ВЛИЯНИЕ НАКАПЛИВАЮЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ ОШИБОК НА ФУНКЦИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

А. И. Лосев

Харьков

Постановка задачи. Влиянию случайных фазовых ошибок на функцию неопределенности радиолокационных сигналов посвящена работа [1]. Рассмотрен случай, когда фазовые ошибки представляют собой стационарный случайный процесс. Однако на практике довольно часто причины возникновения фазовых ошибок таковы, что стационарность не имеет места. Так, например, бывает в том случае, когда фазовые ошибки возникают из-за флуктуаций частот передатчика и гетеродина, из-за неучтенных допплеровских смещений частоты сигнала и т. п. Поскольку текущая фаза сигнала является интегралом от частоты, то отклонения частоты сигнала в данный момент времени оказывают влияние на все последующие значения фазы. Такие ошибки будем называть накапливающимися фазовыми ошибками[1].

Функция неопределенности линейно-частотно модулированного (ЛЧМ) сигнала длительностью τ_u при прямоугольной огибающей в отсутствие ошибок имеет вид [3].

$$\chi(\tau, \Omega) = \frac{1}{\tau_u^2}\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{0}^{\tau_u|-1|} \exp[-j(t-t_1)(2b\tau+\Omega)]\,dt\,dt_1 & \text{при } \tau<0, \\ \displaystyle\iint\limits_{\tau}^{\tau_u} \exp[-j(t-t_1)(2b\tau+\Omega)]\,dt\,dt_1 & \text{при } \tau>0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $b = \frac{\pi\Delta f}{\tau_u}$ — параметр частотной модуляции;

Δf — девиация частоты;

Ω — сдвиг по оси частот;

τ — сдвиг по оси времени.

Предположим теперь, что имеют место случайные отклонения частоты, т. е. мгновенная частота

$$\omega(t) = \omega'(t) + \Delta\omega(t).$$

Здесь $\omega'(t)$ — закон частотной модуляции сигнала;

$\Delta\omega(t)$ — случайные отклонения частоты от заданного закона.

---

[1] Накапливающиеся ошибки полностью аналогичны нелокальным ошибкам в статистической теории антенн, в то время как ошибки, имеющие стационарный характер, можно уподобить локальным [2].

При этом соотношение (1) запишем так:

$$\chi(\tau, \Omega) = \frac{1}{\tau_u^2}\begin{cases} \int\limits_0^{\tau_u-|\tau|}\int \exp\left[-j(t-t_1)(2b\tau+\Omega)+j\int\limits_{t_1}^{t}\Delta\omega(t')\,dt'\right]dt\,dt_1 & \text{при } \tau<0, \\ \int\limits_{\tau}^{\tau_u}\int \exp\left[-j(t-t_1)(2b\tau+\Omega)+j\int\limits_{t_1}^{t}\Delta\omega(t')\,dt'\right]dt\,dt_1 & \text{при } \tau>0. \end{cases} \tag{2}$$

Заменим переменные по формулам

$$x=\left(t-\frac{\tau_u-|\tau|}{2}\right)\frac{2}{\tau_u-|\tau|} \quad \text{при } \tau<0,$$

$$x=\left(t-\frac{\tau_u+|\tau|}{2}\right)\frac{2}{\tau_u-|\tau|} \quad \text{при } \tau>0.$$

Выражение (2) приводим к виду

$$\chi(\tau, \Omega)=\left(\frac{\tau_u-|\tau|}{\tau_u}\right)^2 Y(\psi), \tag{3}$$

где

$$Y(\psi)=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int \exp\left[-j\psi(x-x_1)+j\int\limits_{\frac{\tau_u-|\tau|}{2}x_1+a}^{\frac{\tau_u-|\tau|}{2}x_1+a}\Delta\omega(t')\,dt'\right]dx\,dx_1; \tag{4}$$

$\psi=(\tau_u-|\tau|)\left(\frac{\Omega}{2}+b\tau\right)$ — обобщенный параметр $a=\frac{\tau_u-|\tau|}{2}$ при $\tau<0$ и $a=\frac{\tau_u-\tau}{2}$ при $\tau>0$.

Первый множитель в соотношении (3) является детерминированным, поэтому при изучении статистических параметров функции неопределенности его можно опустить. Задача, следовательно, сводится к изучению статистики функции $Y(\psi)$.

Статистические параметры флуктуаций частоты будем считать известными. Примем, что $\Delta\omega(t)$ представляет собой нормальный случайный процесс с нулевым средним, дисперсией $\overline{[\Delta\omega(t)]^2}=\sigma^2$ и функцией корреляции

$$R(t, t_1)=\sigma^2\exp\left(\frac{|t-t_1|}{\tau_0}\right),$$

где τ_0 — интервал корреляции[1].

При таких предположениях задача изучения статистики функции неопределенности формально аналогична задаче исследования диаграммы направленности антенны бегущей волны при наличии флуктуаций постоянной распространения [2]. В дальнейшем воспользуемся методикой и некоторыми результатами этой работы.

---

[1] В этом случае дисперсия и корреляционная функция фазы соответственно равны

$$\sigma_\varphi^2=2\tau_0\sigma^2\left[t-\tau_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)\right];$$

$$R_\varphi(t, t_1)=\tau_0\sigma^2\left[t+t_1-|t-t_1|-\tau_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}-e^{-\frac{t_1}{\tau_0}}+e^{-\frac{|t-t_1|}{\tau_0}}\right)\right],$$

т. е. накапливающиеся фазовые ошибки не стационарны.

Усредненная функция неопределенности. Среднее значение $Y(\psi)$ имеет вид

$$\overline{Y(\psi)} = \frac{1}{4}\iint\limits_{-1}^{1} \exp\left[-j\psi(x-x_1)\right] \overline{\exp\left[j \int\limits_{\frac{\tau_u-|\tau|}{2}x_1+a}^{\frac{\tau_u-|\tau|}{2}x+a} \Delta\omega(t')\,dt' \right]}\, dx dx_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{-1}^{1} \exp\left\{-j\psi(x-x_1) - \frac{\tau_u-|\tau|}{2\tau_0}\tau_0^2\sigma^2|x-x_1| - \sigma^2\tau_0^2\exp\left[-\frac{x-x_1}{2\tau_0}(\tau_u - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\tau|)\right] + \sigma^2\tau_0^2\right\} = \frac{1}{4}e^{\tau_0^2\sigma^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\sigma^{2m}\tau_0^{2m}}{m!}(I_э W_m,\ \psi), \tag{5}$$

где

$$I_э(W_m,\ \psi) = \iint\limits_{-1}^{1}\exp\left[-\frac{|x-x_1|}{W_m} - j\psi(x-x_1)\right]dx dx_1 -$$

интеграл, вычисленный и протабулированный в работе [2];

$$W_m = \frac{2\tau_0}{(\tau_u-|\tau|)(\tau_0^2\sigma^2+m)} = \frac{c}{\tau_0^2\sigma^2+m};$$

$c = \dfrac{2\tau_0}{\tau_u-|\tau|}$ — относительный интервал корреляции.

Соотношение (5) позволяет вычислить среднюю функцию неопределенности при любых τ_0 и σ.

Если обозначить $\sigma\dfrac{\tau_u-|\tau|}{2}=\beta$, то (5) можно записать в виде, аналогичном (с точностью до постоянного множителя) выражению (7) работы [2] для средней диаграммы направленности

$$\overline{Y(\psi)} = \exp(\beta^2c^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\beta^{2m}c^{2m}}{m!}I_э(W_m,\ \psi). \tag{6}$$

Следовательно, для функции $\overline{Y(\psi)}$ полностью справедливы приведенные там асимптотические выражения, соответствующие кривые и выводы о характере зависимости средней диаграммы направленности от c и β.

Следует отметить, что приведенные в [2] кривые (рис. 1,*а*; 1,*б*)[1] дают непосредственно сечения средней функции неопределенности по оси частот, так как ψ и Ω связаны линейной зависимостью. Иначе обстоит дело для оси времени. Здесь ψ и τ связаны квадратичной зависимостью. Поэтому для нахождения сечения функции неопределенности по оси τ необходимо кривые рис. 1 *а*; 1 *б* работы [2] деформировать в соответствии с приведенной выше зависимостью между ψ и τ.

Однако для наиболее важного случая — больших коэффициентов сжатия ($n=\Delta f\tau_u \gg 1$) в интервале изменения ψ, где функция $Y(\psi)$ представляет практический интерес, между ψ, τ и Ω справедливы приближенные зависимости

$$\theta = \frac{\tau}{\tau_u} \approx \frac{\psi}{\pi n} - \frac{\Omega}{\Delta\omega} = \frac{\psi}{\pi n} - F;$$

$$c = \frac{2\tau_0}{\tau_u-|\tau|} \approx \frac{2\tau_0}{\tau_u},$$

где θ — безразмерная координата времени.

[1] См. ст. Я. С. Шифрина, Л. Г. Корниенко «Некоторые вопросы статистической теории антенн бегущей волны» в настоящем сборнике.

В этом приближении приведенные в [2] кривые рис. 1, *а*; 1*б* дают непосредственно также сечения функции неопределенности по оси θ.

Расширение средней функции неопределенности. Используя полученные в [2] формулы для средней ширины диаграммы направленности и не останавливаясь на элементарных вычислениях, приведем основные выражения для расширения или средней ширины основного пика функции неопределенности для двух частных случаев.

а) Когда флуктуации частоты малы, а интервал корреляции ограничен $(\tau_0^2\sigma^2 << 1)$

$$\Delta F = \Delta\theta = \frac{\sigma^2\tau_0^2\left[\frac{1}{4} I_э(c, \psi_0) - \frac{L}{4} I_э(c, 0) + \frac{4L}{3c} - \frac{2}{c\psi_0^2} + \frac{2L}{c\psi_0}\operatorname{ctg}\psi_0\right]}{\pi n\left[\frac{\sin^2\psi}{\psi^2}\right]'_{\psi=\psi_0}}, \qquad (7)$$

где L — уровень отсчета;

$2\psi_0$ — ширина основного пика функции неопределенности на уровне L в отсутствие ошибок.

б) «Медленные» флуктуации частоты $(\tau_0 >> \tau_u)$

$$\frac{2F_{ср}}{2F_0} = \frac{2\theta_{ср}}{2\theta_0} \approx 0{,}4\sigma\tau_u \text{ — при больших ошибках;}$$

$$2\Delta F = 2\Delta\theta \approx \frac{0{,}18}{\pi n}\sigma^2\tau_u^2 \text{ — при малых ошибках.}$$

В этом случае для определения ширины средней функции неопределенности может быть использована и кривая рис. 4[1]. Из приведенных соотношений видно, что при больших коэффициентах сжатия относительное расширение основного пика функции неопределенности по обеим осям одинаково и увеличивается с ростом произведения $\sigma\tau_u$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору технических наук Я. С. Шифрину за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браун, Палермо. Влияние фазовых ошибок на функцию неопределенности. «Зарубежная радиоэлектроника», 1964, № 3.
2. Я. С. Шифрин, Л. Г. Корниенко. Некоторые вопросы статистической теории антенн бегущей волны. См. статью настоящего сборника.
3. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков. Статистическая теория обнаружения сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963.

[1] См. ст. Я. С. Шифрина, Л. Г. Корниенко «Некоторые вопросы статистической теории антенн бегущей волны» в настоящем сборнике.