ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЭКРАНИРОВАННОЙ РЕШЕТКЕ С ПОПЕРЕЧНО НАМАГНИЧЕННЫМ РЕАЛЬНЫМ ФЕРРИТОМ

В. В. Хорошун

Харьков

1. В последнее время при исследовании дифракции электромагнитных волн на плоских металлических решетках с гиротропными средами [1—3] успешно применяется метод, развитый в работе [4] для решетки в свободном пространстве. В работе [5] этим методом решена задача дифракции плоской E-поляризованной волны, нормально падающей на плоскую металлическую решетку, расположенную на границе раздела двух сред, одна из которых представляет собой свободное полупространство, а вторая— идеальный изотропный феррит, причем постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$, достаточное для насыщения феррита, было направлено вдоль лент решетки. Такой выбор направления $\vec{H}_0$ обусловлен тем, что при экспериментальном исследовании дифракционных свойств плоских металлических решеток, нанесенных на поперечно намагниченные ферритовые пластины, постоянное магнитное поле должно быть приложено параллельно плоскости решетки. При этом достаточно рассмотреть два частных случая, а именно: параллельное и перпендикулярное направление $\vec{H}_0$ по отношению к лентам решетки. Один из этих случаев и рассмотрен в [5].

Было показано, что вдали от точки поперечного ферромагнитного резонанса отыскание неизвестных амплитуд дифракционных спектров сводится к решению задачи Римана—Гильберта [6—7], коэффициент G которой является функцией параметров феррита M_0, M_0 — постоянная намагниченность феррита подмагничивающего поля H_0 и частоты падающего поля ω, причем всюду в рассматриваемом случае $G < 0$ и конечно. Граничный контур L_1 представляет собой дугу окружности единичного радиуса аналогично [4]. Искомые амплитуды являются решениями бесконечной неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой являются быстро убывающими величинами и выражаются через полиномы $P_n(u;\ \rho)$, аналогичные полиномам Полачека [8—10], где $\rho = \frac{\ln|G|}{2\pi}$, a G — коэффициент задачи Римана — Гильберта. Для изотропных сред $G = -1$, а, следовательно, $\rho = 0$ и полиномы $P_n(u;\ \rho)$ переходят в полиномы Лежандра $P_n(u)$.

В настоящей работе показано, что решение задачи дифракции волн на решетке с поперечно намагниченным реальным ферритом может быть получено непосредственно из решения для идеального феррита [5], если в последнем заменить вещественные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей феррита и параметр ρ комплексными величинами. Последняя замена означает, что коэффициенты полученной системы алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд выражаются через полиномы $P_n(u;\ \rho)$, являющиеся комплексными полиномами.

2. В плоскости $z=0$ на расстоянии d друг от друга расположены плоские бесконечно протяженные вдоль оси OX металлические ленты, образуя периодическую вдоль OY решетку с периодом l. В плоскости $z=a$ находится идеально отражающий экран. Пространство над решеткой $(z<0)$ и за экраном $(z>a)$ является свободным, а между ними $(0<z<a)$ находится реальный феррит, намагниченный до насыщения, с параметрами

$$\varepsilon=\varepsilon'-i\varepsilon'',\quad \overset{\leftrightarrow}{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_{11} & 0 & 0\\ 0 & \mu & i\mu_a\\ 0 & -i\mu_a & \mu\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где компоненты тензора $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ являются комплексными величинами [1, 2]. (Постоянное магнитное поле приложено вдоль лент решетки). Сверху $(z<0)$ на указанную систему нормально к плоскости решетки падает плоская E — поляризованная волна единичной амплитуды

$$\vec{E}=\vec{i}e^{-ikz},\quad k=\frac{\omega}{c}.$$

Временной множитель $e^{i\omega t}$ мы здесь и далее опускаем. Требуется найти дифрагированное поле.

Будем искать его в виде ряда Фурье

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}E_n(z)\,e^{i\frac{2\pi n}{l}\varphi}.$$

Тогда выражения для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей в I $(z<0)$ и во II $(0<z<a)$ областях примут вид

$$E_x^{\mathrm{I}}=e^{-ikz}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{i\gamma_{n1}z}e^{in\varphi};$$

$$E_x^{\mathrm{II}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(b_n e^{-i\gamma_{n2}z}+c_n e^{i\gamma_{n2}z}\right)e^{in\varphi};$$

$$H_y^{\mathrm{I}}=e^{-ikz}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{\gamma_{n1}}{k}e^{i\gamma_{n1}z}e^{in\varphi}; \tag{2}$$

$$H_y^{\mathrm{II}}=\frac{1}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[b_n\Big(M\gamma_{n2}+iK\frac{2\pi n}{l}\Big)e^{-i\gamma_{n2}z}+$$
$$+c_n\Big(iK\frac{2\pi n}{l}-M\gamma_{n2}\Big)e^{i\gamma_{n2}z}\Big]e^{in\varphi},$$

где

$$M=\frac{\mu}{\mu^2-\mu_a^2};\quad K=-\frac{\mu_a^2}{\mu^2-\mu_a^2},\quad \varphi=\frac{2\pi}{l}\varphi;$$

$$\gamma_{n1}=\sqrt{k^2-\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2},\quad \gamma_{n2}=\sqrt{k^2\varepsilon\mu_{\perp}-\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}, \tag{3}$$

а $\mu_\perp$ — эффективная магнитная проницаемость феррита, связанная с компонентами тензора (1) соотношением

$$\mu_\perp = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} = \frac{1}{M} . \tag{4}$$

Выбираем те значения радикалов (3), мнимая часть которых отрицательна, а если они вещественны, то — их отрицательные значения.

Удовлетворив граничным условиям, требующим равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на лентах решетки (M) и экране, а также непрерывности электрического и магнитного полей на щелях (Щ) решетки, получим

$$C_n = -b_n e^{2i\gamma_{n2}a},\ 1 + a_0 = b_0 + c_0,\ \underset{(n \neq 0)}{a_n = b_n + c_n}$$

и следующую систему:

$$(\text{М}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\varphi} = 0;$$

$$(\text{Щ}) \sum \alpha_n \left(\gamma_{n1} + M\tau_n\gamma_{n2} + iK\frac{2\pi n}{l}\right) e^{in\varphi} = 2k - kr_1\alpha_0, \tag{5}$$

где

$$\alpha_n = b_n (1 - e^{2i\gamma_{n2}a}); \quad r_1 = 1\tau_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_\perp}}; \quad \tau_n = \frac{1 + e^{2i\gamma_{n2}a}}{1 - e^{2i\gamma_{n2}a}}$$

Введем

$$\underset{n \neq 0}{\chi_n} = 1 - \frac{i}{1+M}\left[\sqrt{\frac{\varkappa^2}{n^2} - 1} + M\tau_n \sqrt{\frac{\varkappa^2}{n^2}\varepsilon\mu_\perp + 1}\right];$$

$$p = \frac{2}{1+M+K}; \quad G = -\frac{1+M-K}{1+M+K}; \quad r = \frac{r_1}{1+M+K}; \quad x_n = n\alpha_n. \tag{6}$$

Тогда система (5) примет вид

$$(M) \sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0;$$

$$(\text{Щ}) \sum_{n>0} x_n e^{in\varphi} + G \sum_{n<0} x_n e^{in\varphi} = g(e^{i\varphi}), \tag{7}$$

где

$$g(e^{i\varphi}) = -i\varkappa p + i\varkappa r\alpha_0 + \frac{p}{2}(1+M)\sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi}.$$

В работе [4] показано, что нахождение неизвестных x_n в такого рода системах сводится к решению задачи Римана — Гильберта с коэффициентом G и свободным членом $g(e^{i\varphi})$ [6, 7]. Из выражений (3) и (6) следует, что ρ комплексно. На рисунке показаны зависимости вещественной G' и мнимой G'' частей $G = G' - iG''$ от параметра $\beta = \frac{\gamma H_0}{\omega}$, где γ — гиромагнитное отношение для электронного спина; H_0 — величина подмагничивающего поля; ω — частота падающего поля.

3. Каноническая функция неоднородной задачи Римана — Гильберта в самом обширном классе h_0 (без наложения каких-либо ограничений на концы L_1), имеет вид

$$X(z) = \left(\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}\right)^{\nu - i\rho'} (z - \alpha)^{-1},$$

где

$$\rho' = \frac{\ln|G|}{2\pi}; \quad \nu = \frac{\psi}{2\pi}; \quad 0 < \psi < 2\pi; \quad \alpha = e^{i\theta}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}.$$

Введем

$$\rho'' = \frac{1}{2} - \nu; \quad \rho = \rho' - i\rho''.$$

Тогда выражение для $X(z)$ примет вид

$$X(z) = (z-\alpha)^{-\frac{1}{2}-i\rho}\,(z-\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\rho} = e^{2\rho\theta}\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = (1-z\alpha)^{-\frac{1}{2}+i\rho}\,(1-z\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}-i\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\rho)\,z^n;\ |z| < 1. \qquad (8)$$

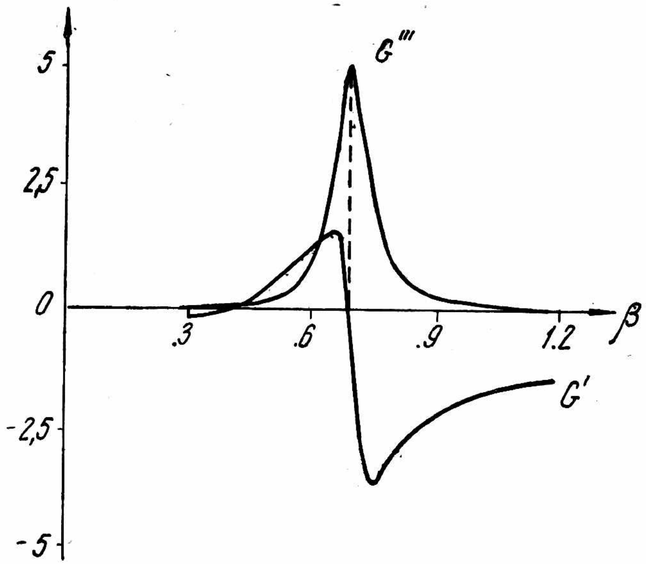

Рис. 1.

Таким образом, производящая функция $\varphi(z)$ имеет тот же вид, что и в [5], однако ρ комплексно. Это позволяет непосредственно распространить необходимые нам соотношения и формулы, полученные в [5], для вещественных $P_n(u;\rho)$ на случай комплексных полиномов $P_n(u;\rho)$.

Вводя далее коэффициенты $R_m(u;\rho)$, $V_m^n(u;\rho)$ и т. д. аналогично [5], получим следующую систему алгебраических уравнений для определения неизвестных x_n и α_0:

$$[1 + i\varkappa r V_{[\sigma]}^0(u;\rho)]\,\alpha_0 + \frac{p}{2}(1+M)\sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n}\chi_n V_{[\sigma]}^n(u;\rho) + 2cR_{[\sigma]}(u;\rho_{[\sigma]}) =$$
$$= i\varkappa p V_{[\sigma]}^0(u;\rho);$$
$$-x_m + i\varkappa r V_m^0(u;\rho)\,\alpha_0 + \frac{p}{2}(1+M)\sum_{n\neq 0} x_n \frac{(n)}{n}\chi_n V_m^n(u;\rho) + 2cR_m(u;\rho) =$$
$$= i\varkappa p V_m^0(u;\rho);$$
$$(m = 0 \pm 1,\ \pm 2.\ \ldots);\ x_0 = 0.$$

4. Из п. 3 следует, что коэффициенты $R_m(u;\rho)$, $V_m^n(u;\rho)$, $R_{[\sigma]}(u;\rho)$ и $V_{[\sigma]}^n(u;\rho)$ имеют тот же вид, что и в (5) при комплексном ρ. Однако, имея в виду определение коэффициентов $R_{[\sigma]}(u;\rho)$ и $V_{[\sigma]}^n(u;\rho)$ способом,

отличным от (5), мы выпишем необходимые нам соотношения и формулы. Рекуррентные соотношения для полиномов $P_n(u;\rho)$ имеют вид

$$nP_n(u;\rho)=[(2n-1)u+2\rho\sqrt{1-u^2}]\,P_{n-1}(u;\rho)-(n-1)\,P_{n-2}(u;\rho),\quad (n\geqslant 1). \tag{10}$$

Полиномы $\eta_n(u;\rho)$ выражаются через $P_n(u;\rho)$ следующим образом:

$$\eta_n(u;\rho)=P_n(u;-\rho)-2uP_{n-1}(u;-\rho)+P_{n-2}(u;-\rho),\ (n\geqslant 2). \tag{11}$$

Кроме того, для полиномов $P_n(u;\rho)$ имеет место представление через гипергеометрические функции аналогично (9)

$$P_n(u;\rho)=e^{\pm in\theta}F\left(-n,\frac{1}{2}\pm i\rho;\ 1;\ 1-e^{\pm 2i\theta}\right). \tag{12}$$

$$P_n(u;\rho)=e^{-i(n+1)\theta}e^{-2\rho\theta}\cdot F\left(n+1,\ \frac{1}{2}-i\rho;\ 1;\ 1-e^{-2i\theta}\right) \tag{13}$$

Из (12) и (13) непосредственно следует важное соотношение для полиномов $P_n(u;\rho)$ отрицательного индекса, полученное в [5] из интегральных представлений, а именно:

$$P_{-n}(u;\rho)=e^{-2\rho\theta}P_{n-1}(u;-\rho). \tag{14}$$

Вычисление $R_{[\sigma]}(u;\rho)$.

Так как

$$R_{[\sigma]}(u;\rho)=-\left.\frac{dR_m(u;\rho)}{dm}\right|_{m=0},$$

а

$$R_m=\frac{e^{2\rho\theta}}{2}P_m(u;\rho), \tag{15}$$

то дифференцируя (12) по индексу в точке $m=0$ и складывая полученные выражения, имеем

$$R_{[\sigma]}(u;\rho)=-\frac{e^{2\rho\theta}}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+i\rho\right)_m(1-e^{-2i\theta})^m+\left(\frac{1}{2}-i\rho_m\right)(1-e^{2i\theta})^m}{mm!}. \tag{16}$$

Вычисление $V^n_{[\sigma]}(u;\rho)$.

Аналогично коэффициенту $R_{[\sigma]}(u;\rho)$ коэффициент $V^n_{[\sigma]}(u;\rho)$ можно выразить через $V^n_m(u;\rho)$.

$$V^n_{[\sigma]}(u;\rho)=-\left.\frac{dV^n_m(u;\rho)}{dm}\right|_{m=0}.$$

Тогда, учитывая, что

$$V^n_{m\ n}(u;\rho)=\frac{e^{2\rho\theta}}{2}\frac{m+1}{m-n}\left[P_m(u;\rho)P_{n+1}(u;\rho)-P_{m+1}(u;\rho)P_n(u;\rho)\right]; \tag{17}$$

$$\left.\frac{dP_m(u;\rho)}{dm}\right|_{m=0}=-2e^{-2\rho\theta}R_{[\sigma]}(u;\rho); \tag{18}$$

$$\left.\frac{dP_{m+1}(u;\rho)}{dm}\right|_{m=0}=P_1(u;-\rho)-e^{-2\rho\theta}[1+2P_1(u;\rho)R_{[\sigma]}(u;\rho)], \tag{19}$$

получим

$$V^{n\neq 0}_{[\sigma]}(u;\rho)=\frac{P_1(u;\rho)P_n(u;\rho)-P_{n+1}(u;\rho)}{n}R_{[\sigma]}(u;\rho)+ \\ +\frac{1}{2n}\left[P_n(u;\rho)-P_{-n}(u;-\rho)\right]. \tag{20}$$

Аналогичным образом можно вычислить $\overset{\circ}{V}_{[\sigma]}(u;\ \rho)$, если воспользоваться правилом Лопиталя,

$$\overset{\circ}{V}_{[\sigma]}(u;\ \rho) = -P_1(u;\ -\rho)\,R_{[\sigma]}(u;\ \rho) - e^{-2\rho\theta}R_{[\sigma]}(u;\ -\rho). \tag{21}$$

Если воспользоваться соотношениями (10) и (11), то нетрудно доказать, что полученные выражения (20) и (21) тождественны соответствующим значениям $V^{n}_{[\sigma]}(u;\ \rho)$, полученным в [5].

5. Как отмечалось в [1, 2], механизм потерь в реальных ферритах окончательно еще не выяснен. До сих пор нет единого мнения по вопросу о том, какой из форм записи диссипативного члена следует отдать предпочтение. В работе [11] на основе квантовомеханического рассмотрения распространения высокочастотного поля в ферритовой среде с потерями, сделаны поправки к диссипативному члену в форме Ландау — Лифшица, который был использован в настоящей работе при учете потерь в феррите. Выражения для компонент тензора магнитной проницаемости феррита были взяты в виде уравнений [2]. Величина потерь оценивалась как $\delta = 0{,}05$, а параметр $A = 4\pi\frac{\gamma M_0}{\omega} = 0{,}6$, что соответствует ферриту с намагниченностью насыщения $M_0 = 160$ *гс* при $\omega = 2\pi \cdot 9375$ *Мгц*. На основе этих данных были определены значения вещественной и мнимой частей коэффициента G. Если учесть, что от величины G зависят значения полиномов $P_n(u;\ \rho)$, а следовательно, и величины искомых амплитуд гармоник, то становится понятным, что каждой форме записи диссипативного члена будет соответствовать свое значение коэффициента G, а, значит, и свои расчетные значения гармоник. В этом отношении настоящая работа может послужить ориентиром при эксперименте, особенно если учесть, что измерения можно проводить в большом интервале значений подмагничивающего поля.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить проф. В. П. Шестопалова за предложенную тему и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич. Ферриты на сверхвысоких частотах. Физматгиз, 1960.
2. А. Л. Микаэлян. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Госэнергоиздат, 1963.
3. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ. 32, 4, 1962.
5. В. В. Хорошун. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
6. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1962.
7. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз. 1963.
8. F. Pollaczek, C. R. Acad. Sci., Paris, 228, 1363, 1949.
9. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.
10. Г. Бейтмен. А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Изд-во «Наука», 1966.
11. Р. Н. Гуржи, В. М. Цукерник. ЖЭТФ. 51, 3, 1966.