ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИОННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ В САМОСОГЛАСОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. М. Радин

Большинство задач дифракционной электроники в самосогласованной постановке может быть сведено к сложным трансцендентным уравнениям, решение которых даже с применением ЭВМ представляет значительные трудности. В таких случаях эффективным может оказаться метод возмущений, который позволяет получить весь спектр корней дисперсионного уравнения при фиксированных значениях параметров системы в явном виде с достаточной точностью.

Суть метода заключается в следующем. Пусть некоторая периодическая система возбуждается электронным потоком постоянной плотности, распространяющимся со скоростью v. Электромагнитные колебания в данной системе могут быть описаны уравнением

$$F(\omega,\ k,\ p_i) = 0, \tag{1}$$

где ω — частота колебаний,

k — постоянная распространения волны пространственного заряда;

p_i — набор параметров системы;

ω и k в общем случае комплексны.

Рассмотрим далее заданный электронный поток в свободном пространстве. Колебания волн пространственного заряда будут описываться уравнением

$$f(\omega,\ k,\ p_i) = 0. \tag{2}$$

Для пучков не слишком сложной геометрической формы из уравнения (2) можно получить спектр корней аналитическим либо графическим методом. Так как пучок в свободном пространстве не излучает электромагнитные волны, то уравнение (2) можно рассматривать как дисперсионное уравнение некоторого замкнутого волновода.

Следовательно, спектр корней уравнения (2) будет действительным, что облегчает его решение.

Соотношения (1) и (2) получаются из линеаризованных уравнений поля и уравнения движения. При этом предполагается, что переменные искомые величины намного меньше невозмущенных параметров. В таком случае спектр корней уравнения (1) в комплексной области должен лежать в малой окрестности корней уравнения (2). Если это условие не выполняется, то линейная теория неприменима. Раскладывая функцию $F(\omega,\ k,\ p_i)$ в ряд Тейлора вблизи корней уравнения (2), можно получить весь спектр корней уравнения (1) в явном виде. Изложенные выше результаты подтверждаются аналитическими вычислениями и результатами численного счета на ЭВМ.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Пусть бесконечно широкий электронный поток конечной толщины распространяется вблизи ленточной дифракционной решетки перпендикулярно образующим лент. Пучок в свободном пространстве с учетом релятивистских эффектов описывается дисперсионным уравнением [1]

$$\operatorname{tg}(\Gamma a) = \frac{2\Gamma h}{\Gamma^2 - h^2}, \tag{3}$$

где

$$h = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}; \quad \Gamma = h\sqrt{\frac{\omega_p^2}{(\omega - kv)^2} - 1};$$

a — толщина пучка;

v — невозмущенная скорость пучка.

$$\omega_p^2 = \omega_e^2 (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}},$$

где ω_e — частота лэнгмюровских колебаний;

β — безразмерная скорость пучка.

Уравнение (3) имеет действительные корни, если

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv)^2} \leqslant 0.$$

Отсюда получаются верхняя и нижняя оценки для корней

$$\frac{\omega - \omega_p}{v} \leqslant k \leqslant \frac{\omega + \omega_p}{v}.$$

На практике $\omega_p \ll \omega$, следовательно, весь спектр корней уравнения (3) расположен вблизи малой окрестности величины $k = \frac{\omega}{v}$, что находится в согласии с линейной теорией. Уравнение (3) может быть легко решено графическим методом.

Точное дисперсионное уравнение для рассматриваемой структуры [2] дается бесконечным определителем

$$\det \sum_{m,n} \left(\frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_m^n - \delta_{mn} \right) = 0, \tag{4}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера—Вейерштрасса.

$$\varepsilon_n = 1 - 2i \frac{|n|}{n} \frac{\beta_n}{\eta + n} \frac{\gamma_n - i \operatorname{tg}(\Gamma_n a)}{i(\gamma_n^2 + 1)\operatorname{tg}(\Gamma_n a) - 2\gamma_n};$$

$$\Gamma_n = \frac{2\pi}{l} \sqrt{[\varkappa^2 - (\eta + n)^2]\left\{1 - \frac{\varkappa_e^2}{[\varkappa - \beta(\eta + n)]^2}\right\}};$$

$$\beta_n = \sqrt{\varkappa^2 - (\eta + n)^2}, \quad \gamma_n = \sqrt{1 - \frac{\varkappa_e^2}{[\varkappa - \beta(\eta + n)]^2}};$$

$\varkappa = \frac{\omega l}{2\pi c}$ — безразмерная частота;

$\eta = \frac{kl}{2\pi}$ — безразмерная постоянная распространения волны пространственного заряда;

l — период структуры;

$\varkappa_c = \frac{\omega_p l}{2\pi c}$ — безразмерная плазменная частота;

β — безразмерная скорость электронного потока;

a — толщина пучка;

W_m^n — некоторые функции;

d — ширина щели между лентами;

$$u = \cos\left(\frac{\pi d}{l}\right).$$

Проведем приближенный анализ уравнения (4). Функции ε_n при $n \to \infty$ стремятся к нулю, как $\frac{1}{n^2}$. Следовательно, бесконечный определитель с достаточной точностью может быть заменен конечным. Порядок величины $\varkappa_c^2$ $(10^{-4} - 10^{-6})$, т. е. намного меньше всех параметров задачи. В таком случае при $n \neq 0$ функции ε_n могут быть заменены следующими:

$$\varepsilon_n = 1 + i\frac{|n|}{n}\frac{\beta_n}{\gamma_i + n}.$$

Рассмотрим режим излучения в свободное пространство основной гармоники ($n = -1$). Тогда среди всех ε_n наибольшие ε_0 и ε_{-1}, остальные будут малы. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$[P_{\gamma_i-1}(u) - P_{\gamma_i}(u)]\,\varepsilon_0 - [P_{\gamma_i-1}(u) - P_{\gamma_i-2}(u)]\,\varepsilon_{-1} - 2P_{\gamma_i-1}(u) = 0, \qquad (5)$$

где $P_{\gamma_i}(u)$ — функции Лежандра.

Полагая $\gamma_i = \gamma_{i_i} + \xi$, где γ_{i_i} — величины, получаемые из уравнения (3), ξ — малое комплексное число ($|\xi| \ll \gamma_{i_i}$) разложим функцию (5) в ряд Тейлора по ξ. Для величин первого порядка малости получим (индекс i в дальнейшем для простоты опущен)

$$\xi = -\frac{\varepsilon_0 (P_{\gamma_i-1} - P_{\gamma_i}) - \varepsilon_{-1}(P_{\gamma_i-1} - P_{\gamma_i-2}) - 2P_{\gamma_i-1}}{\varepsilon_0(\psi_{\gamma_i-1} - \psi_{\gamma_i}) - \varepsilon_{-1}(\psi_{\gamma_i-1} - \psi_{\gamma_i-2}) - 2\psi_{\gamma_i-1} + K(\gamma_i)}, \qquad (6)$$

где

$$K(\gamma_i) = \varepsilon_0'(P_{\gamma_i-1} - P_{\gamma_i}) - \varepsilon_{-1}'(P_{\gamma_i-1} - P_{\gamma_i-2})$$

ε_0', ε_{-1}' — производные соответствующих функций в точке $\xi = 0$. Функции Лежандра затабулированы, а величины $\psi_{\gamma_i}(u)$ можно вычислить по формуле

$$\psi_{\gamma_i}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\gamma_i)(1-\gamma_i)\cdots(n-1-\gamma_i)(\gamma_i+1)\cdots(\gamma_i+n)}{(n!)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-u}{2}\right)^n}{(\gamma_i+m)^2 - n^2}.$$

Из (3) и (6) следует, что в электронном потоке присутствует бесконечное множество быстрых и медленных волн пространственного заряда с потерями на излучение. Для первых двух волн, постоянные распространения которых определяются верхней и нижней оценками для корней из (3), функция $K(\gamma_i)$ существенно упрощается. Выполнив предельный переход в выражениях для $\varepsilon_0(u)$, $\varepsilon_{-1}(u)$ и их производных при $\gamma_0 \to 0$, получим:

$$K(\gamma_1) = \frac{2\varkappa^2}{\gamma_1^2\beta_0} \frac{1 - i\beta_0 \frac{2\pi a}{l}}{-2 + i\beta_0 \frac{2\pi a}{l}} (P_{\gamma_1 - 1} - P_{\gamma_1}) - \frac{2\varkappa^2 (P_{\gamma_1 - 1} - P_{\gamma_1 - 2})}{\beta_{-1} (\gamma_1 - 1)^2},$$

где $\eta = \frac{\varkappa + \varkappa_e}{\beta}$ — для первой медленной волны пространственного заряда

$\eta = \frac{\varkappa - \varkappa_e}{\beta}$ — для первой быстрой волны пространственного заряда.

Анализ выражения (6) показывает, что при определенных соотношениях параметров быстрые волны затухают вдоль пучка, медленные нарастают. Поперечное распределение поля для этих типов волн оказывается различным. Быстрые волны нарастают в поперечном направлении, отбирая энергию у пучка за счет начальной модуляции. Преобразование энергии потока в мощность излучения осуществляется, в основном, через нулевую пространственную гармонику поля. Взаимодействие с высшими гармониками ничтожно мало. Важным является тот факт, что распределение мощности излучения в направлении движения пучка и против, оказывается различным. Вклад в мощность излучения в обратном направлении вносят, в основном, волны неспектрального типа, в то время как в прямом направлении излучение обусловлено медленными волнами пространственного заряда. Этот факт нужно учитывать при конструировании открытых резонаторов, возбуждаемых пучками, т. к. основной вклад в мощность излучения вносят медленные волны пространственного заряда.

В заключение следует отметить, что методом возмущений могут быть эффективно проанализированы многие задачи дифракционной электроники в самосогласованной постановке, краевые задачи для которых разрешимы в замкнутом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Палоц, Олинер. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, т. 53, № 1, 1965, Изд-во «Мир».

2. А. М. Радин, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. Тез. докл. 23 всесоюзной научной сессии НТОРиЭ им. Попова, 1967, М.