# ДИФРАКЦИЯ НА НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ И ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

*И. П. Якименко*

Харьков

1. Электродинамическая теория теплового излучения [1, 2] позволяет установить спектральное распределение потока энергии флуктуационного излучения как пространственно-однородных, так и неоднородных тел. Поток энергии в дальней зоне легко определяется, если известно решение задачи дифракции плоской волны на данном теле. Однако при наличии пространственной неоднородности исследияя задача аналитически решена только для ряда частных исключительных случаев зависимости электромагнитных параметров среды от координат, которые не всегда хорошо соответствуют реальной физической ситуации. Это не дает возможности определить спонтанное излучение произвольно неоднородного тела, если даже оно обладает высокой степенью симметрии (сфера, цилиндр). Вместе с тем исследование спонтанного излучения неоднородных тел представляет большой интерес как метод получения разнообразной информации о внутренних процессах в рассматриваемом веществе (в частности, в плазме). Поскольку расшифровка экспериментальных спектров возможна только при наличии теоретических результатов, возникает необходимость развития эффективных способов вычисления спектральных распределений теплового излучения ряда простых плазменных конфигураций.

Достаточно надежен и удобен в сочетании с ЭВМ метод аппроксимации произвольно неоднородного объекта слоистой структурой, успешно примененный, например, для анализа распространения электромагнитных волн в неоднородном плазменном волноводе [4, 5]. Его главное преимущество — универсальность. В самом деле, решение, полученное этим способом, одинаково пригодно для описания явлений как в произвольной гладко-неоднородной среде (с представлением зависимости параметров от координат не только в виде математического соотношения, но и при помощи графика или даже ряда значений на дискретном наборе точек), так и в кусочно-неоднородной среде. Последнее особенно важно для плазмы, на характер волновых процессов в которой сильно влияют стенки сосуда, различные переходные слои и др.

В настоящей работе получено формальное решение задачи теплового излучения диэлектрического цилиндра (модель холодной плазмы), содержащего $N+1$ однородных слоев с произвольными температурами и диэлектрическими проницаемостями, причем $N$ произвольно.

2. Рассмотрим сначала следующую весьма общую задачу. Имеется $N+1$-слойный цилиндр с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_s$, темпе-

ратурами $T_s$ и радиусами $a_s$ каждого слоя ($s = 0, 1, 2 \ldots N$). Предположим, что в каждом слое задано некоторое (вообще говоря, объемное) распределение токов $\vec{I}_s(\vec{r})$. Тогда электромагнитное поле в каждом слое состоит из несингулярной и сингулярной частей (последняя обусловлена наличием источников). Как следует из уравнений поля, Фурье-компоненты продольных составляющих по времени $t$, угловой $\varphi$ и продольной $z$ координатам равны (индексы $\omega$, $n$, $\beta$ опускаются)

$$E_{zs} = A_s J_n(\lambda_s r) + \bar{A}_s N_n(\lambda_s r) + \Phi_s(r); \tag{1}$$

$$H_{zs} = \tilde{A}_s J_n(\lambda_s r) + \bar{\tilde{A}}_s N_n(\lambda_s r) + \tilde{\Phi}_s(r), \tag{2}$$

где

$$\Phi_s(r) = \int\limits_{a_{s-1}}^{a_s} G_{ns}(r - r')\, \rho_s(r')\, r' dr', \quad (a_{-1} = 0, \quad a_N = a); \tag{3}$$

$$\tilde{\Phi}_s(r) = \int\limits_{a_{s-1}}^{a_s} G_{ns}(r - r')\, \tilde{\rho}_s(r')\, r' dr'; \tag{4}$$

$$\lambda_s^2 = k^2 \varepsilon_s - \beta^2, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{5}$$

Здесь $G_n(r - r')$ — одномерная функция Грина для оператора Штурма-Лиувилля $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) + r\left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)$:

$$G_{ns}(r - r') = 2\pi^2 i \begin{cases} J_n(\lambda_s r')\, H_n^{(1)}(\lambda_s r), & r' < r; \\ J_n(\lambda_s r)\, H_n^{(1)}(\lambda_s r'), & r' > r, \end{cases} \tag{6}$$

а $\rho_s$ и $\tilde{\rho}_s$ являются функциями Фурье-компонент источников

$$\rho_s(r) = \frac{i}{\omega}\left\{\frac{\lambda_s^2}{\varepsilon_s} I_{zs} - \frac{n\beta}{\varepsilon_s r} I_{\varphi s} + \frac{i\beta}{\varepsilon_s}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r I_{rs})\right\}, \tag{7}$$

$$\tilde{\rho}_s(r) = -\frac{1}{c}\left\{\frac{in}{r} I_{rs} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r I_{\varphi s})\right\}. \tag{8}$$

Остальные тангенциальные составляющие определяются по обычным правилам

$$E_{\varphi s} = -\frac{1}{\lambda_s^2}\left(\frac{n\beta}{r} E_{zs} + ik\frac{\partial H_{zs}}{\partial r} + \frac{4\pi i\omega}{c^2} I_{\varphi s}\right), \tag{9}$$

$$H_{\varphi s} = -\frac{1}{\lambda_s^2}\left(\frac{n\beta}{r} H_{zs} - ik\varepsilon_s\frac{\partial E_{zs}}{\partial r} + \frac{4\pi i\beta}{c} I_{rs}\right). \tag{10}$$

Подчеркнем, что полученное здесь решение совершенно не зависит от природы источников, которые распределены непрерывно или дискретно и могут быть систематическими или стохастическими.

Для полного определения электромагнитного поля неизвестные константы задачи $A_s$, $\bar{A}_s$, $\tilde{A}_s$ и $\bar{\tilde{A}}_s$ ($s = 0, 1 \ldots N + 1$) необходимо выразить через функции источника $\rho_s$ и $\tilde{\rho}_s$. Это достигается в результате применения граничных условий при $r = a_0$, $a_1 \ldots a_N$, а также условий в нуле ($\bar{A}_0 = \bar{\tilde{A}}_0 = 0$) и на бесконечности ($A_{N+1} = \tilde{A}_{N+1} = 0$), которые сводятся к системе $4(N + 1)$ неоднородных алгебраических уравнений для $4(N + 1)$ неизвестных. Оказывается, что существует возможность получить такое решение этой системы, которое не зависит от номера $N$, что и делает плодотворной всю идею аппроксимации слоями. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} A_s &= \Gamma_s A_0 + \Gamma'_s \tilde{A}_0 + P_s; \\ \bar{A}_s &= \bar{\Gamma}_s A_0 + \bar{\Gamma}'_s \tilde{A}_0 + \bar{P}_s; \\ \tilde{A}_s &= \tilde{\Gamma}_s \tilde{A}_0 + \tilde{\Gamma}'_s A_0 + P_s; \\ \bar{\tilde{A}}_s &= \bar{\tilde{\Gamma}}_s \tilde{A}_0 + \bar{\tilde{\Gamma}}'_s A_0 + \bar{\tilde{P}}_s. \end{aligned} \tag{11}$$

Величины $\Gamma_s$, $\Gamma'_s$ ... $\bar{\tilde{\Gamma}}'_s$ и $P_s$ ... $\bar{\tilde{P}}_s$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma_{s+1} &= \gamma_s \Gamma_s + \beta_s \bar{\Gamma}_s + \gamma'_s \tilde{\Gamma}'_s + \beta'_s \bar{\tilde{\Gamma}}'_s; \\ P_{s+1} &= \gamma_s P_s + \beta_s \bar{P}_s + \gamma'_s \tilde{P}_s + \beta'_s \bar{\tilde{P}}_s + p_s, \end{aligned} \tag{12}$$

причем начальные значения, как видно из определения (11), есть

$$\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0 = 1; \quad \Gamma'_0 = \bar{\Gamma}_0 = \bar{\Gamma}_0 = \bar{\Gamma}'_0 = \bar{\tilde{\Gamma}}_0 = \bar{\tilde{\Gamma}}'_0; \quad P_0 = \bar{P}_0 = \tilde{P}_0 = \bar{\tilde{P}}_0 = 0. \tag{13}$$

Рекуррентные соотношения для остальных величин $\Gamma$ и $P$ получаются отсюда применением операций «черта», «волна» и «штрих» по правилам:

1. Операции «черта» и «волна» применяются ко всему выражению, а операция «штрих» — только к $\Gamma$;

2. Двукратное применение любой операции равнозначно сохранению первоначального выражения.

Например,

$$\bar{\tilde{\Gamma}}'_{s+1} = \bar{\tilde{\gamma}}_s \bar{\tilde{\Gamma}}'_s + \bar{\tilde{\beta}}_s \tilde{\Gamma}'_s + \bar{\tilde{\gamma}}'_s \bar{\Gamma}_s + \bar{\tilde{\beta}}'_s \Gamma_s.$$

Остальные коэффициенты в (12)

$$\begin{aligned} \beta_s &= \frac{\pi a_s}{2} \left\{ N_n(\lambda_s a_s) N'_n(\lambda_{s+1} a_s) - \frac{\varepsilon_s \lambda_{s+1}^2}{\varepsilon_{s+1} \lambda_s^2} N_n(\lambda_{s+1} a_s) N'_n(\lambda_s a_s) \right\}; \\ \bar{\beta}_s &= -\frac{\pi a_s}{2} \left\{ J_n(\lambda_s a_s) J'_n(\lambda_{s+1} a_s) - \frac{\varepsilon_s \lambda_{s+1}^2}{\varepsilon_{s+1} \lambda_s^2} J_n(\lambda_{s+1} a_s) J'_n(\lambda_s a_s) \right\}; \\ \gamma_s &= \frac{\pi a_s}{2} \left\{ J_n(\lambda_s a_s) N'_n(\lambda_{s+1} a_s) - \frac{\varepsilon_s \lambda_{s+1}^2}{\varepsilon_{s+1} \lambda_s^2} N_n(\lambda_{s+1} a_s) J'_n(\lambda_s a_s) \right\}; \\ \bar{\gamma}_s &= -\frac{\pi a_s}{2} \left\{ N_n(\lambda_s a_s) J'_n(\lambda_{s+1} a_s) - \frac{\varepsilon_s \lambda_{s+1}^2}{\varepsilon_{s+1} \lambda_s^2} J_n(\lambda_{s+1} a_s) N'_n(\lambda_s a_s) \right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

где штрих означает производную по $a_s$, а коэффициенты с волной получаются отсюда в результате формальной замены $\varepsilon_s = \varepsilon_{s+1} = 1$.

Далее,

$$\begin{aligned} \beta'_s &= \frac{i\pi}{2} \frac{n\beta}{k\varepsilon_{s+1}} \left(1 - \frac{\lambda_{s+1}^2}{\lambda_s^2}\right) N_n(\lambda_{s+1} a_s) N_n(\lambda_s a_s); \\ \bar{\beta}'_s &= -\frac{i\pi}{2} \frac{n\beta}{k\varepsilon_{s+1}} \left(1 - \frac{\lambda_{s+1}^2}{\lambda_s^2}\right) J_n(\lambda_{s+1} a_s) J_n(\lambda_s a_s); \\ \gamma'_s &= \frac{i\pi}{2} \frac{n\beta}{k\varepsilon_{s+1}} \left(1 - \frac{\lambda_{s+1}^2}{\lambda_s^2}\right) N_n(\lambda_{s+1} a_s) J_n(\lambda_s a_s); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{\gamma}_s' = -\frac{i\pi}{2}\frac{n\beta}{k^2_{s+1}}\left(1 - \frac{\lambda^2_{s+1}}{\lambda^2_s}\right) J_n(\lambda_{s+1}a_s)\, N_n(\lambda_s a_s)$$

и «волна» означает формальную замену $\varepsilon_{s+1} = -1$. Наконец,

$$\begin{aligned} p_s &= -\varphi'_{s+1} - i\varphi''_{s+1} + \varphi^i_s(\gamma_s + i\beta_s) + \tilde{\varphi}^i_s(\gamma'_s + i\beta'_s);\\ \bar{p}_s &= \varphi^i_s(\bar{\beta}_s + i\bar{\gamma}_s) + \tilde{\varphi}^i_s(\bar{\beta}'_s + i\bar{\gamma}'_s);\\ \tilde{p}_s &= -\tilde{\varphi}'_{s+1} - i\tilde{\varphi}''_{s+1} + \varphi^i_s(\tilde{\gamma}'_s + i\tilde{\beta}'_s) + \tilde{\varphi}^i_s(\tilde{\gamma}_s + i\tilde{\beta}_s);\\ \bar{\tilde{p}}_s &= \varphi^i_s(\bar{\tilde{\beta}}_s + i\bar{\tilde{\gamma}}'_s) + \tilde{\varphi}^i_s(\bar{\tilde{\beta}}_s + i\bar{\tilde{\gamma}}_s). \end{aligned} \tag{16}$$

Величины $\varphi^{i,n}_s$ и $\tilde{\varphi}^{i,n}_s$ являются линейными функционалами от источников поля и равны

$$\varphi^{i,n}_s = 2\pi^2 i \int\limits_{a_{s-1}}^{a_s} \left.\begin{matrix} J_n(\lambda_s r) \\ N_n(\lambda_s r) \end{matrix}\right\} \rho_s(r)\, r\,dr; \quad \tilde{\varphi}^{i,n}_s = 2\pi^2 i \int\limits_{a_{s-1}}^{a_s} \left.\begin{matrix} J_n(\lambda_s r) \\ N_n(\lambda_s r) \end{matrix}\right\} \rho_s(r)\, r\,dr. \tag{17}$$

(при $s = N + 1$ правые части следует умножить на $i$).

Явный вид коэффициентов $A_n$ и $\tilde{A}_n$ находим из условий излучения, эквивалентных требованию $A_{N+1} = \tilde{A}_{N+1} = 0$, откуда

$$\begin{aligned} A_0 &= \Delta^{-1}(\tilde{P}_{N+1}\Gamma'^{+}_{N+1} - P^{+}_{N+1}\tilde{\Gamma}^{+}_{N+1})\\ \tilde{A}_0 &= \Delta^{-1}(P_{N+1}\tilde{\Gamma}^{+}_{N+1} - \tilde{P}^{+}_{N+1}\Gamma^{+}_{N+1}), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\Delta = \Gamma^{+}_{N+1}\tilde{\Gamma}'^{+}_{N+1} - \Gamma'^{+}_{N+1}\tilde{\Gamma}^{+}_{N+1}. \tag{19}$$

Знак (+) означает замену в соответствующих выражениях

$$N_n(\lambda_{N+1}a_N) \to H^{(1)}_n(\lambda_{N+1}a_N).$$

3. Полученное формальное решение ценно в двух отношениях: оно во-первых, не зависит от номера $N$ (благодаря рекуррентным соотношениям) и, во-вторых, справедливо для произвольных распределений источников любой природы (удовлетворяющих, впрочем, требованию непрерывности $\vec{I}_s$ при переходе через границу с номером $s$). Вполне естественно, что из него, как один из простейших частных случаев, вытекает интересующее нас решение задачи дифракции плоской волны на $N+1$-слойном цилиндре. Для этого, учитывая, что в случае поляризации ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) поле плоской волны с амплитудой $k$, падающей под углом $\alpha$ к оси $Ox$, состоит из бесконечной суммы угловых гармоник вида

$$E^i_{zn} = \lambda i^n J_n(\lambda r)\, e^{i(n\varphi + \beta z)}, \tag{20}$$

где

$$\lambda = k\cos\alpha, \quad \beta = k\sin\alpha, \tag{21}$$

в формулах (12) и (18) достаточно положить

$$\begin{aligned} &\Phi_s = \bar{\Phi}_s = 0; \quad s < N;\\ &\Phi_{N+1} = \lambda i^n J_n(\lambda a_N); \quad \bar{\Phi}_{N+1} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда

$$P^{+}_{N+1} = -i^{n+1}\lambda; \quad \bar{P}_{N+1} = P_{N+1} = \bar{\tilde{P}}_{N+1} = 0; \tag{23}$$

и из (18) следует

$$A_0 = \lambda i^{n+1} \frac{\tilde{\Gamma}^{+}_{N+1}}{\Delta}; \quad \tilde{A}_0 = -\lambda i^{n+1} \frac{\tilde{\Gamma}'^{+}_{N+1}}{\Delta}. \tag{24}$$

Подстановка (24) в (11) приводит к решению задачи дифракции плоской волны на $N+1$-слойном цилиндре в случае $E$-поляризации. Аналогично в случае $H$-поляризации ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) поле падающей волны

$$H^i_{zn} = \lambda i^n J_n(\lambda r)\, e^{i(n\varphi+\beta z)} \tag{25}$$

и следует сохранить единственный функционал $\tilde{\Phi}_{N+1}$, отличный от нуля

$$\tilde{\Phi}_{N+1} = \lambda i^n J_n(\lambda a_N), \quad \tilde{P}^{+}_{N+1} = -i^{n+1}\lambda, \tag{26}$$

что дает

$$A_0 = -\lambda i^{n+1} \frac{\Gamma'^{+}_{N+1}}{\Delta}, \quad \tilde{A}_0 = \lambda i^{n+r} \frac{\Gamma^{+}_{N+1}}{\Delta}. \tag{27}$$

(11) с учетом (27) есть решение задачи дифракции плоской волны на $N+1$-слойном цилиндре в случае $E$-поляризации.

4. Поток энергии теплового излучения можно теперь найти, пользуясь решением дифракционной задачи (11), (24), (27) и теоремой взаимности [1, 2]. Если $\vec{I}^e(\vec{r})$ — флуктуационный ток, то проекция вектора напряженности флуктуационного поля на направление диполя $\vec{p}$ в некоторой точке $\vec{r}$, удаленной от излучающего тела [2],

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{1}{i\omega p}\int \vec{I}^e \vec{E}\, dV, \tag{28}$$

где интегрирование ведется по объему, занятому спонтанными источниками, а $\vec{E}$ — вектор внутреннего поля, возникающего в результате дифракции плоской волны на $N+1$-слойном цилиндре. В соответствии с выбранной формой записи падающего поля (20) и (25) следует положить

$$p = \frac{R}{k}, \tag{29}$$

где $R$ — расстояние от диполя до рассматриваемого участка тела. Учитывая также, что

$$\vec{I}^e = -\frac{i\omega}{4\pi}\vec{K}, \tag{30}$$

где $\vec{K}$ — «сторонние» индукции, функция корреляции для которых определяется флуктуационно-диссипативной теоремой, запишем

$$E_p(\vec{r}) = \frac{k}{4\pi R}\int \vec{E}\vec{K}\, dV. \tag{31}$$

Так как при $\hbar\omega \ll T$ ($T$ — температура тела в энергетических единицах)

$$< K_{is}(\vec{r})\, K^*_{js}(\vec{r}') > = \frac{4T_s}{\omega}\, \varepsilon''_s \delta_{ij} \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{32}$$

после усреднения квадратичной величины получим

$$|E_p|^2 = \frac{k}{4\pi^2 c R^2} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s'' T_s \int_{V_s} |\vec{E}_s|^2 dV_s. \tag{33}$$

Поток мощности в телесном угле $d\Omega = R^2 \sin\nu d\nu d\varphi$ есть

$$dP_\omega = \frac{c}{2\pi} |E_p|^2 d\Omega. \tag{34}$$

Учитывая, что $\nu = 90^\circ + \alpha$, для потока мощности с единицы поверхности цилиндра получим

$$dP_\omega = \frac{k}{(2\pi)^4 a} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s'' T_s \left( \int_{a_{s-1}}^{a_s} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\vec{E}_s|^2 dV \right) \cos\alpha\, d\alpha\, d\varphi. \tag{35}$$

Интегрируя по углам, определяем полный поток мощности теплового излучения $N+1$-слойного цилиндра

$$P_\omega = \frac{k}{(2\pi)^3 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s'' T_s \int_{V_s} |\vec{E}_s|^2 dV_s \cos\alpha\, d\alpha. \tag{36}$$

$P_\omega$ соответствует мощности волн $E$- или $H$-поляризации в зависимости от того, как ориентирован вспомогательный диполь, т. е. используется в качестве $|E_s|^2$ решение задачи дифракции для $E$-поляризации или для $H$-поляризации. При вычислении полного потока необходимо учесть вклад от обеих поляризаций. Подставляя (11) в сочетании с (24) и (27) в (36) и переходя к интегрированию по $\beta = k \sin\alpha$, а также выполняя все интегрирования по $V_s$, приходим к следующему окончательному результату:

$$P_\omega = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s'' T_s \int_{-k}^{k} \frac{d\beta k^2}{|\lambda_s|^4 |\Delta|^2} (f_{se} + f_{sh}), \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} f_{se} = {} & |\lambda_s|^4 (|\alpha_{se}|^2 I_{1s}^{ii} + |\bar{\alpha}_{se}|^2 I_{1s}^{nn} + 2\mathrm{Re}\, \alpha_{se} \bar{\alpha}_{se}^* I_{1s}^{in}) + \\ & + (k^2 |\tilde{\alpha}_{se}|^2 + \beta^2) |\alpha_{se}|^2 I_{2s}^{ii} + (k^2 |\bar{\bar{\alpha}}_{se}|^2 + \beta^2 |\bar{\alpha}_{se}|^2) I_{2s}^{nn} + \\ & + 2\mathrm{Re}\, (k^2 \tilde{\alpha}_{se} \bar{\bar{\alpha}}_{se}^* + \beta^2 \alpha_{se} \bar{\alpha}_{se}^*) I_{2s}^{in} - 2n\beta k\, \mathrm{Im}\, (\alpha_{se}^* \tilde{\alpha}_{se} I_{3s}^{ii} + \\ & + \bar{\alpha}_{se}^* \bar{\bar{\alpha}}_{se} I_{3s}^{nn} + \bar{\alpha}_{se}^* \tilde{\alpha}_{se} I_{3s}^{in} + \alpha_{se}^* \bar{\bar{\alpha}}_{se} I_{3s}^{ni}); \quad f_{sh} = f_{se}(e \to h), \end{aligned} \tag{38}$$

а коэффициенты $\alpha$ —

$$\begin{aligned} & \alpha_{se} = \Gamma_s \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+} - \Gamma_s' \tilde{\Gamma}_{N+1}'^{+}, \quad \bar{\alpha}_{se} = \bar{\Gamma}_s \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+} - \bar{\Gamma}_s' \tilde{\Gamma}_{N+1}'^{+}; \\ & \tilde{\alpha}_{se} = \tilde{\Gamma}_s' \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+} - \tilde{\Gamma}_s \tilde{\Gamma}_{N+1}'^{+}, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{se} = \bar{\bar{\Gamma}}_s' \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+} - \bar{\bar{\Gamma}}_s \tilde{\Gamma}_{N+1}'^{+}. \end{aligned} \tag{39}$$

Коэффициенты $\alpha_{sh}$ получаем из (39) в результате замен

$$\tilde{\Gamma}_{N+1} \to \Gamma_{N+1}'^{+}, \quad \tilde{\Gamma}_{N+1}' \to \Gamma_{N+1}^{+}. \tag{40}$$

Наконец, величины типа $I_s$ вычисляются по формулам

$$I_s = I_s(a_s) - I_s(a_{s-1}), \tag{41}$$

причем

$$I_{1s}^{xz}(r) = \frac{X_n(\lambda_s r)\, Z_n'^{*}(\lambda_s r) - X_n'(\lambda_s r)\, Z_n^{*}(\lambda_s r)}{\lambda_s^2 - \lambda_s^{*2}};$$

$$I_{2s}^{xz}(r) = \frac{\lambda_s^2 X_n(\lambda_s r)\, Z_n'^{*}(\lambda_s r) - \lambda_s^{*2} X_n'(\lambda_s r)\, Z_n^{*}(\lambda_s r)}{\lambda_s^2 - \lambda_s^{*2}}; \tag{42}$$

$$I_{3s}^{xz}(r) = X_n(\lambda_s r)\, Z_n^{*}(\lambda_s r).$$

Здесь вместо $X_n(\lambda_s r)$ и $Z_n(\lambda_s r)$ следует взять $J_n(\lambda_s r)$ или $N_n(\lambda_s r)$ в соответствии с индексами, которыми снабжены величины $I_s$ в (38).

В (37) специально сохранена такая конструкция, что вклады электрических и магнитных мультиполей в полное излучение отделены.

5. Как видно из (37), тепловое излучение обладает некоторой диаграммой по углу $\alpha$. Если необходимо определить поток мощности в интервале углов $d\beta$, то достаточно ограничиться вычислением подынтегрального выражения. Особенно простой результат получаем при $\beta = 0$, что соответствует излучению по нормали к цилиндру. В этом случае все штрихованные коэффициенты равны нулю, что приводит к сильному упрощению вида величины $\alpha$

$$\alpha_{se} = \Gamma_s \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+};\quad \bar{\alpha}_{se} = \bar{\Gamma}_s \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+};\quad \tilde{\alpha}_{se} = \bar{\bar{\alpha}}_{se} = 0;$$

$$\tilde{\alpha}_{sh} = -\tilde{\Gamma}_s \Gamma_{N+1}^{+},\quad \bar{\bar{\alpha}}_{sh} = -\bar{\bar{\Gamma}}_s \Gamma_{N+1}^{+},\quad \alpha_{sh} = \bar{\alpha}_{sh} = 0. \tag{43}$$

Из (19) следует, что

$$\Delta = \Gamma_{N+1}^{+} \tilde{\Gamma}_{N+1}^{+}. \tag{44}$$

Подстановка (43) и (44) в общую формулу (37) дает

$$\left.\frac{dP_{\omega}}{d\beta}\right|_{\beta=0} = \frac{k^2}{4\pi^2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s'' T_s \left\{ \frac{1}{|\Gamma_{N+1}^{+}|^2} \left( |\Gamma_s|^2 I_{1s}^{ii} + |\bar{\Gamma}_s|^2 I_{1s}^{nn} + 2\operatorname{Re} \Gamma_s \bar{\Gamma}_s^{*} I_{1s}^{in} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2}{|\lambda_s|^4 |\tilde{\Gamma}_{N+1}^{+}|^2} \left( |\tilde{\Gamma}_s|^2 I_{2s}^{ii} + |\bar{\bar{\Gamma}}_s|^2 I_{2s}^{nn} + 2\operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_s \bar{\bar{\Gamma}}_s^{*} I_{2s}^{in} \right) \right\}. \tag{45}$$

Следует обратить внимание на простоту и физическую ясность выражения (45). Первое слагаемое в (45) определяет излучение электрических, а второе — магнитных мультиполей. Таким образом, возможные резонансы излучения $E$-поляризации определяются уравнением

$$|\Gamma_{N+1}^{+}|^2 = \min, \tag{46}$$

а $H$-поляризации

$$|\tilde{\Gamma}_{N+1}^{+}|^2 = \min, \tag{47}$$

т. е. в отличие от общего случая уравнения для резонансов разделяются. Это является отражением хорошо известного из теории дифракции на цилиндре факта отсутствия связи между $E$- и $H$-волнами при рассеянии нормально падающей плоской волны.

6. Формулы типа (37) или (45) позволяют определить спектральный состав мощности теплового излучения произвольно неоднородного цилиндра, если только $N$ достаточно велико (как показано в [5], выбор $N = 20$ уже дает удовлетворительные результаты). Наличие рекуррентных соотношений и структура всех введенных в настоящей работе ве-

личин обеспечивают удобную и экономную программу для ЭВМ. Вместе с тем эти формулы прямо применимы к тепловому излучению любой слоистой структуры (например, плазмы в стеклянном баллоне) при любом $N$. Если положить, в частности, $N=0$, то мы приходим к задаче о тепловом излучении однородного диэлектрического цилиндра [3]. Тогда из общих формул (19) и (39) следует

$$\alpha_{se} = \tilde{\gamma}_0 = \frac{\pi a}{2}\Delta_1, \quad \tilde{\alpha}_{se} = -\tilde{\gamma}_0'^{+} = \frac{i\pi a}{2}\delta, \quad \bar{\alpha}_{se} = \bar{\bar{\alpha}}_{se} = 0;$$

$$\alpha_{sh} = \gamma_0'^{+} = \frac{i\pi a}{2}\delta, \quad \tilde{\alpha}_{sh} = -\gamma_0^{+} = -\frac{\pi a}{2}\Delta_2, \quad \bar{\alpha}_{sh} = \bar{\bar{\alpha}}_{sh} = 0. \tag{48}$$

$$\Delta = \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2 (\Delta_2\Delta_1 - \delta^2),$$

где

$$\Delta_1 = H_n'J_n - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} H_n J_n', \quad \Delta_2 = H_n'J_n - \frac{\varepsilon\lambda^2}{\lambda_0^2} J_n'H_n,$$

$$\delta = \frac{n\beta}{ka}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right) H_n J_n, \quad \lambda_0^2 = k^2\varepsilon - \beta^2, \tag{49}$$

$$\lambda^2 = k^2 - \beta^2.$$

Из (37) и (48) вытекает, что для случая однородного цилиндра

$$P_\omega = \frac{\varepsilon'' T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{k} d\beta \frac{\lambda^2}{|\lambda_0|^4 |\Delta_2\Delta_1 - \delta^2|^2} \{ |\lambda_0|^4 (|\Delta_1|^2 +$$

$$+ |\delta|^2) I_1 + [k^2(|\Delta_2|^2 + |\delta|^2) + \beta^2(|\Delta_1|^2 + |\delta|^2)] I_2 -$$

$$- n\beta k [\delta(\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^*(\Delta_1 + \Delta_2)] I_3 \}, \tag{50}$$

т. е. известный результат С. М. Рытова [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Левин. ДАН СССР, 102, № 1, 53, 1955.
2. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Изд-во «Наука», 1966.
3. С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. Изд-во АН СССР, 1953.
4. И. П. Якименко. ЖТФ, XXXVI, № 5, 868, 1966.
5. В. Н. Крепак и И. П. Якименко. Радиотехника и электроника. 1968, № 4.