

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ТРУБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ЛЕНТОЧНЫМ ПУЧКОМ

О. Д. Баранцева

Таганрог

Распределение потенциала в проводящей трубе с ленточным пучком, ограниченным магнитным полем, описано в работе [1] при предположении, что толщина пучка t много меньше его ширины d и длины l (рис. 1), и поэтому можно пренебречь изменением потенциала в направлении осей x и z , т. е. считать

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dz} = 0 \quad (1)$$

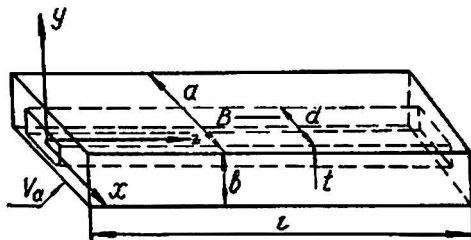


Рис. 1. Ленточный пучок, движущийся в трубе
прямоугольного сечения при наличии сильного маг-
нитного поля B

По существу это означает замену реального пучка бесконечно широким и бесконечно длинным и, таким образом, задача сводится к одномерной.

В настоящей работе определяем распределение потенциала и напряженности электрического поля в прямоугольной призме с ленточным пучком прямоугольного сечения ($\frac{dV}{dx} \neq 0$), т. е. решаем двухмерную задачу, для которой уравнение Пуассона записывается в виде

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2)$$

где ρ — плотность пространственного заряда;
 ϵ — диэлектрическая постоянная вакуума.

Ниже приводим упрощения, которые делаем в работе: во-первых, считаем пучок движущимся в очень длинной трубе прямоугольного сечения, и поэтому составляющую напряженности электрического поля E_z полагаем равной нулю; во-вторых, учитывая, что при первеансах которые применяются в реальных приборах, провисание потенциала

по сечению пучка составляет 1—8%, считаем плотность пространственного заряда ρ одинаковой по всему сечению пучка; в-третьих, предполагаем, что поток электронов находится в очень сильном продольном магнитном поле, так что движением электронов в поперечном направлении и деформацией пучка при его движении можно пренебречь.

Для определения распределения потенциала и составляющих напряженности электрического поля E_x и E_y в трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком воспользуемся функцией Грина для точечного заряда q . Как следует из [2], если стенки бесконечной заземленной проводящей трубы прямоугольного сечения определяются уравнениями $x = 0$; $x = a$; $y = 0$; $y = b$ и в точке с координатами $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$ внутри трубы находится точечный заряд, то потенциал в такой системе равен

$$V = \frac{2q}{\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1/2} e^{-\frac{(m^2 a^2 + n^2 b^2)^{1/2} |z - z_0|}{ab}} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (3)$$

При помощи выражения (3) можно найти распределение потенциала, создаваемое электронным пучком в трубе прямоугольного сечения. Для этого рассмотрим элемент заряда $dq = q_0 dz_0$ (q_0 заряд на единицу длины) и, пользуясь соотношением (3), определим выражение для потенциала, создаваемого элементом заряда dq в точке с координатами $x, y,$

$$dV = \frac{2q_0}{\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1/2} e^{-\frac{\pi (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{1/2} |z - z_0|}{ab}} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dz_0. \quad (4)$$

Используя (4), найдем распределение потенциала, создаваемое внутри длинной прямоугольной призмы линейным зарядом q_0

$$V = \int_z^{\infty} \frac{2q_0}{\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1/2} e^{-\frac{\pi (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{1/2} |z - z_0|}{ab}} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \times \\ \times \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dz_0 + \\ + \int_z^{-\infty} \frac{2q_0}{\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1/2} e^{-\frac{\pi (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{1/2} |z - z_0|}{ab}} \times \sin \frac{n\pi x_0}{a} \times \\ \times \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dz_0. \quad (5)$$

Считая заряд q_0 величиной постоянной по длине прямоугольной призмы, после интегрирования получим

$$V = -\frac{4q_0 ab}{\pi^2 \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (6)$$

Зная распределение потенциала, создаваемое линейным зарядом q_0 в трубе прямоугольного сечения, найдем распределение потенциала, создаваемое пучком прямоугольного сечения, стороны которого определяются уравнениями $x = \alpha_1$; $x = \alpha_2$; $y = \beta_1$; $y = \beta_2$ (рис. 2)

Для этого рассмотрим элемент заряда $dq_0 = \rho dx_0 dy_0$, находящийся в точке с координатами x_0, y_0 и, пользуясь соотношением (6), определим

выражение для потенциала, создаваемого элементом заряда dq_0 в точке с координатами x, y

$$dV = -\frac{4\rho ab}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \times dx_0 dy_0. \quad (7)$$

Для нахождения распределения потенциала, создаваемого ленточным пучком, необходимо проинтегрировать выражение (7) по x_0 в пределах от α_1 до α_2 и по y_0 от β_1 до β_2 .

После интегрирования получим

$$V = -\frac{16\rho a^2 b^2}{\pi^4 \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \times \frac{(m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1}}{mn} \times$$

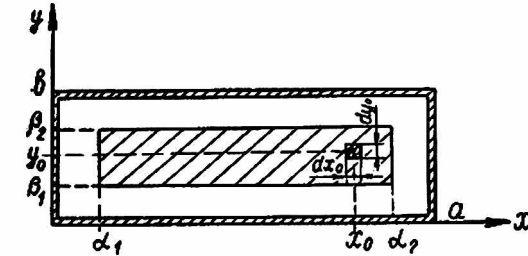


Рис. 2. Поперечное сечение ленточного пучка в трубе прямоугольного сечения

$$\times \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (8)$$

Если известно распределение потенциала, легко можно найти распределение электрического поля. Составляющие напряженности электрического поля в направлении осей x и y , создаваемые ленточным пучком прямоугольного сечения в проводящей прямоугольной призме, определяются выражениями

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{16\rho ab^2}{\pi^3 \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1}}{m} \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \times \times \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (9)$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{16\rho a^2 b}{\pi^3 \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m^2 a^2 + n^2 b^2)^{-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{n\pi}{a} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \times \times \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (10)$$

Распределение потенциала в длинной трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком, вычисленное по формуле (8) для случая, когда поперечные размеры трубы $a = 2$ мм, $b = 0,8$ мм, поперечные размеры пучка $d = 1,6$ мм, $t = 0,4$ мм, плотность пространственного заряда пучка $\rho = 2,28 \cdot 10^{-2}$ кул/м³, ускоряющее напряжение пучка $V_a = 3000$ в, показано на рис. 3, а и 3, б. Здесь также показано распределение потенциала, полученное для рассматриваемого случая методом моделирования источников поля в электролитической ванне, описанным в работе [3].

Кривая 1 на рис. 3, б приведена для сравнения и характеризует распределение потенциала вдоль оси y в случае бесконечно широкого пучка.

Распределение напряженности электрического поля, вычисленное по формулам (9) и (10), показано на рис. 4, а и 4, б. Для сравнения на этом рисунке приведено также распределение напряженности электрического поля, полученное измерениями в электролитической ванне с тоководя-

щими элементами составляющих напряженности электрического поля E_x и E_y при помощи двойного зонда. Погрешность метода измерений составляла 5%.

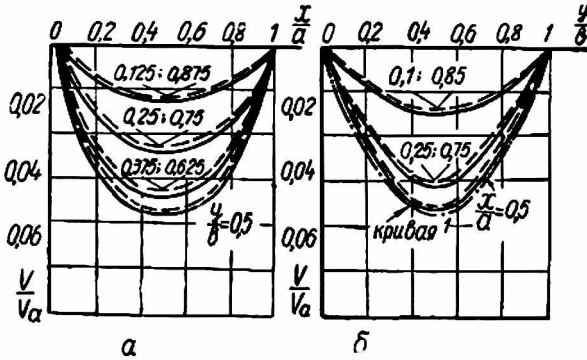


Рис. 3. Распределение потенциала в трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком:
 а — вдоль оси x ; б — вдоль оси y ; ——— расчетные данные;
 - - - данные моделирования; ——— расчет для бесконечно широкого пучка (кривая 1)

Соответствие распределения потенциала для бесконечно широкого пучка распределению потенциала вдоль оси y , рассчитанному по формуле (8) для $\frac{x}{a} = 0,5$, и достаточно полное совпадение расчетных кривых

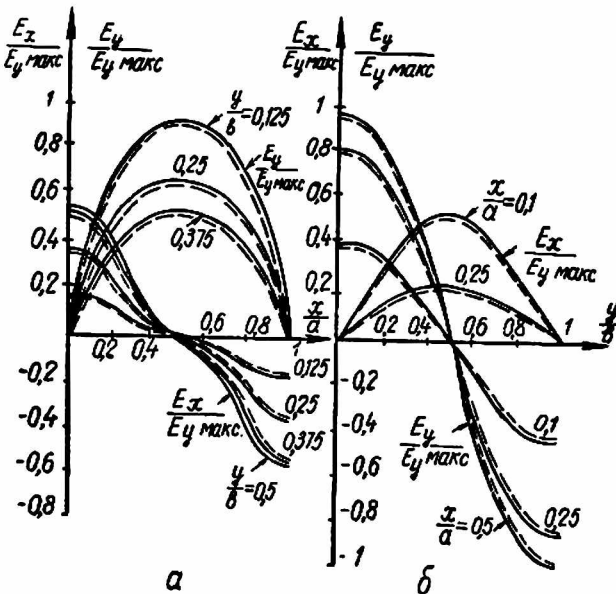


Рис. 4. Распределение составляющих напряженности электрического поля в трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком ($E_{y \text{ макс}} = 500 \cdot 10^3$ в/м):
 а — вдоль оси x ; б — вдоль оси y ; ——— расчетные данные;
 - - - данные моделирования

распределения потенциала и напряженности электрического поля с данными моделирования показывает, что выражения (8), (9) и (10) применимы для нахождения распределения потенциала и напряженности эле-

ктрического поля в длинной проводящей трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком, ограниченным магнитным полем.

Полученные выражения для распределения потенциала и напряженности электрического поля в трубе прямоугольного сечения с ленточным пучком дают возможность учитывать при расчетах изменение составляющей напряженности электрического поля E_y вдоль оси x и составляющую напряженности электрического поля по ширине пучка E_x , которая не является в ряде случаев величиной малой по сравнению с составляющей напряженности электрического поля по толщине пучка E_y (что видно из приведенного примера расчета), и пренебрежение которой может приводить к значительным погрешностям.

Выражаю благодарность доктору техн. наук В. С. Лукошкову за полезные советы в процессе работы и при обсуждении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Naeff, Proc. J. RF, 27, 9 (1939). Влияние пространственного заряда в электронных пучках.
2. В. С м а й т. Электростатика и электродинамика. Изд-во иностр лит-ры, 1954.
3. В. С. Лукошков. Моделирование источников поля в электролитической ванне при решении задач математической физики. «Электроника», вып. 7 и 8, 1958.