

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДОВ ПОЛИНОМАМИ ВЫСОКИХ ЧЕТНЫХ
СТЕПЕНЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ, ОТСЧИТЫВАЕМОГО ОТ НАПРЯЖЕНИЯ
МИНИМУМА**

Т. И. Колпакова, В. А. Малышев

Таганрог

Если изобразить вольт-амперную характеристику туннельного диода (рис. 1, а) в относительных координатах таким образом, как это сделано на рис. 1, б, где $U_2 = U_1 + \frac{a}{2}$, то [1] подобные кривые можно аппроксимировать полиномами четных степеней V . Причем, полином вида

$$I = (1 - \delta) + aV^2 + bV^4 + cV^6 \quad (1)$$

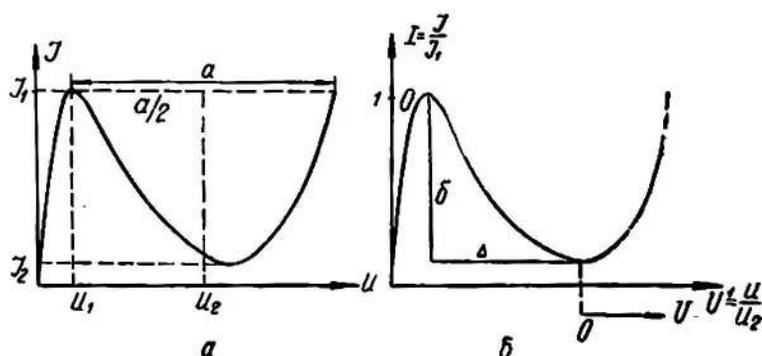


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика туннельного диода (а) в относительных координатах (б)

будет описывать кривую на рис. 1, б лишь при $\Delta \leq 0,816$. Однако часто вольт-амперные характеристики туннельных диодов имеют величины $\Delta > 0,816$. Для теоретического квазилинейного анализа работы таких диодов в схемах необходимо уметь аппроксимировать их вольт-амперные характеристики так, чтобы аналитические кривые на рабочем участке достаточно близко подходили к реальным. С увеличением значения Δ для аппроксимации можно использовать четные полиномы вида

$$I = (1 - \delta) + aV^d + bV^4 + cV^6. \quad (2)$$

где d , l и h — любые четные числа, выбранные в различных сочетаниях (например, 2, 4, 10; 2, 4, 8; 4, 6, 12 и т. д.).

Коэффициенты a , b и c полинома (2) можно определить из следующих трех условий [1]:

1) прохождение кривой через точку максимума

$$I = 1; V = -\Delta;$$

2) прохождение через начало координат

$$I = 0; V = -1;$$

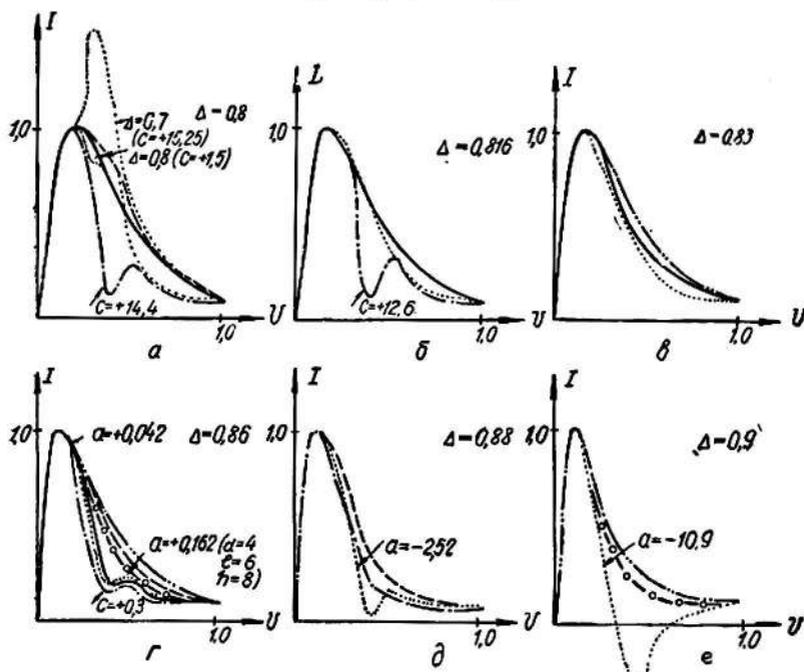


Рис. 2. Аппроксимирующие кривые для разных значений Δ . Принятые обозначения:
 ——— $d = 2; l = 6; h = 8$, . . . $d = 4; l = 6; h = 8$, - - - - $d = 6; l = 8; h = 10$,
 - - - - $d = 2; l = 6; h = 10$, - . . - $d = 2; l = 10; h = 12$, - O - $d = 4; l = 10; h = 12$

3) наличие максимума в точке $I = 1; V = -\Delta$.
 При этом получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a\Delta^d + b\Delta^l + c\Delta^h &= \delta; \\ a + b + c &= -(1 - \delta); \\ ad + bl\Delta^{l-d} + ch\Delta^{h-d} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) может быть записано через соответствующие определители

$$a = \frac{D_a}{D}; \quad b = \frac{D_b}{D}; \quad c = \frac{D_c}{D}. \quad (4)$$

По формулам (2—4) для некоторых сочетаний d , l и h были рассчитаны кривые, приведенные на рис. 2. На основании этих графиков можно сделать вывод о том, что каждый полином может применяться для аппроксимации вольт-амперной характеристики туннельного диода в определенном диапазоне значений Δ , $\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$, так как при значениях Δ , лежащих вне этого диапазона, полиномы дают характерные искажения.

В этом диапазоне член полинома с коэффициентом a в формуле (2) должен иметь положительное значение, при отрицательных значениях a этот член вызывает нежелательные искажения в нижней части кривой, будучи больше по величине остальных слагаемых вблизи точки $V = 0$; кривая в этом случае идет вниз и при соответствующей величине a может даже уйти в область отрицательных значений I (рис. 2, e). Поэтому верхняя граница диапазона $\Delta = \Delta_{в. гр}$ определяется из условия равенства коэффициента a нулю. Так как определители D в формулах (4) имеют всегда положительные значения, что легко проверить, то условие $a = 0$ имеет вид

$$\delta(l - h\Delta^{h-l}) - (1 - \delta)(h - l)\Delta^h = 0. \quad (5)$$

При малых положительных значениях a в нижней части аппроксимирующей кривой тоже возникают искажения, так как в этом случае остальные отрицательные слагаемые по абсолютной величине могут стать больше, чем член с a , и появляются дополнительные экстремумы (рис. 2, d). По этой причине следует выбирать величину $\Delta_{в. гр}$ меньше найденной по формуле (5) приблизительно на 0,01—0,02.

Нижняя граница значений $\Delta = \Delta_{н. гр}$ зависит от знака c , так как член с коэффициентом c в формуле (2) должен обеспечить крутой спад кривой после максимума, т. е. при $l > V > \Delta$. При $c > 0$ появляются искажения как в нижней, так и в верхней части аппроксимирующих кривых (рис. 2, a ; 2, b ; 2, z).

Искажения в нижней части кривой в случае $c > 0$ подобны искажениям в случае малых положительных a (рис. 2, a ; 2, b ; 2, z). Таким образом, значение $\Delta = \Delta_{н. гр}$ определяется из условия $c = 0$

$$\delta(d - l\Delta^{l-d}) - (1 - \delta)\Delta^l(l - d) = 0. \quad (6)$$

Знак и величина коэффициента b внутри этого диапазона практически не оказывает влияния на ход аппроксимирующей кривой.

При больших значениях h и при обычно встречающихся значениях δ , близких к единице — соответственно $(1 - \delta)$ имеет малые значения — в формуле (5) можно пренебречь последним членом. Тогда условие (5) запишется проще

$$\Delta_{в. гр} = \sqrt[h-l]{\frac{l}{h}}. \quad (7)$$

Для сравнения в табл. 1 даны значения $\Delta_{в. гр}$, найденные соответственно по формулам (5) и (7) для наиболее часто встречающегося случая $\delta = 0,9$.

Таблица 1

		$d = 4; l = 6;$ $h = 8$	$d = 6; l = 8;$ $h = 10$	$d = 8; l = 10;$ $h = 12$
$\Delta_{в. гр}$	(5)	0,865	0,892	0,912
$\Delta_{в. гр}$	(7)	0,866	0,894	0,913

Как видно из табл. 1, расхождение в расчетах по формулам (5) и (7) не превышает 0,2%. Для некоторых полиномов при определенных значениях Δ в точке $I = 1$ и $V = -\Delta$ отсутствует максимум, и в этой точке кривая имеет перегиб (рис. 2, a , случай $\Delta = 0,7$; $d = 4$; $l = 6$;

$h = 8$). Наличие максимума в этой точке можно установить из условия $\frac{d^2 I}{dV^2} < 0$. Диапазон изменения Δ , внутри которого выполняется это условие, существенно зависит от величины δ ; с ростом δ он значительно сужается, но для многих полиномов этот диапазон оказывается шире диа-

пазона $\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$, ограниченного условиями (5, 6). Поэтому последние появляются необходимыми и достаточными для того, чтобы кривая не имела нежелательных искажений.

В табл. 2 приведены рассчитанные из условий (5) и (6) диапазоны $\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$ для полиномов с различными сочетаниями d, l и h , внутри которых кривые не имеют искажений, и вольт-амперные характеристики туннельных диодов могут быть аппроксимированы данными полиномами. Надо отметить, что в табл. 2 дано несколько заниженное значение $\Delta_{в. гр}$ с учетом вышесказанного.

Таблица 2

d, l, h	$\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$	d, l, h	$\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$
2, 4, 8	0,707 \div 0,84	6, 10, 12	0,87 \div 0,902
2, 6, 8	0,755 \div 0,85	2, 4, 12	0,707 \div 0,872
4, 6, 8	0,81 \div 0,855	2, 6, 12	0,755 \div 0,825
2, 4, 10	0,707 \div 0,882	2, 8, 12	0,795 \div 0,900
2, 6, 10	0,755 \div 0,88	2, 10, 12	0,816 \div 0,904
2, 8, 10	0,795 \div 0,895	4, 6, 12	0,816 \div 0,825
4, 6, 10	0,816 \div 0,875	4, 8, 12	0,84 \div 0,900
4, 8, 10	0,84 \div 0,895	4, 10, 12	0,85 \div 0,904
6, 8, 10	0,865 \div 0,892	6, 8, 12	0,865 \div 0,900
		8, 10, 12	0,895 \div 0,904

Как видно из табл. 2, диапазоны применимости полиномов зависят от сочетания показателей степеней. Чем меньше разность $h-l$ и чем больше h и l по величине, тем больше значение $\Delta_{в. гр}$. Значение $\Delta_{н. гр}$ будет тем меньше, чем меньше разность $l-d$ и чем l и d меньше по величине.

Это же можно проследить и на графиках $a = f(\Delta)$; $c = f(\Delta)$ и $b = f(\Delta)$, построенных для некоторых полиномов, где Δ изменяется в пределах $\Delta_{н. гр} < \Delta < \Delta_{в. гр}$ (здесь тоже принято значение $\delta = 0,9$) (рис. 3).

Из этих графиков видно, что при одинаковых h с увеличением суммы $d+l+h$ зависимости a, b и c от Δ идут круче.

Таблица 3

d, l, h	$\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$	d, l, h	$\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$
2, 6, 8	0,755 \div 0,85	2, 10, 12	0,816 \div 0,904
2, 6, 10	0,755 \div 0,87		
2, 8, 12	0,795 \div 0,900	4, 10, 12	0,85 \div 0,904
4, 6, 8	0,81 \div 0,855		

Наибольшие диапазоны возможного изменения Δ имеют полиномы

$$d = 2, l = 4, h = 12; \Delta_{в. гр} - \Delta_{н. гр} = 0,163;$$

$$d = 2, l = 4, h = 10; \Delta_{в. гр} - \Delta_{н. гр} = 0,145;$$

$$d = 2, l = 4, h = 8; \Delta_{в. гр} - \Delta_{н. гр} = 0,133.$$

Однако с точки зрения наибольшего значения $\Delta_{в. гр}$ и одновременно большего диапазона можно рекомендовать следующие полиномы для аппроксимации вольт-амперной характеристики туннельных диодов, сведенные в табл. 3, которая составлена на основании табл. 2 и графиков (рис. 2, а—е).

Можно убедиться, что при одинаковых Δ ход кривых на падающем участке несколько отличается, в зависимости от сочетания показателей степени. Чем больше значение h при одинаковых d (рис. 2, б, 2, в, 2, г), тем более полого идет кривая вблизи максимума в области отрицательной проводимости, при одинаковых h и больших d кривые в этой же области идут круче (рис. 2, г; 2, д; 2, е).

На основании этих рекомендаций при конкретных вольт-амперных характеристиках туннельных диодов можно подобрать аппроксимирующую кривую, которая будет точно соответствовать ходу вольт-амперной характеристики на падающем участке. В табл. 4 приведены выражения для коэффициентов a , b и c рекомендованных полиномов.

Как известно, колебательная характеристика нелинейных элементов может быть найдена из выражения [2]:

$$i_1(A) e^{-j(\delta_1 + \pi)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\alpha} [U_0 + A \cos \alpha] d\alpha, \quad (8)$$

где $i_1(A)$ — первая гармоника тока;
 δ_1 — фаза отрицательной проводимости;
 U_0 — рабочая точка;
 A — амплитуда сигнала.

В относительных координатах $I-V$ уравнение (8) записываем следующим образом:

$$i_1(A) e^{-j(\delta_1 + \pi)} = \frac{I_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\alpha} \{ (1 - \delta) + a[(p - 1) + X \cos \alpha]^d + \\ + b[(p - 1) + X \cos \alpha]^e + c[(p - 1) + X \cos \alpha]^h \} d\alpha,$$

Таблица 4

d, l, h	a	b	c
2, 6, 10	$\frac{\delta(3 - 5\Delta^4) - 2\Delta^{10}(1 - \delta)}{2\Delta^2(1 - \Delta^4)^2}$	$\frac{\delta(5\Delta^8 - 1) + 4\Delta^{10}(1 - \delta)}{2\Delta^6(1 - \Delta^4)^2}$	$\frac{\delta(1 - 3\Delta^4) - 2(1 - \delta)\Delta^6}{2\Delta^6(1 - \Delta^4)^2}$
2, 6, 8	$\frac{\delta(3 - 4\Delta^2) - \Delta^8(1 - \delta)}{\Delta^2(\Delta^6 - 3\Delta^2 + 2)}$	$\frac{\delta(4\Delta^6 - 1) + 3\Delta^8(1 - \delta)}{\Delta^6(\Delta^6 - 3\Delta^2 + 2)}$	$\frac{\delta(1 - 3\Delta^4) - 2\Delta^6(1 - \delta)}{\Delta^6(\Delta^6 - 3\Delta^2 + 2)}$
4, 10, 12	$\frac{\delta(5 - 6\Delta^2) - \Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^2(\Delta^{10} - 5\Delta^2 + 4)}$	$\frac{\delta(6\Delta^{10} - 1) + 5\Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^{10}(\Delta^{10} - 5\Delta^2 + 4)}$	$\frac{\delta(1 - 5\Delta^6) - 4\Delta^{10}(1 - \delta)}{\Delta^{10}(\Delta^{10} - 5\Delta^2 + 4)}$
2, 8, 12	$\frac{2\delta(2 - 3\Delta^4) - 2\Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^2(2\Delta^{10} - 5\Delta^4 + 3)}$	$\frac{\delta(6\Delta^{10} - 1) + 5\Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^6(2\Delta^{10} - 5\Delta^4 + 3)}$	$\frac{\delta(1 - 4\Delta^6) - 3\Delta^8(1 - \delta)}{\Delta^6(2\Delta^{10} - 5\Delta^4 + 3)}$
4, 6, 8	$\frac{\delta(3 - 4\Delta^2) - \Delta^8(1 - \delta)}{\Delta^4(1 - \Delta^2)^2}$	$\frac{2\delta(2\Delta^4 - 1) + 2\Delta^6(1 - \delta)}{\Delta^6(1 - \Delta^2)^2}$	$\frac{\delta(2 - 3\Delta^2) - \Delta^6(1 - \delta)}{\Delta^6(1 - \Delta^2)^2}$
4, 10, 12	$\frac{\delta(5 - 6\Delta^2) - \Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^4(3 - 4\Delta^2 + \Delta^6)}$	$\frac{2\delta(3\Delta^6 - 1) + 4\Delta^{12}(1 - \delta)}{\Delta^{10}(3 - 4\Delta^2 + \Delta^6)}$	$\frac{\delta(2 - 5\Delta^6) - 3\Delta^{10}(1 - \delta)}{\Delta^{10}(3 - 4\Delta^2 + \Delta^6)}$

где $X = \frac{A}{U_0}$; $p = \frac{U_0}{U_s}$.

Проделав необходимые вычисления, можно получить выражение

$$\frac{i_1(A)}{A} = G \frac{F(X)}{X} = \frac{I_1 \sigma}{U_2} \left[1 + \frac{m}{\sigma} X^2 + \frac{h}{\sigma} X^4 + \dots + \frac{r}{\sigma} X^{h-2} \right], \quad (10)$$

где $G_0 = \frac{I_1 \sigma}{U_2}$, а фаза отрицательной проводимости $\delta_1 = -\pi$. Формулы для σ , m , n , q , k и r , определенные для рекомендованных полиномов, даны в табл. 5. Коэффициент σ характеризует проводимость туннельного диода для сигналов малой амплитуды и является первой производной от функции $I = f(U)$, определяющей вольт-амперную характеристику. На падающем склоне вольт-амперной характеристики σ всегда отрицательная величина; остальные коэффициенты могут быть как положительными, так и отрицательными. Знак этих коэффициентов определяет возможные режимы возбуждения автогенераторов на туннельных диодах. При отрицательных коэффициентах $\frac{m}{\sigma}$; $\frac{n}{\sigma}$ и т. д. всегда имеет место мягкий режим возбуждения. Соответственно коэффициенты m , n , \dots , r для выполнения условия мягкого режима возбуждения должны иметь положительные значения.

Таблица 5

d, l, h	σ, m, n, q, k, r
2, 6, 8	$\sigma = 2a(p-1) + 6b(p-1)^3 + 8c(p-1)^2;$ $m = 15b(p-1)^3 + 42c(p-1)^2;$ $n = \frac{15}{4}b(p-1) + 35c(p-1)^2; \quad q = \frac{35}{8}c(p-1)$
2, 6, 10	$\sigma = 2a(p-1) + 6b(p-1)^3 + 10c(p-1)^2;$ $m = 15b(p-1)^3 + 90c(p-1)^2; \quad n = \frac{15}{4}b(p-1) + \frac{315}{2}c(p-1)^2;$ $q = \frac{525}{8}c(p-1)^2; \quad k = \frac{315}{4}c(p-1)$
2, 10, 12	$\sigma = 2a(p-1) + 10b(p-1)^3 + 12c(p-1)^2;$ $m = 90b(p-1)^2 + 165c(p-1)^2; \quad n = \frac{315}{2}b(p-1)^3 + 495c(p-1)^2;$ $q = \frac{3465}{8}c(p-1)^3 + \frac{525}{3}b(p-1)^2;$ $k = \frac{315}{64}b(p-1) + \frac{3465}{3}c(p-1)^2; \quad r = \frac{693}{178}c(p-1)$
4, 10, 12	$\sigma = 4a(p-1)^3 + 10b(p-1)^3 + 12c(p-1)^2;$ $m = 3a(p-1) + 90b(p-1)^2 + 165c(p-1)^2;$ $n = \frac{315}{2}b(p-1)^3 + 495c(p-1)^2;$ $q = \frac{3465}{8}c(p-1)^3 + \frac{525}{8}b(p-1)^2;$ $k = \frac{315}{64}b(p-1) + \frac{3465}{32}c(p-1)^2; \quad r = \frac{693}{178}c(p-1)$

Продолжение табл.

d, l, h	σ, m, n, q, k, r
4, 6, 8	$\sigma = 4a(p-1)^2 + 6b(p-1)^2 + 8c(p-1)^2;$ $m = 3a(p-1) + 15b(p-1)^2 + 42c(p-1)^2;$ $n = \frac{15}{4}b(p-1) + 35c(p-1)^2; \quad q = \frac{35}{8}c(p-1)$
2, 8, 12	$\sigma = 2a(p-1) + 8b(p-1)^2 + 12c(p-1)^2;$ $m = 42b(p-1)^2 + 165c(p-1)^2; \quad n = 35b(p-1)^2 + 495c(p-1)^2;$ $q = \frac{35}{8}b(p-1) + \frac{3465}{8}c(p-1)^2;$ $k = \frac{3465}{64}c(p-1)^2; \quad r = \frac{693}{178}c(p-1)$

Исследование этих коэффициентов показывает, что с увеличением p (т. е. рабочая точка передвигается от максимума вольт-амперной характеристики к минимуму) коэффициенты, имея положительные значения, убывают по величине, пока при определенном $p_{гр}$ не происходит изменение знака коэффициента. Некоторые коэффициенты (q для случая $d=2, l=6; h=8; k$ и q для случая $d=2, l=6; h=10$) остаются все время положительными внутри диапазона $\Delta_{н. гр} \div \Delta_{в. гр}$.

Приравнивая выражения для коэффициентов нулю, определяем $p_{гр}$. Можно показать, что коэффициенты при больших степенях X становятся равными нулю при больших значениях $p_{гр}$. Поэтому $m=0$, когда $p=p_{гр}$ является условием наступления жесткого режима возбуждения. Таким образом до $p_{гр}$ возможно только мягкое возбуждение автогенератора. В табл. 6 даны значения $p_{гр}$ для рекомендованных полино-

Таблица 6

d, l, h	$p_{гр}$ ($m=0$)	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
2, 6, 8	$p_{гр} = 1 - \sqrt{-0,357 \frac{b}{c}}$	$\frac{\delta(4\Delta^6 - 1) + 3\Delta^3(1 - \delta)}{\delta(1 - 3\Delta^3) - 2\Delta^6(1 - \delta)}$	—
2, 6, 10	$p_{гр} = 1 - \sqrt{-0,167 \frac{b}{c}}$	$\frac{\delta(5\Delta^8 - 1) + 4\Delta^{10}(1 - \delta)}{\delta(1 - 3\Delta^4) - 2\Delta^8(1 - \delta)}$	—
2, 8, 12	$p_{гр} = 1 - \sqrt{-0,254 \frac{b}{c}}$	$\frac{\delta(6\Delta^{10} - 1) + 5\Delta^{12}(1 - \delta)}{\delta(1 - 4\Delta^6) - 3\Delta^9(1 - \delta)}$	—
2, 10, 12	$p_{гр} = 1 - \sqrt{-0,542 \frac{b}{c}}$	$\frac{\delta(6\Delta^{10} - 1) + 5\Delta^{12}(1 - \delta)}{\delta(1 - 5\Delta^5) - 4\Delta^{10}(1 - \delta)}$	—
4, 6, 8	$p_{гр} = 1 - \sqrt{-0,1785 \frac{b}{c} \times}$ $\times \sqrt{\left(0,1785 \frac{b}{c}\right)^2 - \frac{a}{14c}}$	$\frac{2\delta(2\Delta^4 - 1) + 2\Delta^2(1 - \delta)}{\delta(2 - 3\Delta^2) - \Delta^6(1 - \delta)}$	$\frac{\Delta^2(3 - 4\Delta^2)}{2 - 3\Delta^2}$
4, 10, 12	$a + 30b(p_{гр} - 1)^6 +$ $+ 55c(p_{гр} - 1)^3 = 0$	$\frac{2\delta(3\Delta^4 - 1) + 4\Delta^{12}(1 - \delta)}{\delta(2 - 5\Delta^2) - 3\Delta^{10}(1 - \delta)}$	$\frac{\Delta^6(5 - 6\Delta^2)}{2 - 5\Delta^4}$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Малышев. Об аппроксимация вольт-амперной характеристики туннельного промежутка полиномами для квазилинейного анализа особенностей его работы. «Радиотехника и электроника», т. X, вып. 9, стр. 1635—1645, 1965.
2. В. А. Малышев. «Изв. вузов, Радиотехника», 1960, № 5.