

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА С ПРОДОЛЬНОЙ ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКОЙ

Л. И. Белоусова

Харьков

Исследование распространения электромагнитных волн в волноводах с решетчатыми перегородками вызывает интерес, поскольку в последнее время такие структуры находят широкое применение в различных областях техники сверхвысоких частот. Теоретические и экспериментальные работы, посвященные изучению подобных структур [1, 2, 3] показали целесообразность их использования в качестве направленных ответвителей на большие уровни мощности, регулируемых делителей, фильтров типов волн. В этих работах теоретический анализ произведен для случая, когда период решетки мал по сравнению с длиной волны, что позволило ограничиться рассмотрением только основной волны, распространяющейся в структуре.

В настоящей работе исследованы собственные колебания в прямоугольном волноводе с периодической решеткой. Использован строгий метод [4], позволяющий получить точное решение задачи без ограничений на соотношение между длиной волны и геометрическими параметрами структуры.

1. Рассмотрим прямоугольный волновод, внутри которого параллельно узким стенкам расположена периодическая решетка, выполненная из бесконечно тонких металлических лент. Предполагается, что стенки волновода и ленты решетки обладают идеальной проводимостью.

Найдем собственные волны структуры. Периодичность рассматриваемой системы в направлении распространения позволяет применить теорему Флоке и записать искомые поля

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z) &= \vec{\tilde{E}}(x, y, z) e^{i h_0 z}, \\ \vec{H}(x, y, z) &= \vec{\tilde{H}}(x, y, z) e^{i h_0 z}.\end{aligned}\quad (1)$$

$\vec{\tilde{E}}(x, y, z)$ и $\vec{\tilde{H}}(x, y, z)$ — периодичны относительно z с периодом l и могут быть разложены в ряд Фурье. Множитель $e^{-i \omega t}$, характеризующий временную зависимость, здесь и далее опускается.

В силу принципа суперпозиции достаточно рассмотреть следующие частные случаи: случай E -поляризации, когда поле имеет только E -составляющую в направлении лент решетки, и случай H -поляризации,

когда имеется только H -составляющая поля в направлении лент решетки. Такое поляризационное деление наиболее удобно для задач, связанных с дифракцией или распространением волн в структурах с плоскими решетками.

Разобьем рассматриваемую систему на две области: область I — справа от решетки ($x > 0$) и область II — слева от решетки ($x < 0$). С учетом граничных условий на стенках волновода запишем для I области отличную от нуля составляющую поля в направлении y

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} E_y &= \cos \frac{m\pi}{b} y \\ H_y &= \sin \frac{m\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n [e^{i\gamma_n x} \mp e^{i\gamma_n (2d-x)}] \cdot e^{i h_n z}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} h_n &= h_0 + \frac{2\pi n}{l}; \\ \gamma_n &= \sqrt{k'^2 - h_n^2}; \\ k' &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}. \end{aligned}$$

Поле в области II имеет такой же вид, только следует заменить d_1 на d_2 , x на $-x$ и b_n на c_n . Коэффициенты c_n и b_n должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить выполнение точных граничных условий в плоскости $x = 0$: равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля и непрерывность нормальной составляющей магнитного поля на металлических лентах решетки; непрерывность всего поля на щелях.

Подчиняя поля этим условиям, находим соотношение между амплитудами b_n и c_n и получаем систему функциональных уравнений относительно неизвестных c_n , которая путем определенных преобразований [4] сводится к задаче Римана—Гилберта. Окончательное решение имеет вид бесконечной системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_n , пропорциональных амплитудам пространственных гармоник,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \left(\frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_m^n - \delta_{mn} \right) = 0, \quad (3)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$\varepsilon_n = 1 + \frac{|n|}{n} \frac{i\gamma_n l}{2\pi(n+s)} \begin{cases} \frac{1 - e^{2i\gamma_n a}}{(1 - e^{2i\gamma_n d_1})(1 - e^{2i\gamma_n d_2})} \text{ для } E\text{-волн;} \\ \frac{(1 - e^{2i\gamma_n d_1})(1 - e^{2i\gamma_n d_2})}{1 - e^{2i\gamma_n a}} \text{ для } H\text{-волн;} \end{cases} \quad (4)$$

$$s = \frac{h_0 l}{2\pi},$$

$$W_m^n = V_m^n - \tilde{V}_{[s]}^n \frac{R_m}{\tilde{R}_{[s]}}.$$

V_m^n , R_m , $\tilde{V}_{[s]}^n$, $\tilde{R}_{[s]}$ выражаются через функции и полиномы Лежандра от аргумента $u = \cos \theta$ и вычислены в [4] и [5], $\theta = \frac{\pi d}{l}$ для E -волн и $\theta = \frac{\pi(l-d)}{l}$ для H -волн

Равенство нулю определителя системы (3) является точным дисперсионным уравнением для волн, распространяющихся в исследуемой структуре

$$\text{Det} \left\{ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_m^n - \delta_{mn} \right\} = 0. \quad (5)$$

При $d \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение распадается на два уравнения для регулярных прямоугольных волноводов шириной d_1 и d_2 , при этом все амплитуды b_n и c_n , за исключением одной b_0 или c_0 соответственно, обращаются в нуль. Устремляя d к 1, получаем предельный переход к свободному волноводу шириной a , при этом $b_n \rightarrow c_n$.

В длинноволновом приближении дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon_0 = \frac{2sP_{s-1}(u)}{(u - 2us + s) \cdot P_{s-1}(u) + (s-1)P_{s-2}(u)},$$

где $P_{s-1}(u)$, $P_{s-2}(u)$ — функции Лежандра от $u = \cos \theta$.

Наряду с получением дисперсионной зависимости большой интерес представляет также определение критических частот исследуемого волновода при различных параметрах структуры. Полагая $h_0 = 0$, получаем аналогичным образом бесконечную систему линейных однородных уравнений относительно c_n при $k = k_{кр}$. Условие существования нетривиального решения этой системы дает уравнение для определения критических частот, которое имеет такой же вид, как и (5), но

$$\begin{aligned} W_{m \neq 1}^n &= V_m^n - V_0^n \cdot \frac{R_m}{R_0}; \\ W_0^n &= V_{|z|}^n - V_0^n \frac{R_{|z|}}{R_0}; \end{aligned}$$

$V_{|z|}^n$, $R_{|z|}$ выражаются через полиномы Лежандра от аргумента $u = \cos \theta$ и вычислены в [4],

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{l}{4\pi} \cdot \frac{\gamma_0 \sin \gamma_0 a}{\sin \gamma_0 d_1 \sin \gamma_0 d_2} & \text{для } E\text{-волн.} \\ -\frac{l}{\pi} \frac{\gamma_0 d_1 \sin \gamma_0 d_2}{\sin \gamma_0 a} & \text{для } H\text{-волн,} \end{cases} \quad (6)$$

а ε_n при $n \neq 0$ даются (4), если положить $s = 0$.

В нулевом приближении уравнение для критических частот

$$\varepsilon_0 \ln \frac{1+a}{2} = 1. \quad (7)$$

2. Полученные дисперсионные уравнения и уравнения для критических частот решались на ЭВМ методом редукции с учетом 15—19 пространственных гармоник. Предварительно был произведен анализ уравнений (7). Эти уравнения были решены графически и позволили сразу установить диапазоны изменения критических частот различных типов волн в зависимости от коэффициента заполнения решетки и ее положения в волноводе. Расчеты производились для величины $z'_{кр} = \frac{hk'_{кр}}{2\pi}$ и показали, что области изменения $z'_{кр}$ для E -волн и для H -волн взаимно дополняют друг друга и нигде не перекрываются. Критические частоты E -волн возрастают по сравнению с критическими частотами в невозмущенном волноводе, а критические частоты H -волн уменьшаются. Это объясняется тем, что для E -волн решетка является индуктивной нагруз-

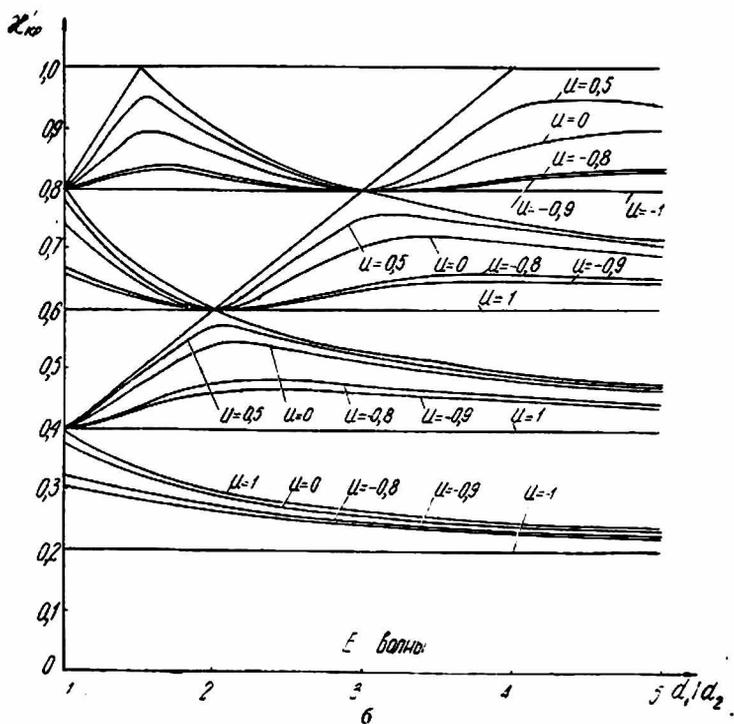
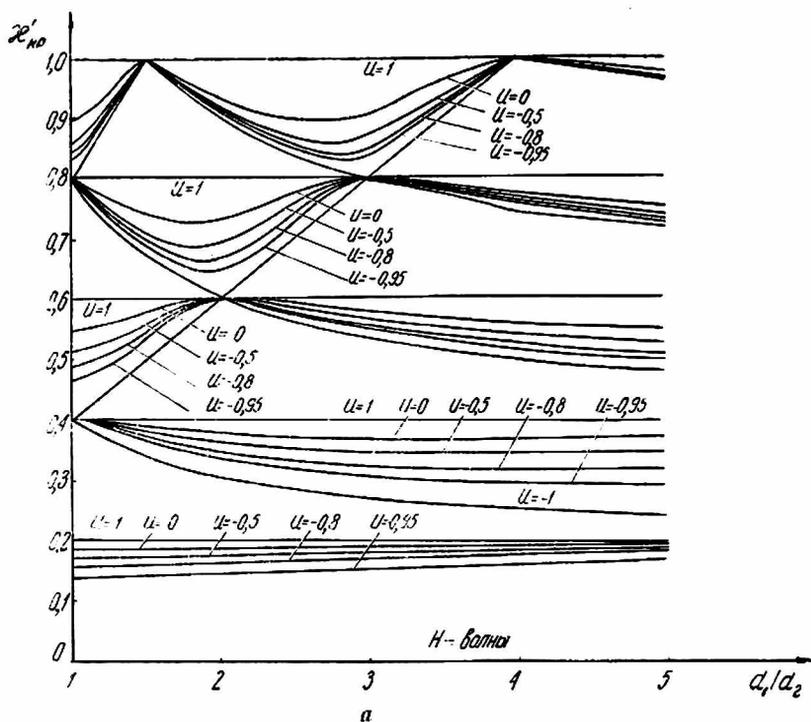


Рис 1.

кой, а для H -волн — емкостной. Таким образом, E - H -вырождение, имеющее место в регулярном прямоугольном волноводе, исчезает.

Результаты расчета уравнения (7) использовались в качестве начальных приближений при решении уравнений для критических частот на ЭВМ. На рис. 1, а и б приведены кривые, характеризующие зависимость $\chi'_{кр}$ от коэффициента заполнения решетки u и от положения ре-

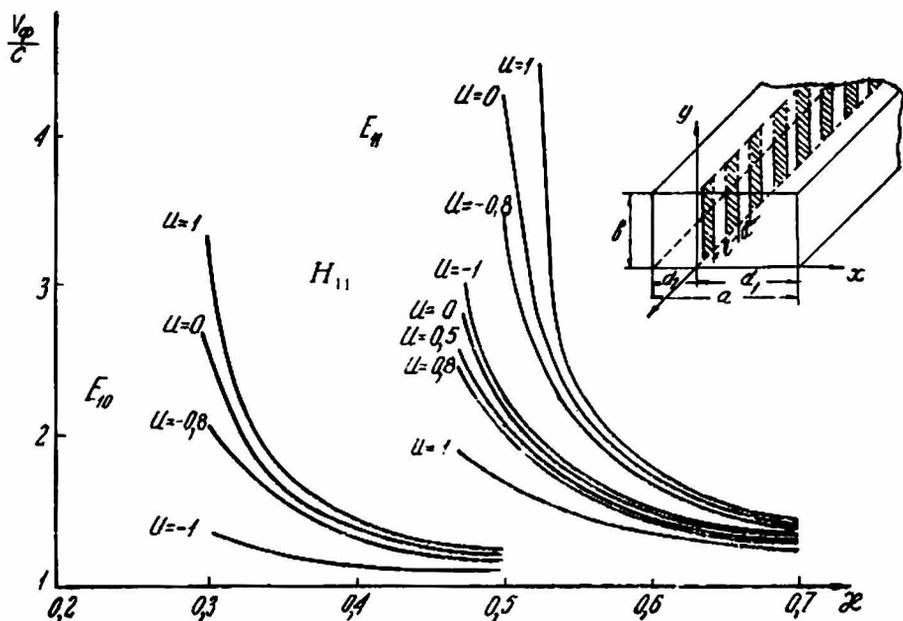


Рис. 2.

шетки в волноводе для E - и для H -волн соответственно. Чем уже щели решетки и чем ближе она расположена к максимуму поля, тем сильнее изменяются критические частоты. Если решетка расположена в плоскости узлов поля, то соответствующий тип волны не возмущается, поскольку граничные условия в плоскости решетки автоматически выполняются.

Графики, приведенные на рис. 1, построены для случая $\frac{a}{l} = 2.5$. При других значениях $\frac{a}{l}$ характер изменения $\chi'_{кр}$ от u и $\frac{d_1}{d_2}$ сохраняется, но тем сильнее оказывается влияние решетки, чем меньше величина $\frac{a}{l}$.

Следует отметить, что последовательность волн по мере возрастания частоты зависит от отношения $\frac{a}{b}$, места расположения решетки, ее периода и коэффициента заполнения. Наименьшей критической частотой обладает при $a > b$ E_{10} -волна, при $a < b$ H_{11} -волна. Обе эти волны можно рассматривать как возмущение обычной H_{10} -волны регулярного волновода размерами $d_1 \times b$ ($d_1 > d_2$).

Сравнение результатов, полученных на ЭВМ, с предварительными графическими расчетами показало, что для определения критических

частот в диапазоне $x' < 0,4$ вполне достаточно ограничиться решением (7).

Исследования дисперсионного уравнения (5) позволили установить, что зависимость фазовой скорости собственных волн от частоты имеет такой же характер, как и для регулярного волновода с эквивалентными размерами, т. е. с такой же критической частотой. На рис. 2 приведены дисперсионные кривые для трех типов волн, имеющих низшие критические частоты при выбранных параметрах структуры. По мере сужения щелей решетки фазовая скорость E -волн возрастает, H -волн уменьшается. Это следует из анализа критических частот. При $d \rightarrow 0$, когда решетка превращается в сплошной экран, приведенные дисперсионные кривые переходят в кривые для соответствующих типов волн регулярного волновода размерами $d_1 \times b$. На рис. 2 $u = \cos \frac{\pi d}{l}$.

Анализ системы (3) был также произведен на ЭВМ. Исследовались амплитудные характеристики различных типов волн в диапазоне частот, где только одна нулевая пространственная гармоника является быстрой волной, а все остальные представляют собой медленные поверхностные волны.

Для данного типа волны амплитуды поверхностных волн уменьшаются с ростом номера пространственной гармоники и имеют одинаковое значение в обеих областях (I и II). Это объясняется тем, что поверхностные волны существуют только вблизи решетки и «не чувствуют» боковых стенок волновода. Различие между амплитудами поверхностной волны в областях I и II появляется только тогда, когда эта волна начинает превращаться из медленной волны в быструю. С увеличением щели амплитуды поверхностных волн возрастают.

Амплитуды быстрых волн оказываются больше в той или иной области в зависимости от типа волны и параметров структуры. Для E -волн решетка является существенным препятствием, поэтому в зависимости от типа волны поле сосредоточено в основном в одной из областей. H -волны сравнительно легко проходят через решетку, поэтому значения амплитуд быстрых волн в соседних областях мало отличаются.

В таблице приведены отношения амплитуд нулевых гармоник в областях $x < 0$ и $x > 0$ ($\frac{c_0}{b_0}$) для различных типов волн, распространяющихся при заданном x . Из приведенных данных следует, что волны лучше разделяются при меньших x и узких щелях, так как при этом коэффициент прохождения волны через решетку уменьшается. Распределение амплитуд между областями существенно зависит от параметров решетки и ее расположения в волноводе.

| Параметры структуры | | | x | Отношения амплитуд $\frac{c_0}{b_0}$ | | | | |
|---------------------|---------------|---------------|------|--------------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $\frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a}{l}$ | $\frac{d}{l}$ | | E_{10} | E_{20} | E_{11} | H_{11} | H_{21} |
| 1,5 | 2,5 | 0,1 | 0,55 | 0,022 | 36,8 | 0,021 | 1,21 | 0,469 |
| 1,5 | 2,5 | 0,5 | 0,55 | 0,175 | 5,29 | 0,137 | 1,08 | 0,766 |
| 1,5 | 2,5 | 0,8 | 0,55 | 0,557 | 1,91 | 0,396 | 1,01 | 0,960 |
| 1,5 | 5,0 | 0,5 | 0,25 | 0,068 | 11,64 | 0,067 | 1,04 | 0,877 |
| 1,5 | 10,0 | 0,5 | 0,15 | 0,034 | 23,2 | 0,033 | 1,02 | 0,936 |
| 2,3 | 2,5 | 0,5 | 0,55 | 0,143 | 0,606 | 0,105 | 1,14 | 0,817 |
| 2,3 | 2,5 | 0,1 | 0,55 | 0,017 | 0,083 | 0,016 | 1,47 | 0,496 |

Исследована зависимость амплитудного распределения от частоты. Установлено, что в широком диапазоне частот

$$x_{кр} < x < 0,4(x_{кр}^2 + 1)$$

распределение амплитуд слабо зависит от частоты. Чем больше $\frac{a}{l}$, тем слабее эта зависимость. При больших значениях x начинается перераспределение амплитуд, вызванное превращением (-1) -ой гармоники из медленной волны в быструю. По мере того, как фазовая скорость этой волны приближается к скорости света, амплитуда ее нарастает и может оказаться значительно больше амплитуды нулевой гармоники, а затухание в направлении от решетки уменьшается.

Параметры структуры могут быть выбраны таким образом, что быстрая нулевая гармоника низшего типа волны окажется сосредоточенной, в основном в области $x > 0$ ($d_1 > d_2$), а медленная (-1) -ая гармоника с фазовой скоростью порядка 0.9 скорости света будет преобладать в области $x < 0$. Таким образом, представляется возможность использовать (-1) -ую пространственную гармонику для взаимодействия с электронным пучком.

Автор выражает благодарность В. П. Шестопалову и В. В. Щербаку за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller S. E. Bell System Technical Journal, 33(3), 661—719, May 1954.
2. Б. М. Машковцев, Л. З. Бендман, А. А. Хохрев. «Радиотехника», 11, 4, 1960.
3. Kiyō Gomiyasu, Cohn S. Proceedings of the JRE, 41(7), 922—926, July 1953.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, 4, 381, 1962.
5. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIII, 6, 641, 1963.