

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ

А. М. Радин, О. А. Третьяков

Харьков

Как известно, при движении зарядов вблизи периодических структур возникает электромагнитное излучение, которое в настоящее время названо дифракционным излучением. В приближении заданного тока эта задача в значительной степени уже изучена. Представляет значительный интерес постановка и решение самосогласованной задачи, в которой наряду с полем излучения следует также учитывать перераспределение тока под действием этого поля. Здесь приведено в качестве примера решение самосогласованной задачи об излучении электронного потока при движении его в кольцевом волноводе.

Рассмотрим кольцевой волновод, состоящий из периодической системы идеально проводящих колец, внутри которого распространяется со скоростью v_0 цилиндрический электронный поток плотности ρ_0 . Рассмотрим далее малые синусоидальные возмущения параметров пучка около их стационарных значений. Линеаризованная система уравнений с учетом влияния на поток только продольной составляющей электрического поля имеет следующий вид:

$$\Delta \Pi + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi = -4\pi P \quad (1)$$

$$v_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2i\omega v_0 \frac{\partial P}{\partial z} - \omega^2 P = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \right)$$

где Π — потенциал Герца
 P — потоковая функция

$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m} (1 - \beta^2)^{-3/2}$ — плазменная частота

$\frac{v_0}{c} = \beta$ — безразмерная скорость пучка.

Для удобства рассмотрения разобьем все пространство на три области: 1 область — $r < a$, 2 область — $a < r < b$, 3 область — $r > b$, где a — радиус пучка, b — радиус волновода.

Разыскивая неизвестные функции Π и P в виде разложения в ряды Фурье и переходя к полям, получим для каждой из областей:

$$E_z^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^1 J_0(\Gamma_n r) e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z},$$

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi}^I &= -\frac{i\omega}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma_n J_1(\Gamma_n r) e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z}, \\
 E_z^{II} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n^2 [B_n J_0(\beta_n r) + C_n N_0(\beta_n r)] e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z}, \\
 H_{\varphi}^{II} &= -\frac{i\omega}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n [B_n J_1(\beta_n r) + C_n N_1(\beta_n r)] e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z}, \\
 E_z^{III} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n^2 D_n H_0^{(1)}(\beta_n r) e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z}, \\
 H_{\varphi}^{III} &= -\frac{i\omega}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n D_n H_1^{(1)}(\beta_n r) e^{i\left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)z},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где J_0, J_1, N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана
 $H_0^{(1)}, H_1^{(1)}$ — функции Ханкеля первого рода
 l — период волновода
 k — волновое число волны пространственного заряда

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)^2} \\
 \Gamma_n &= \beta_n \sqrt{1 - \left[\frac{\omega_p^2}{\omega - v_0 \left(k + \frac{2\pi}{l}n\right)}\right]^2}
 \end{aligned}$$

A_n, B_n, C_n, D_n — неизвестные коэффициенты.
 Множитель $e^{-i\omega t}$ опущен. Для сокращения записи выписаны только тангенциальные компоненты поля.

Подчиним электромагнитное поле в выражении (2) точным граничным условиям

$$\begin{aligned}
 r = a; \quad E_z^I &= E_z^{II}; \quad H_{\varphi}^I = H_{\varphi}^{II} \\
 E_z^{II} &= E_z^{III}; \quad H_{\varphi}^{II} = H_{\varphi}^{III} & \frac{d}{2} < |z| < \frac{l}{2} \\
 r = b \\
 E_z^{II} &= E_z^{III} = 0 & |z| < \frac{d}{2}
 \end{aligned}$$

где d — ширина щели между кольцами.
 Тогда для определения неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n достаточно подобрать такие коэффициенты $\tilde{\varphi}_n$, чтобы:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n e^{\frac{2\pi}{l}nz} &= 0; \quad \frac{d}{2} < |z| < \frac{l}{2} \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\tilde{\varphi}_n}{k + \frac{2\pi}{l}n} &= 0; \quad z = \frac{l}{2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_n}{k + \frac{2\pi}{l}n} e^{\frac{2\pi}{l}nz} = 0; |z| < \frac{d}{2},$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{\beta_n J_0(\Gamma_n a) \Theta_1 + \Gamma_n J_1(\Gamma_n a) \Theta_2}{\beta_n J_0(\Gamma_n a) \Theta_3 + \Gamma_n J_1(\Gamma_n a) \Theta_4} - \frac{H_1^{(1)}(\beta_n b)}{H_0^{(1)}(\beta_n b)}, \\ \Theta_1 &= N_1(\beta_n a) J_1(\beta_n b) - J_1(\beta_n a) N_1(\beta_n b), \\ \Theta_2 &= J_0(\beta_n a) N_1(\beta_n b) - N_0(\beta_n a) J_1(\beta_n b), \\ \Theta_3 &= N_1(\beta_n a) J_0(\beta_n b) - J_1(\beta_n a) N_0(\beta_n b), \\ \Theta_4 &= J_0(\beta_n a) N_0(\beta_n b) - N_0(\beta_n a) J_0(\beta_n b). \end{aligned}$$

Введем функцию

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{|n|}{n} \frac{\beta_n}{k + \frac{2\pi}{l}n} \frac{1}{\psi_n},$$

Используя асимптотические формулы для цилиндрических функций при больших значениях аргумента, можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ ε_n убывает, как $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. В таком случае система функциональных уравнений (3) примет вид, аналогичный системе, рассмотренной в [1].

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{\frac{2\pi}{l}nz} &= 0 \quad \frac{d}{2} < |z| < \frac{l}{2}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_n}{k + \frac{2\pi}{l}n} &= 0 \quad z = \frac{l}{2}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) e^{\frac{2\pi}{l}nz} &= 0; |z| < \frac{d}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользовавшись полученными в работе [1] результатами, запишем сразу решение системы (4), которое имеет вид однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных φ_n и c .

$$2cR_r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \varepsilon_n \frac{|n|}{n} V_r^n = 0, \quad (5)$$

$$2cR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \left(\varepsilon_n \frac{|n|}{n} V_m^n - \delta_{mn} \right) = 0.$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера.

Коэффициенты V_m^n , R_m , V_r^n , R_r подсчитаны в [1]. Из условия существования нетривиального решения системы (5) (равенство нулю ее определителя) получаем дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи

$$\det \left(W_m^n \varepsilon_n \frac{|n|}{n} - \delta_{mn} \right) = 0, \quad (6)$$

где

$$W_m^n = \frac{V_m^n R_2 - V_2^n R_m}{R_2}.$$

Точное уравнение (6) можно проанализировать численным способом на ЭВМ.

Практический интерес представляет случай, когда в свободное пространство излучается ограниченное число гармоник пространственного спектра. Функция ε_n имеет резкий максимум при тех значениях n , которые соответствуют излучающимся гармоникам, и мала для всех остальных n . Рассмотрим режим излучения в свободное пространство основной гармоники ($n = -1$). Будем считать, что все $\varepsilon_n = 0$ для $n \neq 0$ и $n \neq -1$. Уравнение (6) при этом упрощается:

$$\varepsilon_0 [P_{\tau-1}(u) - P_{\tau}(u)] - \varepsilon_{-1} [P_{\tau-1}(u) - P_{\tau-2}(u)] - 2P_{\tau-1}(u) = 0, \quad (7)$$

где $P_{\tau}(u)$ — функция Лежандра

$$u = \cos \frac{\pi d}{l},$$

$\eta = \frac{kl}{2\pi}$ — безразмерное волновое число волны пространственного заряда.

Так как ω_p , как правило, на несколько порядков меньше ω , то функцию ψ_{-1} , входящую в выражение для ε_{-1} , можно вычислить по приближенной формуле

$$\psi_{-1} = \frac{J_1(\beta_{-1}b)}{J_0(\beta_{-1}b)} - \frac{H_1^{(1)}(\beta_{-1}b)}{H_0^{(1)}(\beta_{-1}b)}. \quad (8)$$

Система уравнений (1) выводится в предположении, что $k \sim \frac{\omega}{v_0}$. Следовательно, функция $|\Gamma_0| \gg |\beta_0|$ что позволяет, воспользовавшись асимптотическими формулами для цилиндрических функций при больших значениях аргумента, упростить выражение для ψ_0 .

$$\psi_0 = \frac{J_0(\beta_0 a) N_1(\beta_0 b) - N_0(\beta_0 a) J_1(\beta_0 b)}{J_0(\beta_0 a) N_0(\beta_0 b) - N_0(\beta_0 a) J_0(\beta_0 b)} - \frac{H_1^{(1)}(\beta_0 b)}{H_0^{(1)}(\beta_0 b)}. \quad (9)$$

Для дальнейшего анализа уравнения (7) применим метод возмущений. Рассмотрим колебания волн пространственного заряда данного цилиндрического пучка в свободном пространстве. Решение системы (1) будем искать в виде $f(r) e^{ikz}$. Уравнения (1) удовлетворяются, если поля в каждой из областей имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= a_1 \beta_0^2 J_0(\Gamma r) e^{ikz} \\ H_{\tau} &= -\frac{i\omega}{c} a_1 \Gamma J_1(\Gamma r) e^{ikz} \end{aligned} \right\} r < a_1$$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= a_2 \beta_0^2 H_1^{(1)}(\beta_0 r) e^{ikz} \\ H_{\varphi} &= -\frac{i\omega}{c} \beta_0 a_2 H_1^{(1)}(\beta_0 r) e^{ikz} \end{aligned} \right\} r > a,$$
(10)

где

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2},$$

$$\Gamma = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega - kv_0}\right)^2}.$$

a_1, a_2 — неизвестные константы.

Компонента E_z не выписывается, так как она не понадобится для дальнейших вычислений.

Потребовав выполнения граничных условий для полей из (10) при $r = a$, получаем дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения k волн пространственного заряда.

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{J_0(\Gamma a)}{J_1(\Gamma a)} = \frac{1}{\beta_0} \frac{H_0^{(1)}(\beta_0 a)}{H_1^{(1)}(\beta_0 a)}. \quad (11)$$

Величина k предполагается близкой к $\frac{\omega}{v_0}$, где v_0 — невозмущенная скорость электронного потока. Волновое число β_0 при этом получается чисто мнимым. Обозначим $\beta = ih$. При извлечении корня мы выбрали положительный знак, чтобы поле обладало нужными свойствами на бесконечности. Уравнение (11) при этом преобразуется к виду

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{J_0(\Gamma a)}{J_1(\Gamma a)} = \frac{1}{h} \frac{K_0(ha)}{K_1(ha)}, \quad (12)$$

где K_0, K_1 — цилиндрические функции чисто мнимого аргумента.

Уравнение (12) имеет действительные корни, если

$$1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega - kv_0}\right)^2 < 0$$

что определяет интервал возможных значений k :

$$\frac{\omega - \omega_p}{v_0} < k < \frac{\omega + \omega_p}{v_0}.$$

Так как интервал изменения k мал (предположения линейной теории), то действительный спектр корней (12) является хорошим приближением для решения уравнения (7). Уравнение (12) можно решить графически, имеются подробные таблицы цилиндрических функций. Если функцию (7) разложить в ряд Тейлора около значений k из (12), то удерживая члены первого порядка малости и учитывая (8), (9), можно

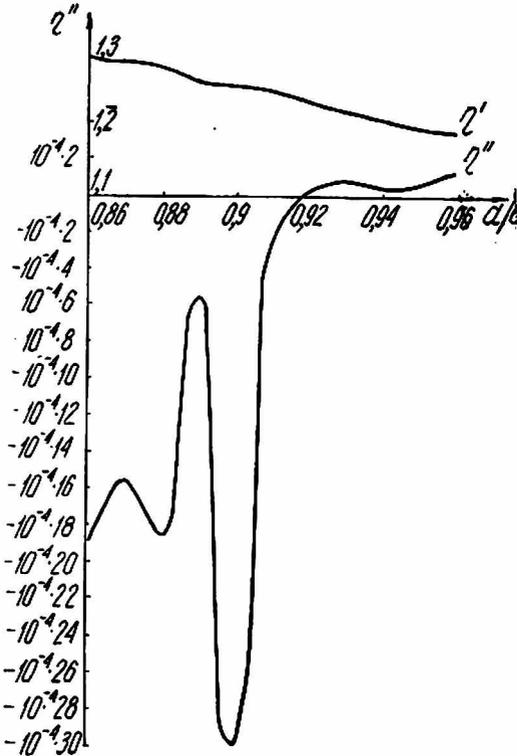


Рис. 1. Зависимость γ_1' и γ_1'' от d/l .

сравнительно легко получить приближенные значения корней дисперсионного уравнения (7).

Численное решение уравнения (6) проводилось заменой бесконечного определителя матрицы конечным, причем n брали равным 3, что

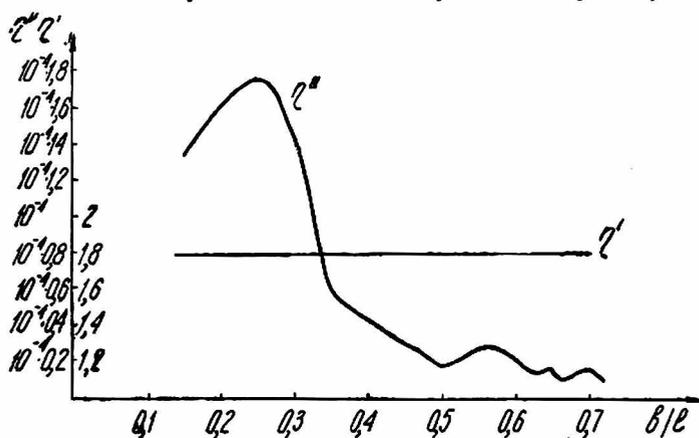


Рис. 2. Зависимость γ' и γ'' от b/l .

соответствует определителю 7 порядка с комплексными коэффициентами. В диапазоне изменения $\kappa = \frac{\omega l}{2\pi c}$ от 0,05 до 0,2 и $0,8 < \frac{\kappa}{\beta} < 2$ получена

удовлетворительная точность. Нас интересует зависимость $Re\gamma$ и $Im\gamma$ от параметров волновода и пучка. Анализ уравнения (6) показал, что при фиксированных значениях параметров системы бесконечное множество корней сосредоточено в малой окрестности $\gamma_1 = \frac{\kappa}{\beta}$. Это соответствует бесконечному набору волн пространственного заряда, фазовые скорости которых близки к стационарной скорости электронного потока, что находится в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями. На рис. 1—4 представлены некоторые результаты вычислений, характеризующие комплексные постоянные распространения волн пространственного заряда.

На рис. 1 дана зависимость от ширины щели в волноводе реальной и мнимой части постоянной распространения одной из быстрых волн пространственного заряда. С уменьшением $\frac{d}{l} \gamma'$ стремится к величине

$\frac{\kappa}{\beta}$, что соответствует приближению фазовой скорости волны к невозму-

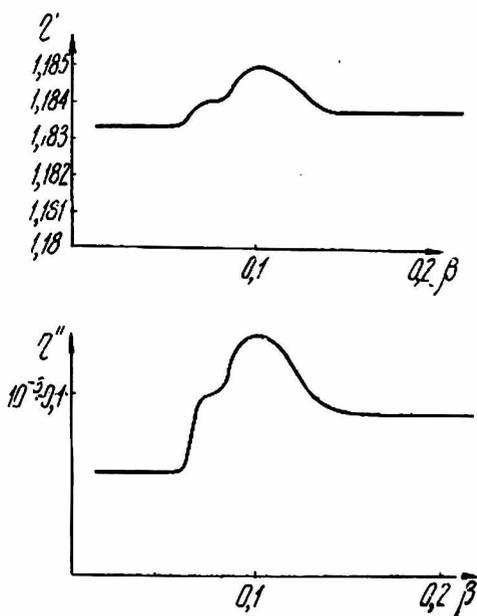


Рис. 3. Зависимость γ' и γ'' от β .

щенной скорости электронного потока. Инкремент нарастания при этом уменьшается. Существуют оптимальные соотношения между шириной щели и периодом, когда нарастание волны вдоль оси волновода максимально. Резонансный характер зависимости η'' от $\frac{d}{l}$ объясняется, видимо, свойствами кольцевого волновода как замедляющей структуры, так как с изменением η'' , η' также меняется. Известно, [4], что в цилиндрических замедляющих системах возможен пространственный резонанс.

На рис. 2 представлена зависимость η' и η'' от радиуса волновода. С увеличением последнего $\eta'' \rightarrow 0$. Потери пучка на излучение уменьшаются. Амплитуды волн пространственного заряда стремятся к стационарным значениям. В отличие от [3] следует отметить, что в периодических структурах возможны колебания волн пространственного заряда, ограниченные по амплитуде и тогда, когда связь электронного потока с замедляющей системой не является слабой.

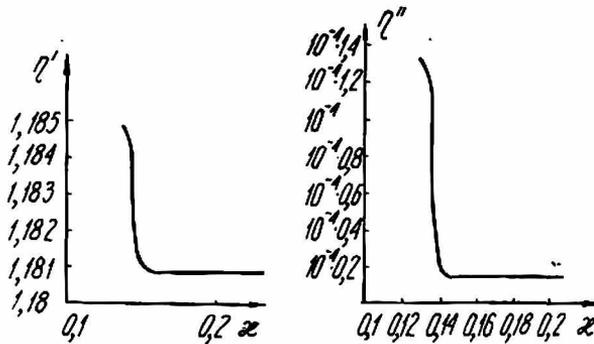


Рис. 4. Зависимость η' и η'' от χ .

На рис. 3 можно проследить зависимость η'' и η' от скорости электронного потока. η' и η'' достигают максимума при $\frac{\chi}{\beta} \sim 0,1$. Заметим, что функция Γ_n при этом также максимальна, а фазовая скорость волны пространственного заряда близка к стационарной скорости электронного потока.

Зависимость η' и η'' от частоты χ представлена на рис. 4. Частотные свойства кольцевого волновода, нагруженного пучком, в некоторой степени подобны свойствам холодной структуры, описанной в [1]. Влияние пучка приводит к изменению η по сравнению с холодной структурой с такими же параметрами. Зависимость η от χ подобна, описанной в [1], но более критична.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. В. П. Шестопазову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. П. Шестопазов. ЖТФ, вып. 11, 1964.
2. О. А. Третьяков. «Радиотехника и электроника», № 7, 1965.
3. Палоц, Олинер. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, т. 53, № 1, Изд-во «Мир», 1964.
4. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Изд-во «Сов. радио», 1957.