоянная, а $\text{th } \varphi$ определяется для симметричного и несимметричного распределения поля в щелях соответственно как

$$\text{th } \varphi_e = \frac{\frac{\tau}{k} \text{tg } ka - \text{th } \tau a}{1 - \frac{\tau}{k} \text{tg } ka \text{th } \tau a}; \quad -\text{th } \varphi_n = \frac{\frac{\tau}{k} \text{ctg } ka + \text{th } \tau a}{1 + \frac{\tau}{k} \text{ctg } ka \text{th } \tau a}. \quad (26)$$

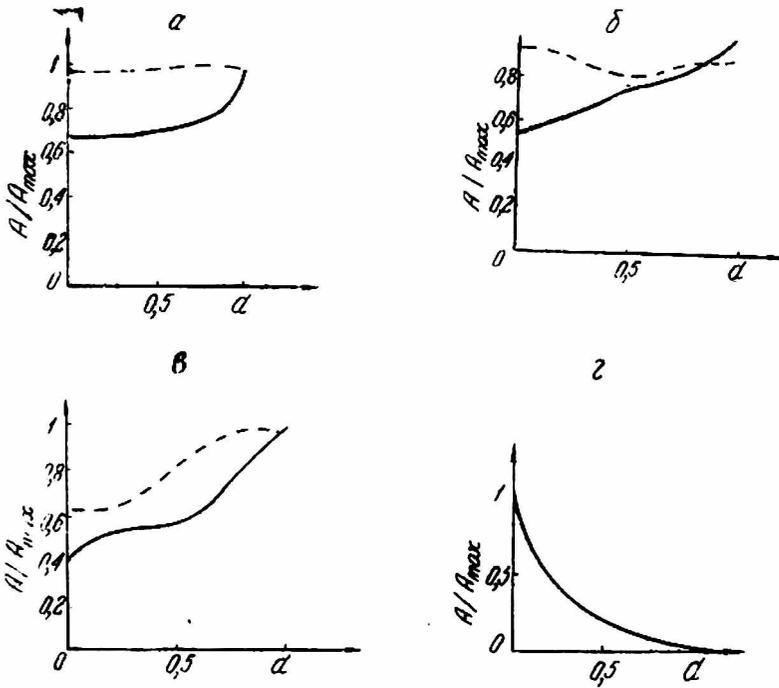


Рис. 1.

На рис. 4, а; 4, б; 4, в представлена топография продольного поля в пространстве взаимодействия, вычисленная по (25) для следующих случаев:

- а) $d/h = 1$; $a/h = 0,5$; $\nu = 0,9$; $k_2 h = 0,77$; $k_n h = 1,23$;
- б) $d/h = 0,25$; $a/h = 1$; $\nu = 0,5$; $k_2 h = 0,89$; $k_n h = 1,23$;
- в) $d/h = 0,25$; $a/h = 2$; $\nu = 0,5$; $k_2 h = 0,64$; $k_n h = 1,08$.

Сплошной линией показана топография продольного поля волны (9) $n = 0$, пунктиром — «синфазной» волны (10) $n = 1$. Как видно из рис. 4, а; 4, б; 4, в; 4, г, уменьшение a/h приводит к возрастанию наименьшего значения поля в пространстве взаимодействия для обеих волн.

На рис. 4, г приведена топография «противофазной» волны (10) $n = 0$ для случая $d/h = 4$; $a/h = 2$; $\nu = 0,5$; $k_n h = 0,52$.

Из рис. 4 видно, что понятие синфазности и противофазности для волн в системе «гребенка — щель — гребенка» условны. Они использованы здесь на том основании, что распределение «синфазных» и «противофазных» волн при $c_p = c$ совпадает с распределением синфазных и противофазных волн в двойной гребенке, т. е. для синфазной волны E_z в пространстве взаимодействия не зависит от x , а для противофазной при $c_p \rightarrow c$ убывает до нуля по всему сечению пространства взаимодействия, вырождаясь в волну типа ТЕМ.

Величина $R_{св}$ определяется как в [7]

$$R_{св} = \frac{\frac{1}{s} \int_{\xi}^{\cdot} |E_z|^2 dS}{\int_{\xi}^{\cdot} |E_z - H_z| dS}$$

и может быть рассчитана по формуле

$$R_{\text{св}} = D \left| 1 + \frac{2\tau d(1 - F^2)}{\text{sh } \tau d(1 + F^2) - \tau d(1 - F^2)} \right|, \quad (27)$$

где

$$D = \frac{1}{2} \frac{(1 - \tau^2)c}{k^2}; \quad \tau = \sqrt{\frac{2n}{\epsilon_0}}; \quad S = d - g;$$

$$F = \frac{1 - \frac{k}{\tau} \text{tg } kh \text{ th } \tau(a + d)}{\text{th } \tau(a + d) - \frac{k}{\tau} \text{tg } kh}.$$

Учесть конечную ширину системы g при закорачивающих металлических стенках в первом приближении можно [3], подставив в дисперсионное уравнение вместо $k^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{g}\right)^2$, где $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

Выражения для границ полос пропускания с учетом конечной ширины системы запишутся так:

длинноволновая и коротковолновая отсечки «синфазных» волн (9)

$$\lambda_{\text{дв}} = \frac{4gs}{\sqrt{(2n-1)^2 g^2 - 4s^2}};$$

$$\lambda_{\text{кв}} = \frac{4gh}{\sqrt{(1+\tau)^2 g^2 + 4h^2}}; \quad \lambda'_{\text{кв}} = \frac{4ga}{\sqrt{(1+\tau)^2 g^2 + 4a^2}};$$

длинноволновая и коротковолновая отсечки «противофазных» и «синфазных» волн (10)

$$\lambda_{\text{дв}} = \frac{2gs}{\sqrt{(ng)^2 + 4s^2}};$$

$$\lambda_{\text{кв}} = \frac{4gh}{\sqrt{(1+\tau)^2 g^2 + 4h^2}}; \quad \lambda'_{\text{кв}} = \frac{4ag}{\sqrt{(\tau g)^2 + 4a^2}}.$$

Здесь, как и в (17) — (22),

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots; \quad \tau = 0, 2, 4, 6 \dots; \quad \mu = 1, 3, 5, 7 \dots.$$

Таким образом, зная влияние геометрии системы на ее дисперсионные свойства, можно обеспечить в рабочей полосе распространение только одной определенной волны. Изменяя соотношения между протяженностью щелей, высотой гребенки, шириной системы и размерами пространства взаимодействия, можно в широких пределах управлять дисперсией системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Kouyama. Symposium on MW, 1959, 450.
2. С. К. Birdsall. Symposium on MW 1959, 341.
3. А. И. Ахнезер, Я. Б. Файнберг УФН, XLIX, 3, 321, 1951.
4. З. И. Тараненко, Я. К. Трохименко. Замедляющие системы. Изд-во «Техника», Киев, 1965.
5. Бриллиуэн, Пароди. Распространение волн в периодических структурах. Изд-во иностр. лит-ры, 1959.
6. Н. М. Чиркин. «Известия вузов. Радиотехника», т. V, № 1, 77, 1962.
7. Ю. Г. Альтшулер, А. С. Татаренко. Лампы малой мощности с обратной волной. Изд-во «Советское радио», М., 1963.