ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ КОСОМ ПАДЕНИИ НА СИСТЕМУ ИЗ ДВУХ СКРЕЩЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛЕНТОЧНЫХ РЕШЕТОК

В. В. Щербак

Харьков

1. На рис. 1 изображена периодическая структура, состоящая из двух ленточных решеток, расположенных на расстоянии r друг от друга. Направления щелей и лент верхней и нижней решеток составляют между собой угол $\psi \neq 0$. Ленты предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими.

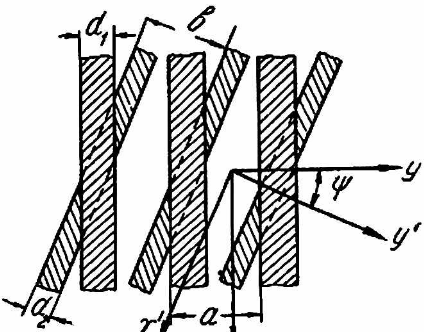

Рис. 1. Двухслойная двоякопериодическая структура из ленточных диафрагм.

Пусть на решетку, изображенную на рис. 1, со стороны $z > 0$ набегает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна

$$\vec{E},\ \vec{H} \sim \exp\{ik_y y + ik_x x - ik_z z - ikct\} \quad (1)$$

(при $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ это обычная плоская волна, а при $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ — неоднородная плоская волна, затухающая в направлении $-z$).

Из соображений симметрии следует, что искомое поле дифракции (с точностью до множителя $e^{ik_y y + ik_z z}$) будет периодично с периодом a в направлении y и с периодом b в направлении $y' = y\cos\psi - x\sin\psi$, и поэтому может быть разложено в двойной ряд Фурье вида

$$\vec{E},\ \vec{H} \sim \sum_{nm} \vec{C}_{nm}(z)\, e^{ih_n y + ig_m y'}, \tag{2}$$

где

$$h_n = \frac{2\pi}{a}(n + s);\ g_m = \frac{2\pi}{b}(m + \Omega), \tag{3}$$

а через s и Ω соответственно обозначены дробные части отношений $\frac{a}{2\pi}k_y$ и $\frac{b}{2\pi}(k_y\cos\psi - k_x\sin\psi)$. Целые части этих же величин обозначены индексами p и l (e^{-ikct} в дальнейшем опускаем). Учитывая что поля (2) должны удовлетворять волновому уравнению и условию излучения, можно записать x-вые составляющие этих полей в трех областях пространства ($z > 0$; $0 > z > -r$; $z < -r$) в следующем виде:

$$E_x^1 = Ae^{ih_py+ig_ly'-i\gamma_{pl}z} + \sum_{nm} a_{nm}e^{ih_ny+ig_my'+i\gamma_{nm}z}; \quad (4)$$

$$E_x^2 = \sum_{nm} \{c_{nm}e^{-i\gamma_{nm}z} + d_{nm}e^{i\gamma_{nm}(z+r)}\} e^{ih_ny+ig_my'};$$

$$E_x^3 = \sum_{nm} b_{nm}e^{-i\gamma_{nm}(z+r)+ih_ny+ig_my'}.$$

$$H_x^1 = Be^{ih_py+ig_ly'-i\gamma_{pl}z} + \sum_{nm} a'_{nm}e^{ih_ny+ig_my'+i\gamma_{nm}z}; \quad (5)$$

$$H_x^2 = \sum_{nm} \{c'_{nm}e^{-i\gamma_{nm}z} + d'_{nm}e^{i\gamma_{nm}(z+r)}\} e^{ih_ny+ig_my'},$$

$$H_x^3 = \sum_{nm} b'_{nm}e^{-i\gamma_{nm}(z+r)+ih_ny+ig_my'},$$

где

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k^2 - g_m^2 - h_n^2 - 2g_mh_n\cos\psi}, \quad (6)$$

а амплитуды E_x- и H_x-составляющей падающей волны обозначены соответственно через A и B. Остальные компоненты полей выражаются через E_x и H_x из уравнения Максвелла.

Неизвестные амплитуды удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &A\delta_{(n-p)(m-l)} + a_{nm} = c_{nm} + e_{nm}d_{nm};\\ &-B\delta_{(n-p)(m-l)} + a'_{nm} = -c'_{nm} + e_{nm}d'_{nm};\\ &b_{nm} = c_{nm}e_{nm} + d_{nm};\ b'_{nm} = c'_{nm}e_{nm} - d'_{nm}, \end{aligned} \quad (7)$$

вытекающим из непрерывности E_x и E_y при $z = 0$ и $z = -r$, где $e_{nm} = e^{i\gamma_{nm}r}$, а $\delta_{(n-p)(m-l)}$ — произведение символов Кронекера $\delta_{n-p}\delta_{m-l}$. Воспользовавшись также граничными условиями непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на щелях решеток и равенства нулю E_x и E_y на лентах решеток, получим четыре пары функциональных уравнений

$$\sum_{nm} (c_{nm} + d_{nm}e_{nm}) e^{i(h_n+g_m\beta)y-i\alpha g_mx} = 0; \quad y \in Л_1$$

$$\sum_{nm} c_{nm}\gamma_{nm}e^{i(h_n+g_m\beta)y-i\alpha g_mx} = A\gamma_{pl}e^{i(h_p+g_l\beta)y-i\alpha g_lx}; \quad y \in Щ_1 \quad (8)$$

$$\sum_{nm} c'_{nm}e^{i(h_n+g_m\beta)y-i\alpha g_mx} = Be^{i(h_p+g_l\beta)y-i\alpha g_lx}; \quad y \in Щ_1 \quad (9)$$

$$\sum_{nm} (c'_{nm} - d'_{nm}e_{nm}) \gamma_{nm}e^{i(h_n+g_m\beta)y-i\alpha g_mx} = 0; \quad y \in Л_1$$

$$\sum_{nm} D_{nm}e^{i(g_m+h_n\beta)y'+i\alpha h_nx'} = 0, \quad y' \in Щ_2; \quad (10)$$

$$\sum_{nm} (D_{nm} - e_{nm}C_{nm}) \gamma_{nm}e^{i(g_m+h_n\beta)y'+i\alpha h_nx'} = 0, \quad y' \in Л_2;$$

$$\sum_{nm} (D'_{nm} + e_{nm}C'_{nm}) e^{i(g_m+h_n\beta)y'+i\alpha h_nx'} = 0, \quad y' \in Л_2;$$

$$\sum_{nm} D'_{nm}\gamma_{nm}e^{i(g_m+h_n\beta)y'+i\alpha h_nx'} = 0, \quad y' \in Щ_2, \quad (11)$$

где $Л_1$ — область изменения y ($b > |2y| > d_1$), соответствующая ленте первой решетки; $Л_2$ — область изменения y' ($a > |2y'| > d_2$), соответствующая ленте второй решетки; области $Щ_1$ и $Щ_2$ соответствуют щелям решеток; $\sum_{nm}$ везде означает $\sum_{nm=-\infty}^{\infty}$. Кроме того, здесь введены обозначения $\beta = \cos\psi$; $\alpha = \sin\psi$, а через

$$C_{nm} = \beta c'_{nm} + \alpha\left\{-\frac{k\gamma_{nm}}{k^2-\alpha^2 g_m^2}c_{nm} - \frac{(h_n+g_m\beta)\alpha g_m}{k^2-\alpha^2 g_m^2}c'_{nm}\right\};$$

$$D_{nm} = \beta d'_{nm} + \alpha\left\{\frac{k\gamma_{nm}}{k^2-\alpha^2 g_m^2}d_{nm} - \frac{(h_n+g_m\beta)\alpha g_m}{k^2-\alpha^2 g_m^2}d'_{nm}\right\}; \tag{12}$$

$$C'_{nm} = \beta c_{nm} + \alpha\left\{\frac{k\gamma_{nm}}{k^2-\alpha^2 g_m^2}c'_{nm} - \frac{(h_n+g_m\beta)\alpha g_m}{k^2-\alpha^2 g_m^2}c_{nm}\right\};$$

$$D'_{nm} = \beta d_{nm} + \alpha\left\{-\frac{k\gamma_{nm}}{k^2-\alpha^2 g_m^2}d'_{nm} - \frac{(h_n+g_m\beta)\alpha g_m}{k^2-\alpha^2 g_m^2}d_{nm}\right\}$$

обозначены амплитуды составляющих поля $E_{x'}$ и $H_{x'}$ в области $0 > z > -r$ $x' = x\cos\psi + y\sin\psi$).

Совершенно так же рассматривается случай, когда в системе (рис. 1) одну или обе одноэлементные решетки заменить на многоэлементные периодические решетки [4], у которых на период приходится несколько лент и щелей различной ширины. При этом запись полей и уравнения относительно амплитуд не изменяются; усложнится только конфигурация областей $Л_1$; $Щ_1$; $Л_2$ и $Щ_2$. Дальнейший ход решения более подробно будет разобран для случая одноэлементных скрещенных решеток.

2. Способ решения уравнений (8)—(11) рассмотрим на примере (8). Поскольку они одинаково выполняются при любых x, то приравнивая нулю коэффициенты при $e^{ig_m x}$, заменим (8) на бесконечное количество пар более простых уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_n (c_{n\mu} + d_{n\mu}e_{n\mu})\, e^{i(h_n+\beta g_\mu)y} = 0, \quad a > |2y| > d_1; \\ \sum\limits_n (c_{n\mu} - A\delta_{(\mu-l)(n-p)})\,\gamma_{n\mu}e^{i(h_n+\beta g_\mu)y} = 0, \quad d_1 > |2y|; \end{cases} \tag{13}$$

$$(\mu = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots).$$

Введем следующие обозначения:

$$\varkappa = \frac{ka}{2\pi};\quad s_\mu = s + \beta\frac{a}{b}(\mu + \Omega);\quad \Omega_\nu = \Omega + \beta\frac{b}{a}(\nu + s);$$

$$\xi_{n\mu} = (n + s_\mu)\frac{|n|}{n} + i\sqrt{\varkappa^2 - \left|\frac{a}{b}\alpha(\mu+\Omega)\right|^2 - (n+s_\mu)^2};$$

$$\xi'_{\nu m} = (m + \Omega_\nu)\frac{|m|}{m} + i\sqrt{\left(\varkappa\frac{b}{a}\right)^2 - \left[\frac{b}{a}\alpha(\nu+s)\right]^2 - (m+\Omega_\nu)^2}; \tag{14}$$

$$x_{n\mu} = (c_{n\mu} + d_{n\mu}e_{n\mu})(n + s_\mu).$$

В этих обозначениях каждая пара уравнений (13) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_n \dfrac{x_{n\mu}}{n+s_\mu}e^{in\frac{\pi y}{a}} = 0; \quad \pi > \left|\dfrac{\pi y}{a}\right| > \dfrac{\pi d_1}{2a}; \\ \sum\limits_n x_{n\mu}\dfrac{|n|}{n}\dfrac{\xi_{n\mu}}{n+s_\mu}e^{in\frac{\pi y}{a}} = J\left(e^{i\frac{\pi y}{a}}\right); \quad \dfrac{\pi d_1}{2a} > \left|\dfrac{\pi y}{a}\right|, \end{cases} \tag{15}$$

где $J\left(e^{i\frac{\pi y}{a}}\right)$ — быстросходящийся ряд по степеням величины $e^{i\frac{\pi y}{a}}$. Производя обычным способом [1—3] решение уравнений (15) путем формулировки эквивалентных этим уравнениям краевых задач сопряжения, получим бесконечную двумерную систему линейных алгебраических уравнений

$$-(\nu+s_\mu)(c_{\nu\mu}+d_{\nu\mu}e_{\nu\mu})+\sum_n (c_{n\mu}+d_{n\mu}e_{n\mu})\xi_{n\mu}W^n_\nu =$$
$$= A\delta_{\mu-l}(\xi_{p\mu}-p-s_\mu)W^p_\nu+\sum_n d_{n\mu}e_{n\mu}(\xi_{n\mu}-n-s_\mu)W^n_\nu; \qquad (16)$$
$$(\nu,\ \mu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ \ldots),$$

где величины W^n_ν, зависящие от $u_1=\cos\frac{\pi d_1}{a}$, а также от s_μ, равны

$$W^n_\nu=V^n_\nu R_s-V^n_s R_\nu. \qquad (17)$$

Интегралы V^n_ν, R_ν, выражающиеся через полиномы Лежандра $P_n(u)$, определены в [1], а величины

$$V^n_s=\sum_m \frac{V^n_m}{m+s_\mu}(-1)^m;\quad R_s=\sum_m \frac{R_m}{m+s_\mu}(-1)^m \qquad (18)$$

выражены в [2] через функции Лежандра $P_{s-1}(u)$, $P_{1-s}(u)$.

Определённая из (8) система уравнений (16) пока незамкнута. Производя решение (9)—(11), получим еще три бесконечные двумерные системы линейных алгебраических уравнений (здесь они не выписываются), образующие совместно с (16) и равенствами (12) замкнутую неоднородную систему. С помощью дополнительных преобразований этой системы [3] можно получить уравнения, более удобные для численных расчетов

$$c_{\nu\mu}=A\delta_{\mu-l}T^{1,\mu}_{\nu-p}+\sum_n d_{n\mu}R^{1,\mu}_{\nu-n}e_{n\mu};$$
$$c'_{\nu\mu}=B\delta_{\mu-l}F^{1,\mu}_{\nu-p}+\sum_n d'_{n\mu}K^{1,\mu}_{\nu-n}e_{n\mu};$$
$$D_{\nu\mu}=\sum_m C_{\nu m}K^{2,\nu}_{\mu-m}e_{\nu m}; \qquad (19)$$
$$D'_{\nu\mu}=\sum_m C'_{\nu m}R^{2,\nu}_{\mu-m}e_{\nu m};$$
$$(\nu,\ \mu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\ ),$$

где

$$R_{\nu-n}=T_{\nu-n}-\delta_{\nu-n};\quad F_{\nu-n}=\delta_{\nu-n}-K_{\nu-n}, \qquad (20)$$

а $T^{1,\mu}_{\nu-n}$ и $K^{1,\mu}_{\nu-n}$ определяются соответственно из вспомогательных систем уравнений

$$-(\nu+s_\mu)T_{\nu-n}+\sum_l T_{l-n}W^l_\nu\xi_{l\mu}=W^n_\nu(\xi_{n\mu}-n-s_\mu), \qquad (21)$$
$$-(\nu+s_\mu)K_{\nu-n}+\sum_l K_{l-n}\bar{W}^l_\nu\xi_{l\mu}=\bar{W}^n_\nu(\xi_{n\mu}-n-s_\mu). \qquad (22)$$

Интегралы $\bar{W}^n_\nu$ в случае одноэлементной решетки отличаются от W^n_ν только множителем $(-1)^{n+\nu}$ и заменой аргумента u_1 на $-u_1$. Если в W^n_ν и $\bar{W}^n_\nu$ произвести замену u_1 на $u_2=\cos\frac{\pi d_2}{b}$ и заменить в (21), (22) величины $\xi_{n\mu}$ и s_μ на $\xi'_{\nu m}$ и Ω_ν, то эти уравнения (после замены индексов ν, n, μ соответственно на μ, m, ν) будут определять величины $T^{2,\nu}_{\mu-m}$ и $K^{2,\nu}_{\mu-m}$.

Коэффициенты (20) являются коэффициентами преобразования гармоник спектра друг в друга на каждой из решеток, входящих в систему. Уравнения (19), таким образом, выражают через эти величины коэффициенты преобразования волн на всей системе в целом. Если в (19) подставить вместо коэффициентов (20) коэффициенты преобразования плоских волн на многоэлементной решетке [4], то получим решение задачи дифракции волн на двух скрещенных многоэлементных периодических решетках. При этом (как и в случае одноэлементных решеток) геометрические параметры обеих решеток могут быть произвольными.

3. В уравнениях (19) содержатся параметры e_{nm}, экспоненциально убывающие с ростом n, m. Учитывая это, можно при $\psi \neq 0$ доказать сходимость замкнутой бесконечной системы уравнений (12), (19) и законность применения метода редукции при ее численном решении. При не очень малом $\frac{r}{a}$ для получения достаточной точности вычисления в уравнениях (19) необходимо удержать только те параметры $e_{nm} = e^{i\gamma_{nm} r}$, которые имеют мнимый показатель (члены, соответствующие незатухающим гармоникам). При этом для диапазона частот $0 < \varkappa^2 < 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b}\cos\psi$ (длинноволновая область) можно пренебречь всеми экспонентами, кроме l_{00}. При расчетах на ЭВМ для случая $\varkappa < 3$ при $\psi = \frac{\pi}{2}$ и нормальном падении волны ($p + s = l + \Omega = 0$) в уравнениях (19) удерживались первые девять экспонент e_{nm} для $|n|$, $|m| = 0$, 1, 2 (в этом случае $e_{nm} = e_{-n,\,m} = e_{n,\,-m}$), а контроль за точностью вычислений производился с помощью проверки выполнения закона сохранения энергии

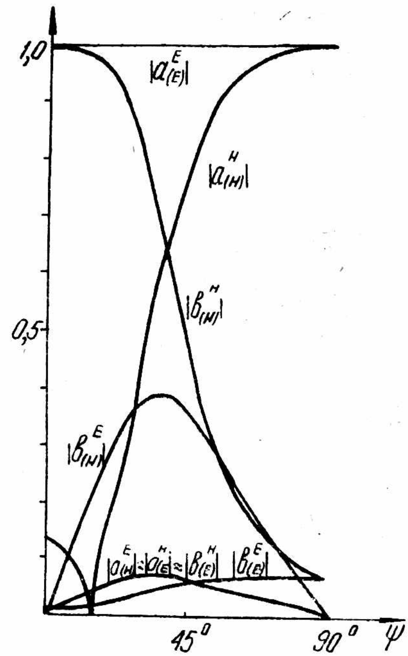

Рис. 2. Зависимость от угла скрещивания ψ собственных коэффициентов отражения $a^E_{(E)}$ и $a^H_{(H)}$ прохождения b^E_E и b^H_H поляризационного преобразования $a^H_{(E)}$, $a^H_{(H)}$, $b^H_{(E)}$, $b^E_{(H)}$ (по нулевой гармонике спектра) E_y- или H_y — поляризованной волны при нормальном падении на скрещенные решетки.

$$0 = \Delta P = \sum_{nm} \{|a_{nm}|^2 + |b_{nm}|^2 + |a'_{nm}|^2 + |b'_{nm}|^2\} \frac{k\varkappa \operatorname{Re}\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2\varkappa^2} -$$
$$- \{[|A|^2 + |B|^2] \operatorname{Re}\gamma_{pl} + 2[\operatorname{Re} A \operatorname{Im} a_{pl} + \operatorname{Re} B \operatorname{Im} a'_{pl}] \operatorname{Im}\gamma_{pl}\} \frac{k\varkappa}{k^2 - g_l^2\varkappa^2}. \quad (23)$$

Точность произведенных вычислений такова, что относительная величина ΔP была порядка 10^{-10}.

Анализ кривых рис. 2—4 и других, не представленных здесь результатов численного расчета, а также анализ аналитического решения позволяют сделать следующие выводы.

Дифрагирующая на скрещенных решетках единственная плоская (или неоднородная плоская) волна возбуждает на структуре бесконечный двумерный спектр плоских и поверхностных волн. При $a=b$ и $\psi \to 0$ этот спектр превращается в одномерный. Поляризация первичного поля не сохраняется. Только нулевая гармоника поля сохраняет x-поляризацию первичного поля при $\psi=\frac{\pi}{2}$ и нормальном или наклонном $(l+\Omega=0)$

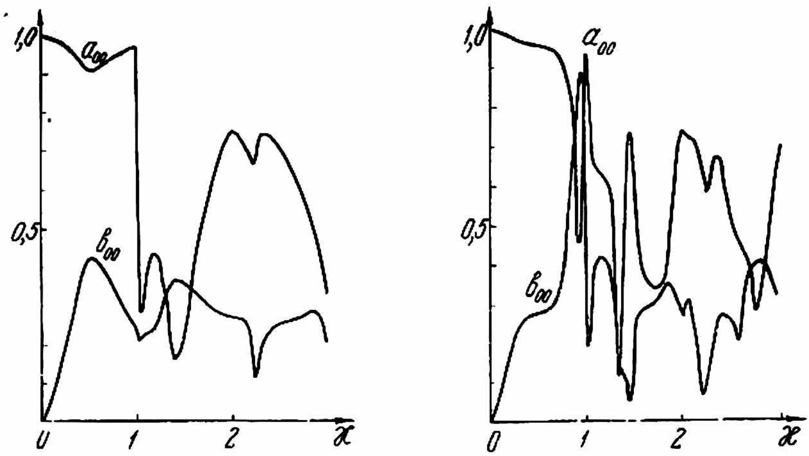

Рис. 3. Зависимость от ϰ коэффициентов прохождения b_{00} и отражения a_{00} E_y-поляризованной волны (нормальное падение).

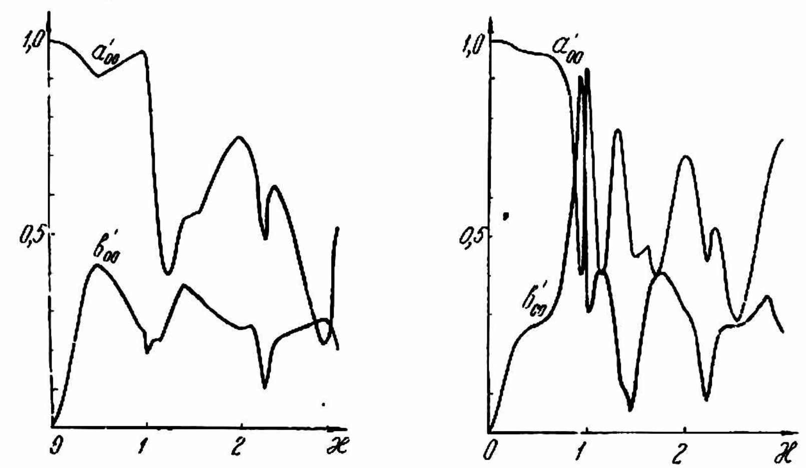

Рис. 4. Зависимость от x коэффициентов прохождения b_{00} и отражения $a'_{00} H_y$-поляризованной волны.

падении волны. Большинство высших гармоник и в этом случае изменяет поляризацию. При изменении угла ψ от $\frac{\pi}{2}$ до нуля коэффициенты поляризационного преобразования для нулевой гармоники сначала увеличиваются (рис. 2), а затем при $\psi \to 0$ снова стремятся к нулю.

При большой густоте решеток ($\varkappa \ll 1$) система рис. 1 является экраном для электромагнитного излучения. При $\psi \sim \frac{\pi}{2}$, в отличие от случая $\psi=0$ [5], степень экранировки не зависит от поляризации волн (рис. 2).

Зависимости коэффициентов преобразования волн от $\varkappa$ носят осциллирующий характер. Частота осцилляций пропорциональна величине $\frac{r}{a}$. При этом экстремумы кривых близки к точкам, соответствующим частотам собственных колебаний системы. Кроме того, при $\varkappa = \sqrt{n^2 + \left(\frac{a}{b}m\right)^2 + 2\frac{a}{b}nm\beta}$ (точки скольжения [1, 2]) указанные кривые имеют изломы (рис. 3; 4; $\varkappa = 1$; $\sqrt{2}$; 2), природа которых чисто дифракционная. Такие изломы наблюдаются и в случае дифракции на одной решетке [1].

Выполняется следствие теоремы взаимности [6], заключающееся в том, что отношения взаимных коэффициентов преобразования двух любых плоских однородных (или неоднородных) волн на системе рис. 1 равны отношениям их нормальных постоянных распространения.

Структуры, подобные системе, рассмотренной в данной работе, могут найти применение в технике квазиоптических линий передач, в антенной технике и в др. практических приложениях [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, № 4, 1962.
2. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 6, 1963.
3. В. В. Щербак. Сб. «Радиотехника», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
4. Л. Н. Литвиненко. Автореферат, Харьков, 1965.
5. О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 10, 1963.
6. М. Л. Левин. ДАН СССР, 60, 787, 1948.
7. П. Л. Капица. Сб. «Электроника больших мощностей», 4, стр. 7, 1965.