

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЯТИЭЛЕМЕНТНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ РЕШЕТКЕ

А. И. Ена

Харьков

В работе рассмотрена дифракция нормально падающей волны на плоской металлической симметричной пятиэлементной решетке. Задача решается методом, предложенным в работе [1] и обобщенным на n -элементные решетки в работе [2]. Решение проведено с целью эффективности метода для сложной периодической структуры, разработки формульной схемы, используемой в разнообразных применениях задачи, и анализа дифракционных свойств пятиэлементной решетки.

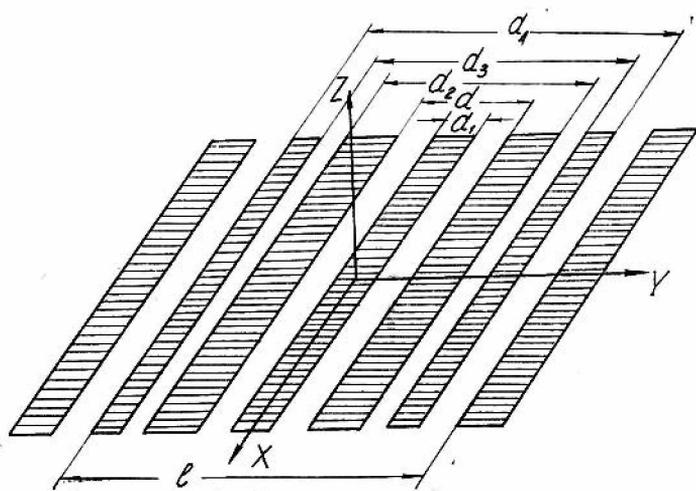


Рис. 1.

Постановка задачи. В плоскости XOY расположена периодическая металлическая решетка, состоящая из бесконечно тонких идеально проводящих лент, не ограниченная вдоль OX и OY . На периоде решетки расположены пять лент таким образом, что относительно начала координат (середина третьей ленты) решетка оказывается симметричной. Решетка и система координат приведены на рис. 1. Период решетки равен l , ширина средней ленты d_1 , величины d , d_2 , d_3 и d_4 определяют ширину и расположение лент на периоде. Сверху ($Z > 0$) нормально к ре-

сетке падает плоская электромагнитная волна с составляющими поля

$$E = E_0 e^{-ikz}, \quad H = H_0 e^{-ikz},$$

(подразумевается зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$).

Рассмотрев случай E -поляризации, из принципа двойственности для симметричной решетки легко найти решение для H -поляризации, а в силу принципа суперпозиции — и для плоской волны с произвольной поляризацией поля.

Пусть

$$E_x^{(\text{над})} = e^{-ikz}; \quad E_z^{(\text{над})} = E_y^{(\text{над})} = 0. \quad (1.1)$$

Так как решетка однородна вдоль X и периодична вдоль Y , искомое поле также будет иметь отличной от нуля только X -составляющую, которая периодична вдоль Y с периодом l . Будем искать ее в виде ряда Фурье

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) e^{i\frac{2\pi n}{l}y}.$$

Тогда поля над решеткой и под ней можно записать следующим образом:

$$E_x^{(1)} = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad z > 0; \quad (1.2)$$

$$E_x^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-\gamma_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad z < 0,$$

где из решения волнового уравнения

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad (1.3)$$

(физический смысл имеет то значение корня, у которого $Im \gamma > 0$, а при $Im \gamma = 0$ $Re \gamma > 0$; λ — длина падающей волны).

Для решения задачи нужно отыскать коэффициенты a_n и b_n .

Получение системы уравнений. Из граничных условий на решетке находим, что

$$\begin{aligned} 1 + a_0 &= b_0; \quad a_n = b_n \quad (n \neq 0); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\frac{2\pi n}{l}y} &= 0 \quad (\text{на металле}); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \gamma_n e^{i\frac{2\pi n}{l}y} &= k \quad (\text{на щелях}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим

$$\chi_n = 1 + i \sqrt{\frac{z^2}{n^2} - 1} \quad (n \neq 0); \quad z = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}; \quad (2.2)$$

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} = \frac{2\pi |n|}{l} i (1 - \chi_n) \quad n \neq 0;$$

$$\varphi = \frac{2\pi y}{l}; \quad \psi_k = \frac{\pi d_k}{l} \quad (k = 0, 1 \dots 4).$$

Перепишем (2.1) в новых обозначениях:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta_1; \quad \theta < |\varphi| < \theta_2; \quad \theta_3 < |\varphi| < \theta_4; \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n |n| (1 - \gamma_n) e^{in\varphi} = ix(b_0 - 1), \quad \theta_1 < |\varphi| < \theta_2; \quad \theta_2 < |\varphi| < \theta_3; \quad \theta_4 < |\varphi|.$$

Продифференцируем первое уравнение из (2.3) по φ и положим $b_n n = X_n$:

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0,$$

$$|\varphi| < \theta_1; \quad \theta < |\varphi| < \theta_2; \quad \theta_3 < |\varphi| < \theta_4;$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ix b_0 + f(e^{i\varphi}). \quad (2.4)$$

$$\theta_1 < |\varphi| < \theta; \quad \theta_2 < |\varphi| < \theta_3; \quad \theta_4 < |\varphi|;$$

здесь

$$f(e^{i\varphi}) = -ix + \sum_{n=0} X_n \frac{|n|}{n} \gamma_n e^{in\varphi}.$$

Для полноты системы (2.4) нужно добавить к ней равенства

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} e^{in\delta_q} \quad (q = 1, 2, 3),$$

где δ_q заданы на лентах следующим образом:

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \mp \frac{\theta + \theta_2}{2}, \quad \delta_3 = \mp \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}.$$

Сложим и вычтем равенства с одинаковыми значениями (δ_q) и перепишем их в таком виде:

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \cos n \delta_2; \quad -b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \cos n \delta_3; \quad (2.5)$$

$$0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \sin n \delta_2; \quad 0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \sin n \delta_3;$$

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n}.$$

Система уравнений (2.4) решается с помощью метода задачи Римана—Гильберта в [1]. В нашем случае введем следующие обозначения (рис. 2):

$$R(\zeta) = \begin{cases} \prod_{k=1}^5 |(\zeta - \alpha_k)(\zeta - \bar{\alpha}_k)|^{-\frac{1}{2}} & \text{на } L_1, \\ 0 & \text{на } L_2; \end{cases}$$

$$V_n(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\zeta^k}{\zeta - \zeta_0} \prod_{k=1}^5 |(\zeta - \alpha_k)(\zeta - \bar{\alpha}_k)|^{\frac{1}{2}} d\zeta \quad (\zeta_0 \in L_1);$$

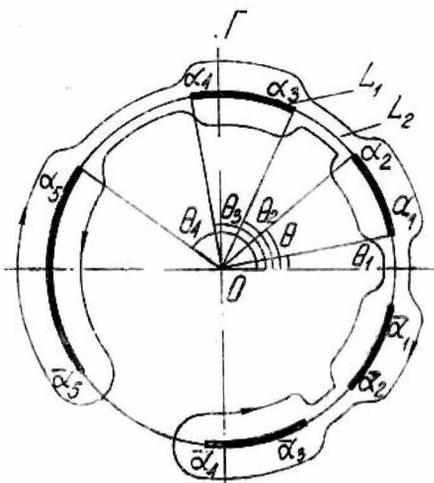


Рис. 2.

$$V_n^n = \frac{1}{2\pi} \int V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi; \quad \left. \begin{array}{l} -\theta_3 \leq \varphi \leq -\theta_2; \quad -\theta \leq \varphi \leq -\theta_1; \\ \theta_1 \leq \varphi \leq \theta; \quad \theta_2 \leq \varphi \leq \theta_3; \\ \theta_4 \leq \varphi \leq (2\pi - \theta_4). \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi;$$

$$R_{|\tau_1|}^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m}; \quad R_{|\tau_2|}^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m} \cos m\delta_2;$$

$$R_{|\tau_3|}^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m} \sin m\delta_2; \quad R_{|\tau_4|}^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m} \cos m\delta_3;$$

$$R_{|\tau_5|}^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m} \sin m\delta_3; \quad W_1^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^n}{m};$$

$$W_2^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^n}{m} \cos m\delta_2; \quad W_3^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^n}{m} \sin m\delta_2;$$

$$W_4^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^n}{m} \cos m\delta_3; \quad W_5^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^n}{m} \sin m\delta_3.$$

В (2.6) выбирается та ветвь корня, для которой $R(0) = 1$, а интеграл в $V_n(\zeta_0)$ понимается в смысле главного значения и берется по внутренней стороне дуги L_1 . Вычисление коэффициентов (2.6) приводится ниже.

После введения обозначений (2.6) и ряда элементарных преобразований получим следующую систему уравнений для симметричной решетки:

$$X_m = izb_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (V_m^n + V_m^{-n}) + 2(C_2 R_m + \dots + C_1 R_{m-4}) - izV_m^0;$$

$$0 = izb_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (V_0^n + V_0^{-n}) + 2(C_2 R_0 + \dots + C_1 R_{-4}) - izV_0^0;$$

$$-b_0 = izb_0 W_1^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (W_1^n + W_1^{-n}) + 2(C_2 R_{|\tau_1|}^0 + \dots + C_1 R_{|\tau_1|}^{-4}) - izW_1^0;$$

$$-b_0 = izb_0 W_2^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (W_2^n + W_2^{-n}) + 2(C_2 R_{|\tau_2|}^0 + \dots + C_1 R_{|\tau_2|}^{-4}) - izW_2^0; \quad (2.7)$$

$$0 = izb_0 W_3^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (W_3^n + W_3^{-n}) + 2(C_2 R_{|\tau_3|}^0 + \dots + C_1 R_{|\tau_3|}^{-4}) - izW_3^0;$$

$$-b_0 = izb_0 W_4^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (W_4^n + W_4^{-n}) + 2(C_2 R_{|\tau_4|}^0 + \dots + C_1 R_{|\tau_4|}^{-4}) - izW_4^0;$$

$$0 = izb_0 W_5^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (W_5^n + W_5^{-n}) + 2(C_2 R_{|\tau_5|}^0 + \dots + C_1 R_{|\tau_5|}^{-4}) - izW_5^0. \quad (2.7)$$

Как показано в [2], численное решение этой системы может быть найдено методом редукции, когда бесконечная система заменяется конечной N -ого порядка, для этого все X_n , у которых $n > N$, полагаются равными нулю.

Вычисление коэффициентов. 1. Вычисление полиномов $Q_n(u, u_1, u_2, \dots, u_4)$. Пусть $\Phi(z) = \prod_{k=1}^5 [(z - \alpha_k)(z - \bar{\alpha}_k)]^{\frac{1}{2}}$ является функцией, голоморф-

ной во всей плоскости z с разрезами вдоль разрывной дуги L_1 и имеет значение $\Phi(0) = 1$. Введем функции

$$\Phi_k(z) = \sqrt{(z - \alpha_k)(z - \bar{\alpha}_k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, 5)$$

и выберем те ветви, где они имеют значения $\Phi_k(0) = 1$ и разрезы проведены между точками α_1 и $\bar{\alpha}_1$, α_2 и $\bar{\alpha}_2$, α_3 и $\bar{\alpha}_3$, α_4 и $\bar{\alpha}_4$, α_5 и $\bar{\alpha}_5$ (рис. 2). Обозначим $u = \cos \theta$, $u_1 = \cos \theta_1$, \dots , $u_4 = \cos \theta_4$. Функции $\Phi_k(z)$ являются производящими для полиномов Лежандра при $|z| < 1$

$$\frac{1}{\Phi_k(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u_k) z^n.$$

Введем разложение при $|z| < 1$

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u, u_1, \dots, u_4) z^n$$

или через полиномы Лежандра

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(z)} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} P_k(u) z^k \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} P_j(u_1) z^j \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} P_i(u_2) z^i \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} P_m(u_3) z^m \right] \times \\ &\times \left[\sum_{q=0}^{\infty} P_q(u_4) z^q \right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\sum_{k=0}^n P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(u_1) \sum_{i=0}^{n-k-j} P_i(u_2) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{m=0}^{n-k-j-i} P_m(u_3) P_{n-k-j-i-m}(u_4) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда

$$Q_n = \sum_{k=0}^n P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(u_1) \sum_{i=0}^{n-k-j} P_i(u_2) \sum_{m=0}^{n-k-j-i} P_m(u_3) P_{n-k-j-i-m}(u_4) \quad (n \geq 0). \quad (3.2)$$

Продифференцировав (3.1) по z и сравнивая с (3.2), получим рекуррентную формулу для полиномов $Q_n(u, \dots, u_4)$

$$\begin{aligned} (n-4)Q_{n-9} - (2n-7)C_5^1 Q_{n-8} + (n-3)(5+4C_5^2)Q_{n-7} - 4(2n-5)(C_5^1 + \\ + C_5^3)Q_{n-6} + 2(n-2)(5+6C_5^2+8C_5^4)Q_{n-5} - 2(2n-3)(3C_5^1+4C_5^3+ \\ + 8C_5^5)Q_{n-4} + 2(n-1)(5+6C_5^2+8C_5^4)Q_{n-3} - 4(2n-1)(C_5^1+C_5^3)Q_{n-2} + \\ + n(5+4C_5^2)Q_{n-1} - (2n+1)C_5^1 Q_n + (n+1)Q_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(C_5^n здесь и дальше обозначает число сочетаний из всех параметров u по n , где $n = 1, 2, \dots, 5$).

Полиномы $Q_n(u, \dots, u_4)$ пятиэлементной решетки можно выразить через полиномы Q_n двух двухэлементных решеток и полиномы Лежандра и при расчетах пользоваться не (3.3), а рекуррентными формулами двухэлементных решеток

$$Q_n(u, \dots, u_4) = \sum_{k=0}^s P_k(u) \sum_{l=0}^{s-k} Q_l(u_1, u_2) Q_{s-k-l}(u_3, u_4). \quad (3.4)$$

Воспользовавшись формулой Коши, можно получить интегральное представление полиномов $Q_n(u, \dots, u_4)$. Для пятиэлементной решетки оно имеет вид

$$Q_n(u, \dots, u_4) = -\frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\frac{5}{2}\varphi} \sin\left(n + \frac{5}{2}\right)\varphi}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi \quad (3.5)$$

$$\begin{array}{l} \theta_1 \leq \varphi \leq \theta \\ \theta_2 \leq \varphi \leq \theta_3 \\ \theta_4 \leq \varphi \leq \pi. \end{array}$$

Обозначим

$$\sqrt{(\cos \varphi - u)(u_1 - \cos \varphi)(\cos \varphi - u_2)(\cos \varphi - u_3)(\cos \varphi - u_4)} = r_1;$$

$$\sqrt{(u - \cos \varphi)(u_1 - \cos \varphi)(u_2 - \cos \varphi)(\cos \varphi - u_3)(\cos \varphi - u_4)} = r_2;$$

$$\sqrt{(u - \cos \varphi)(u_1 - \cos \varphi)(u_2 - \cos \varphi)(u_3 - \cos \varphi)(u_4 - \cos \varphi)} = r_3.$$

Учитывая поведение функции $\Phi(e^{i\varphi})$ на пути интегрирования, получим, что

$$Q_n(u, \dots, u_4) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\left(n + \frac{5}{2}\right)\varphi d\varphi}{r_1} + \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{\sin\left(n + \frac{5}{2}\right)\varphi d\varphi}{r_2} + \int_{\theta_4}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{5}{2}\right)\varphi d\varphi}{r_3} \right]. \quad (3.6)$$

Для полиномов с отрицательными индексами из (3.6) легко получить соотношение

$$Q_{-n}(u, \dots, u_4) = -Q_{n-5}(u, \dots, u_4). \quad (3.7)$$

Сравнивая выражения для R_m в (2.6) с (3.5), видим, что

$$R_m = \frac{1}{2} Q_m(u, \dots, u_4). \quad (3.8)$$

2. Полиномы $\mu_n(u, \dots, u_4)$.

Введем разложение

$$\sqrt{z^2 - 2uz + 1} \cdot \sqrt{z^2 - 2u_1z + 1} \cdot \sqrt{z^2 - 2u_2z + 1} \cdot \sqrt{z^2 - 2u_3z + 1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n \quad |z| < 1; \quad (3.9)$$

$$\times \sqrt{z^2 - 2u_4z + 1} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^{-n} \quad |z| > 1. \quad (3.9')$$

Умножив и разделив левую часть (3.9) саму на себя, после несложных преобразований получим выражение для любого μ_n , где $n \geq 0$

$$\mu_{n+1}(u, \dots, u_4) = Q_{n-9} - 2C_5^1 Q_{n-8} + (5 + 4C_5^2) Q_{n-7} - 8(C_5^1 + C_5^3) Q_{n-6} +$$

$$+ 2(5 + 6C_5^2 + 8C_5^4) Q_{n-5} - 4(3C_5^1 + 4C_5^3 + 8C_5^5) Q_{n-4} + 2(5 + 6C_5^2 +$$

$$+ 8C_5^4) Q_{n-3} - 8(C_5^1 + C_5^3) Q_{n-2} + (5 + 4C_5^2) Q_{n-1} - 2C_5^1 Q_n + Q_{n+1}.$$

3. Подсчитаем $V_n(\zeta_0)$ с помощью теоремы о вычетах. Для этого запишем выражение для $V_n(\zeta_0)$ в виде интеграла по контуру Γ , который

показан на рис. 2

$$V_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^n}{z - z_0} \int_{\Gamma} (z) dz.$$

По теореме о вычетах найдем $V_n(z_0)$ и, подставив полученные значения в выражение для V_m^n из (2.6), получим

$$V_m^n = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+5} \mu_{n-p+5} Q_{m-p} & n \geq 0; \\ -\frac{1}{2} (\mu_4 Q_{m+1} + \mu_1 Q_m + \mu_3 Q_{m-1} + \mu_2 Q_{m-2} + \mu_1 Q_{m-3} + Q_{m-4}) & n = -1; \\ -\frac{1}{2} (\mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2} + \mu_3 Q_m + \mu_2 Q_{m-1} + \mu_1 Q_{m-2} + Q_{m-3}) & n = -2; \\ -\frac{1}{2} (\mu_2 Q_{m+1} + \mu_1 Q_{m+2} + Q_{m+3} + \mu_2 Q_m + \mu_1 Q_{m-1} + Q_{m-2}) & n = -3; \\ -\frac{1}{2} (\mu_3 Q_{m+1} + \mu_2 Q_{m+2} + \mu_1 Q_{m+3} + Q_{m+4} + \mu_1 Q_m + Q_{m-1}) & n = -4; \\ -\frac{1}{2} (\mu_4 Q_{m+1} + \mu_3 Q_{m+2} + \mu_2 Q_{m+3} + \mu_1 Q_{m+4} + Q_{m+5} + Q_m) & n = -5; \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-p-1} Q_{m+p+1} & n < -5. \end{cases} \quad (3.11)$$

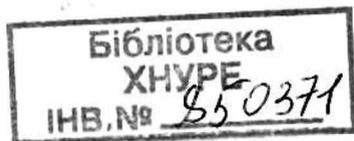
4. Воспользовавшись интегральным представлением для Q_n и извест-

ным соотношением $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{m} = \frac{1}{2} (\pi - \varphi)$, получим выражения для $R_{[\tau_1]}^{-k}$, $R_{[\tau_2]}^{-k}, \dots, R_{[\tau_4]}^{-k}$

$$R_{[\tau_1]}^{-k} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0_1}^{\theta_1} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_1} d\varphi - \int_{0_2}^{\theta_2} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_2} d\varphi + \int_{0_4}^{\pi} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_3} d\varphi \right];$$

$$R_{[\tau_2]}^{-k} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{0_1}^{\theta_1} \frac{\varphi \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_1} d\varphi - \int_{0_2}^{\theta_2} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_2} d\varphi + \int_{0_4}^{\pi} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_3} d\varphi \right];$$

П 338344



$$\begin{aligned}
R_{[\sigma_1]}^{-k} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[(\pi - \delta_2) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_1} d\varphi + \right. \\
&+ \delta_2 \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{\sin\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_2} d\varphi - \delta_2 \int_{\theta_4}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_3} d\varphi \left. \right]; \quad (3.12) \\
R_{[\sigma_1]}^{-k} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\varphi \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_1} d\varphi + \right. \\
&+ \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{\varphi \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_2} d\varphi + \int_{\theta_4}^{\pi} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_3} d\varphi \left. \right]; \\
R_{[\sigma_1]}^{-k} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[(\pi - \delta_3) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_1} d\varphi - \right. \\
&- (\pi - \delta_3) \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{\sin\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_2} d\varphi - \delta_3 \int_{\theta_4}^{\pi} \frac{(\pi - \varphi) \cos\left(\frac{5}{2} - k\right)\varphi}{r_3} d\varphi \left. \right].
\end{aligned}$$

Из выражений для $R_{[\sigma_1]}^{-k} \div R_{[\sigma_2]}^{-k}$ легко заметить, что

$$\begin{aligned}
R_{[\sigma_1]}^{-k} &= R_{[\sigma_1]}^{-(k+5)}; \quad R_{[\sigma_2]}^{-k} = R_{[\sigma_2]}^{-(k+5)}; \quad R_{[\sigma_3]}^{-k} = -R_{[\sigma_3]}^{-(k+5)}; \\
R_{[\sigma_1]}^{-k} &= R_{[\sigma_1]}^{-(k+5)}; \quad R_{[\sigma_2]}^{-k} = -R_{[\sigma_2]}^{-(k+5)}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Получим рекуррентную формулу для вычисления $R_{[\sigma_2]}^{-k}$ (рекуррентные формулы для $R_{[\sigma_1]}^{-k}$, $R_{[\sigma_2]}^{-k}$, $R_{[\sigma_3]}^{-k}$ и $R_{[\sigma_4]}^{-k}$ выводятся аналогично). Для этого заменим в рекуррентной формуле для Q_n (3.3) n на $(m+k)$, умножим все ее члены на $\frac{\cos m\delta_2}{m}$ и просуммируем по $m \neq 0$. После некоторых преобразований получим соотношение, в которое входит последовательность $R_{[\sigma_2]}^{-k}$ и ряд сумм, первая из которых равна $\sum_{m \neq 0} Q_{m+k-9} \cos m\delta_2$. Если к ней прибавить член при $m=0$, то получим разложение Фурье по δ_2 , коэффициентами которого являются полиномы Q_{m+k-9} , отличные от нуля на дуге L_1 . Величина δ_2 задана на дуге L_2 , где коэффициенты ряда обращаются в нуль, следовательно, все члены этого ряда равны нулю. То же справедливо и для остальных сумм, входящих в это соотношение. Окончательно рекуррентная формула имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} [-Q_{k-9} + 2C_5^1 Q_{k-8} - (5 + 4C_5^2) Q_{k-7} + 8(C_5^1 + C_5^3) Q_{k-6} - \\
&- 2(5 + 6C_5^2 + 8C_5^4) Q_{k-5} + 4(3C_5^1 + 4C_5^3 + 8C_5^5) Q_{k-4} - 2(5 + 6C_5^2 + \\
&+ 8C_5^4) Q_{k-3} + 8(C_5^1 + C_5^3) Q_{k-2} - (5 + 4C_5^2) Q_{k-1} + 2C_5^1 Q_k - Q_{k+1}] + \\
&+ (k-4) R_{[\sigma_3]}^{k-9} - (2k-7) C_5^1 R_{[\sigma_2]}^{k-8} + (k-3)(5 + 4C_5^2) R_{[\sigma_2]}^{k-7} - \\
&- 4(2k-5)(C_5^1 + C_5^3) R_{[\sigma_2]}^{k-6} + 2(k-2)(5 + 6C_5^2 + 8C_5^4) R_{[\sigma_2]}^{k-5} - \\
&- 2(2k-3)(3C_5^1 + 4C_5^3 + 8C_5^5) R_{[\sigma_2]}^{k-4} + 2(k-1)(5 + 6C_5^2 + 8C_5^4) R_{[\sigma_2]}^{k-3} - \\
&- 4(2k-1)(C_5^1 + C_5^3) R_{[\sigma_2]}^{k-2} + k(5 + 4C_5^2) R_{[\sigma_2]}^{k-1} - \\
&- (2k+1) C_5^1 R_{[\sigma_2]}^k + (k+1) R_{[\sigma_2]}^{k+1} = 0. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются для остальных $R_{[\sigma]}^{-k}$. Для $R_{[\sigma]}^{-h}$ и $R_{[\sigma]}^{-k}$ все члены этого выражения, содержащие Q , обращаются в нуль, и формула значительно упрощается. По своей структуре это соотношение сходно с рекуррентными формулами для Q_n и μ_n , что значительно облегчает расчеты.

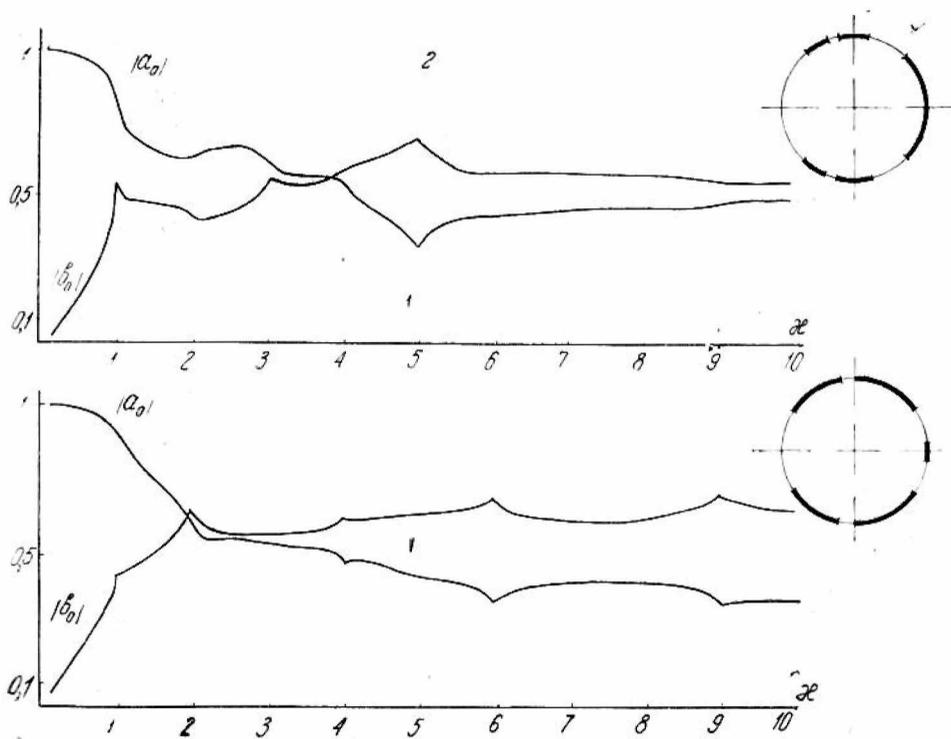


Рис. 3.

$$\begin{array}{ll}
 u = -0,1; & h = 0,6; \\
 u_1 = -0,7; & h_1 = 0,995; \\
 u_2 = -0,3; & h_2 = 0; \\
 u_3 = -0,4; & h_3 = -0,3; \\
 u_4 = -0,5; & h_4 = -0,6.
 \end{array}$$

5. Из (3.11) и (3.12) легко получить выражения для W_1^n

$$W_1^n = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+5} \mu_{n-p+5} R_{[\sigma]}^{-p} & n > 0; \\ - (R_{[\sigma]}^1 + \mu_1 R_{[\sigma]} + \mu_3 R_{[\sigma]}^{-1} + \mu_2 R_{[\sigma]}^{-2} + \mu_1 R_{[\sigma]}^{-3} + R_{[\sigma]}^{-4}) & n = -1; \\ - (\mu_1 R_{[\sigma]}^1 + R_{[\sigma]}^2 + \mu_3 R_{[\sigma]} + \mu_2 R_{[\sigma]}^{-1} + \mu_1 R_{[\sigma]}^{-2} + R_{[\sigma]}^{-3}) & n = -2; \\ - (\mu_2 R_{[\sigma]}^1 + \mu_1 R_{[\sigma]}^2 + R_{[\sigma]}^3 + \mu_2 R_{[\sigma]} + \mu_1 R_{[\sigma]}^{-1} + R_{[\sigma]}^{-2}) & n = -3; \\ - (\mu_3 R_{[\sigma]}^1 + \mu_2 R_{[\sigma]}^2 + \mu_1 R_{[\sigma]}^3 + R_{[\sigma]}^4 + \mu_1 R_{[\sigma]}^{-1} + R_{[\sigma]}^{-2}) & n = -4; \\ - (\mu_4 R_{[\sigma]}^1 + \mu_3 R_{[\sigma]}^2 + \mu_2 R_{[\sigma]}^3 + \mu_1 R_{[\sigma]}^4 + R_{[\sigma]}^5 + R_{[\sigma]}^{-1}) & n = -5; \\ -\sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-p-1} R_{[\sigma]}^{p+1} & n < -5. \end{cases} \quad (3.15)$$

Формулы для $W_2^n \div W_3^n$ имеют такой же вид, но вместо $R_{[2,1]}^p$ стоят $R_{[2,2]}^p \div R_{[2,3]}^p$ соответственно.

Численные результаты. Полученная система уравнений (2.7) решалась численно с помощью ЭЦВМ. Выражения для интегральных коэффициентов, имеющих особенности, преобразовывались к виду, пригодному для численных расчетов. Полиномы Q_n вычислялись по рекуррентной формуле (3.3) и правильность их подсчета контролировалась с помощью вычислений Q_n через рекуррентные формулы для двух двухэлементных решеток и полиномов Лежандра, а также через интегральное представление. Кроме того, для проверки решения системы использовалось свойство, отмеченное в работе [3]: при падении E -поляризованной волны влияние узких лент и щелей мало сказывается на дифракционной картине. Ленты в пятиэлементной решетке располагались так, чтобы она превращалась в одноэлементную решетку (случай равенства лент и щелей) и была близка к двухэлементной симметричной решетке. Сравнение свойств этих решеток для данных случаев дало хорошие результаты.

Кривые, полученные при расчете, приведены на рис. 3. Кривая 1 для коэффициента прохождения имеет характерный пик при $\chi = 1$, где начинают распространяться первая положительная и первая отрицательная гармоники. Такой же максимум имеется в точке появления второй положительной и второй отрицательной гармоник. Так как ширина средней ленты мала и в случае E -поляризации она незначительно влияет на распределение полей, данная решетка приближается по своим свойствам к четырехэлементной и имеет точку перегиба при $\chi = 4$, затем имеются небольшие максимумы при $\chi = 6$ и $\chi = 9$.

Параметры u_1, \dots, u_4 решетки 2 выбраны так, что она ближе по своему характеру к трехэлементной и пятиэлементной решеткам. Это хорошо видно по ходу кривой. Кроме максимума при $\chi = 1$, она имеет максимумы при $\chi = 3$ и $\chi = 5$, характерные для трех- и пятиэлементных решеток соответственно.

Таким образом, меняя расположение лент на периоде, в случае E — поляризации можно промоделировать решетки с числом элементов от одного до пяти на периоде.

В заключение автор выражает благодарность проф. В. П. Шестопалову и доц. Л. Н. Литвиненко за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, вып. 4 1962.
2. Л. Н. Литвиненко. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1965.
3. Л. Н. Литвиненко. Сб. «Радиотехника», вып. 1, Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.