

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНТЕНН БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Я. С. Шифрин, Л. Г. Корниенко

Х а р ь к о в

1. Как известно, сущность статистической теории антенн сводится к исследованию параметров антенн при условии, что амплитудно-фазовое распределение тока (или поля) в антенне является случайным. Основы такой теории были развиты в работе [1] на примере линейной синфазной антенны.

Целью настоящей статьи является распространение некоторых результатов названной работы на антенны бегущей волны (АБВ).

В принципе методика исследования статистики поля АБВ остается такой же, как и для синфазных антенн. Однако в расчетном отношении задачи существенно различаются, так как характер ошибок в этих двух системах различный. В синфазных антеннах ошибки в амплитудно-фазовом распределении источников имеют локальный характер. В антеннах бегущей волны наряду с локальными ошибками имеются и нелокальные — возникшие в каком-то месте случайные возмущения передаются бегущей волной во все последующие излучающие элементы.

Как было показано в работе [2], локальные ошибки в АБВ приводят к тем же эффектам, что и в синфазных системах. Поэтому представляет интерес исследование влияния нелокальных ошибок. Ограничимся рассмотрением влияния нелокальных фазовых ошибок, играющих обычно значительно большую роль, чем ошибки амплитудные.

2. Рассмотрим линейную систему непрерывно распределенных однотипных и одинаково ориентированных источников, возбуждаемых бегущей волной. Пусть длина ее L . При отсутствии затухания в системе комплексный множитель системы

$$f(\theta) = \int_0^L e^{-jk_1 z + jkz \cos \theta} dz, \quad (1)$$

где k_1 — волновое число, характеризующее распределение фаз вдоль системы;

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

θ — угол, отсчитываемый от оси системы.

При написании (1) амплитуда источников принята равной единице.

Допустим, что в силу тех или иных причин параметры линии меняются случайным образом. Будем считать эти изменения достаточно плавными, так что в каждом сечении волновое число k_1 определяется параметрами линии в этом же сечении.

Тогда вместо выражения (1) для комплексного множителя системы имеем следующее выражение:

$$f(\theta) = \int_0^L e^{-j \int_0^z k_1(z') dz' + jkz \cos \theta} dz. \quad (2)$$

Диаграмма направленности по мощности

$$|f(\theta)|^2 = \int_0^L \int_0^z e^{j \int_z^{z'} k_1(z'') dz'' + jk(z-z_1) \cos \theta} dz dz_1. \quad (3)$$

Будем далее считать $k_1(z)$ нормальной случайной функцией со средним значением $\overline{k_1(z)} = k_0$, дисперсией σ^2 и нормированной корреляционной функцией в экспоненциальной форме $r = e^{-\frac{|z-z_1|}{\rho}}$, где ρ — радиус корреляции волнового числа. Для простоты примем, что значение k_0 равно теоретическому (невозмущенному) значению волнового числа.

Усредняя соотношение (3) и учитывая, что [2]

$$\begin{aligned} \overline{\exp j \int_z^{z'} \Delta k_1(z') dz'} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \overline{\left[\int_z^{z'} \Delta k_1(z') dz' \right]^2} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\rho^2 \sigma^2 \left[\frac{|z-z_1|}{\rho} + e^{-\frac{|z-z_1|}{\rho}} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

находим следующее выражение для средней диаграммы направленности по мощности:

$$\begin{aligned} \overline{|f(\theta)|^2} &= \int_0^L \int_0^z e^{\rho^2 \sigma^2 \left[1 - \frac{|z-z_1|}{\rho} \right]} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\rho \sigma)^{2m}}{m!} (-1)^m e^{-m \frac{|z-z_1|}{\rho}} \right\} \times \\ &\times e^{-j(z-z_1)(k_0 - k \cos \theta)} dz dz_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{2}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right); \quad c = \frac{2\rho}{L}; \quad \beta = \frac{L\sigma}{2}; \quad \psi = \frac{L}{2} (k_0 - k \cos \theta); \quad w_m = \frac{c}{m + c^2 \beta^2}. \quad (6)$$

С учетом (6) выражение (5) примет вид

$$\overline{|f(\psi)|^2} = \frac{L^2}{4} e^{\beta^2 c^2} \left[I_0(w_0, \psi, \psi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta c)^{2m}}{m!} (-1)^m I_m(w_m, \psi, \psi) \right]. \quad (7)$$

Здесь интеграл

$$\begin{aligned} I_m(w, \psi, \psi) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-\frac{|x-x_1|}{w} - j\psi(x-x_1)} dx dx_1 = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{w^2} + \psi^2 \right)^2} \left\{ \frac{4}{w} \left(\frac{1}{w^2} + \psi^2 \right) - 2 \left(\frac{1}{w^2} - \psi^2 \right) + 2e^{-\frac{2}{w}} \times \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{1}{w^2} - \psi^2 \right) \cos 2\psi - \frac{2\psi}{w} \sin 2\psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таблица значений этого интеграла приведена в приложении.

Выражение (7) справедливо для произвольных значений дисперсии и радиуса корреляции флуктуаций (ошибок) волнового числа. На рис. 1а, б, представлены результаты расчета на ЭВМ М-20 средних диаграмм направленности, определяемых выражением (7), для ряда значений величин c и β . Для сравнения на каждом из рисунков нанесена диаграмма направленности при отсутствии ошибок ($\beta = 0$), равная

$$f_0^2(\psi) = L^2 \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2}. \quad (9)$$

Все диаграммы выражены в децибеллах. На рис. 1, в показана величина средней мощности, изучаемой в направлении $\psi = 0$. Из рис. 1 видно, что нелокальные фазовые ошибки приводят к тем же искажениям диаграммы направленности, что и локальные [1]. Однако зависимость этих искажений от радиуса корреляции качественно иная. Увеличение ρ приводит к увеличению искажений диаграммы, в то время как при локальных ошибках — к уменьшению искажений. Это объясняется тем, что увеличение ρ приводит в АБВ к увеличению дисперсии нелокальных фазовых ошибок (см. соотношение (4)), синфазные же системы приближаются в этом случае к системам в отсутствие ошибок.

Рассмотрим теперь два частных случая, для которых выражение (7) существенно упрощается.

а) Величина $\beta^2 c^2 = \rho^2 \sigma^2 \ll 1$. В этом случае, ограничиваясь в (7) лишь первым членом суммы, получим

$$\overline{|f(\psi)|^2} = \frac{L^2}{4} [(1 + \beta^2 c^2) I_3(\omega_0, \psi, \psi) - \beta^2 c^2 I_3(c, \psi, \psi)]. \quad (10)$$

При $\omega_0 = \frac{1}{c\beta^2} \gg 1$

$$\begin{aligned} I_3(\omega_0, \psi, \psi) &\simeq \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[1 - \frac{|x - x_1|}{\omega_0} \right] e^{-j\psi(x - x_1)} dx dx_1 = \\ &= 4 \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} + \frac{4}{\psi^2 \omega_0} \left(1 + \cos 2\psi - \frac{\sin 2\psi}{\psi} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

и выражение (10) можно привести к виду

$$\overline{|f(\psi)|^2} = f_0^2(\psi) + c^2 \beta^2 L^2 \left[\frac{2\psi \cos^2 \psi - \sin 2\psi}{c\psi^3} + \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} - \frac{1}{4} I_3(c, \psi, \psi) \right]. \quad (12)$$

Если $c \ll 1$, то $I_3(c, \psi, \psi) \simeq 4c$ и, с точностью до членов порядка c ,

$$\overline{|f(\psi)|^2} = f_0^2(\psi) + c\beta^2 L^2 \frac{2\psi \cos^2 \psi - \sin 2\psi}{\psi^3}. \quad (13)$$

Выражение (13) было получено ранее в [2], где отмечено также, что второе слагаемое, характеризующее рассеянную мощность $f_p^2(\psi)$, пропорционально L^3 , в то время как первое слагаемое, представляющее собой «невозмущенную» диаграмму направленности, пропорционально L^2 .

Весьма часто системы бегущей волны конструируются так, чтобы при $\psi = 0$ $\psi = \frac{\pi}{2}$. Это условие соответствует максимуму к. н. д. системы.

Так как $f_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то для оптимально сконструированной антенны наличие ошибок волнового числа в первом приближении не сказывается на величине мощности, излучаемой в главном направлении.

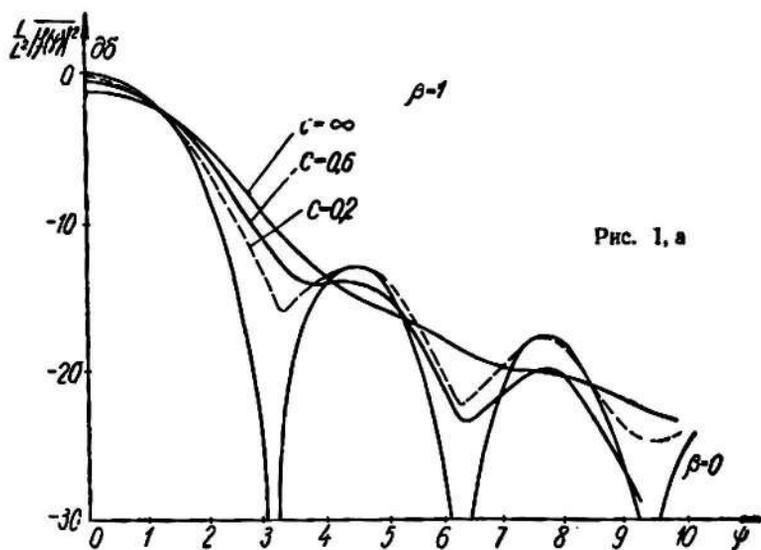


Рис. 1, а

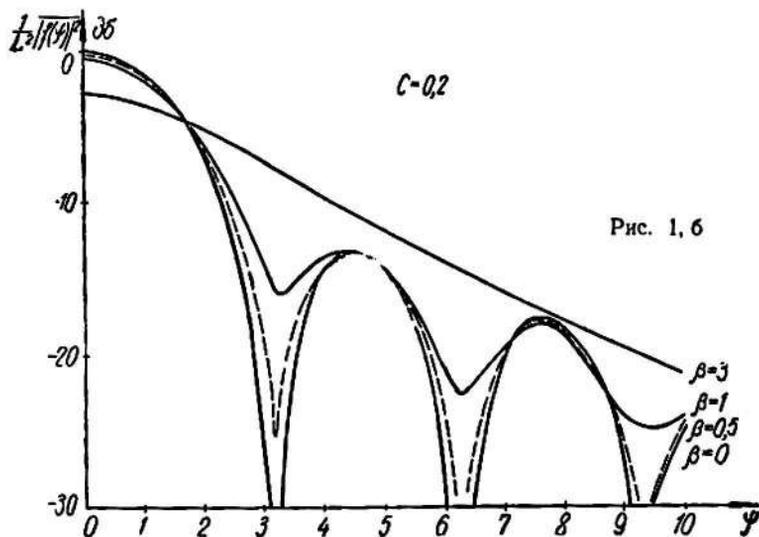


Рис. 1, б

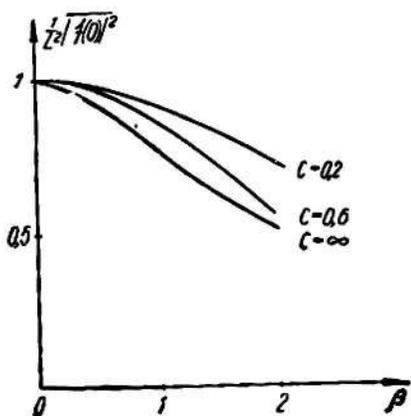


Рис. 1, в

б). Радиус корреляции волнового числа $\rho \rightarrow \infty$. Случай $\rho \rightarrow \infty$ соответствует такой ситуации, когда можно считать k_1 не зависимым от координаты z . Волновое число k_1 постоянно для данной антенны (данной реализации) и при переходе от одной реализации к другой меняется случайным образом.

Асимптотическое выражение для средней диаграммы направленности в этом случае можно получить, если в соотношении (4) использовать разложение $e^{-\frac{|z-z_1|}{\rho}}$ в ряд. Можно получить искомое выражение еще проще. Полагая $k_1 = k_0 + \Delta$, из (2) находим

$$|\overline{f(\theta)}|^2 = \iint_0^L e^{-j(z-z_1)(k_0 - k \cos \theta)} e^{-j\Delta(z-z_1)} dz dz_1. \quad (14)$$

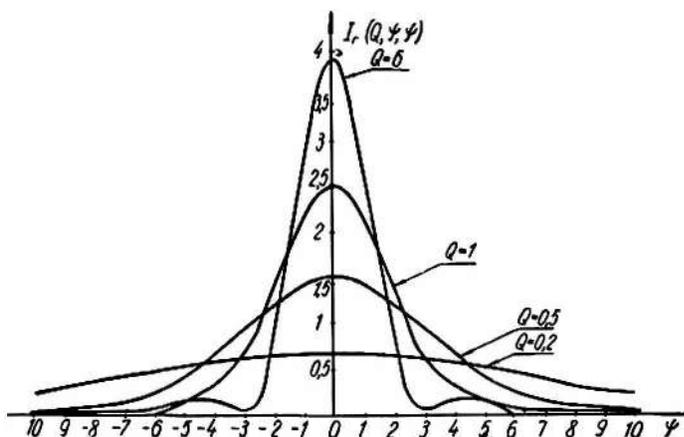


Рис. 2

Переходя к безразмерным координатам и считая величину Δ распределенной нормально с нулевым средним, получим

$$|\overline{f(\psi)}|^2 = \frac{L^2}{4} I_r(Q, \psi, \psi). \quad (15)$$

В выражении (15) $Q = \frac{V\sqrt{2}}{\beta}$, функция $I_r(Q, \psi, \psi) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{Q^2} - j\psi(x-x_1)} dx dx_1$

вычислена и протабулирована в [1]. Там же приведены асимптотические выражения этой функции, позволяющие определить значение $|\overline{f(\psi)}|^2$ при $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$.

График $I_r(Q, \psi, \psi)$ для различных значений величины Q приведен на рис. 2. При немалых ошибках величина Q мала, и средняя диаграмма направленности почти полностью «размазывается».

3. Рассмотрим ширину средней диаграммы направленности для двух частных случаев. Методика исследования аналогична использованной в [1].

а) $\beta^2 \ll 1$, $\omega_0 \gg 1$. Используя соотношение (12), имеем при $\beta^2 \ll 1$ следующее выражение для нормированной средней диаграммы направленности:

$$|\overline{F(\psi)}|^2 = \frac{|\overline{f(\psi)}|^2}{|\overline{f(0)}|^2} = F_0^2(\psi) [1 - \beta^2 c^2 v(c, 0)] + \beta^2 c^2 v(c, \psi). \quad (16)$$

Здесь

$$F_0^2(\psi) = \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2};$$

$$v(c, \psi) = \frac{2\psi \cos^2 \psi - \sin 2\psi}{c\psi^3} + F_0^2(\psi) - \frac{1}{4} I_3(c, \psi, \psi);$$

$$v(c, 0) = -\frac{2}{3c} + 1 - \frac{1}{4} I_3(c, 0, 0).$$

При написании (16) предполагалось, что условие $\psi = 0$ в системе реализуется. Считая далее $|F(\psi)|^2 = 0,5$ и используя разложение функции $|F(\psi)|^2$ в ряд Тейлора около точки $\psi_0 = 1,39$ (направление излучения половинной мощности в отсутствие ошибок), находим из (16)

$$[F_0^2(\psi_0) + [F_0^2(\psi_0)]' \Delta\psi] [1 - \beta^2 c^2 v(c, 0)] + \beta^2 c^2 v(c, \psi_0) = 0,5.$$

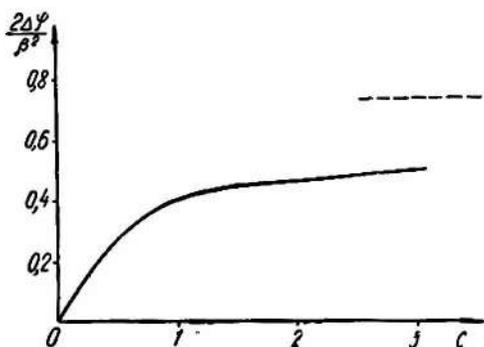


Рис. 3

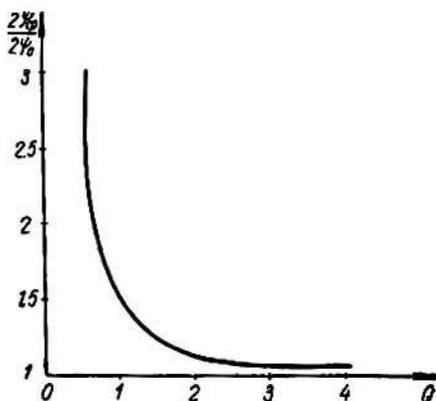


Рис. 4

Отсюда

$$\Delta\psi = 1,8 [v(c, \psi_0) - 0,5v(c, 0)] \beta^2 c^2. \quad (17)$$

Входящая в соотношение (17) величина $v(c, \psi_0)$

$$v(c, \psi_0) = -\frac{0,1}{c} + 0,5 - \frac{1}{4} I_3(c, \psi_0, \psi_0),$$

поэтому выражение (17) можно переписать следующим образом:

$$\Delta\psi = 0,45 \left[\frac{0,9}{c} + \frac{1}{2} I_3(c, 0, 0) - I_3(c, \psi_0, \psi_0) \right] \beta^2 c^2. \quad (18)$$

Если $k_0 = k$ или $\left| \frac{L}{2} (k_0 - k) \right| \geq 1,39$, то полное расширение диаграммы направленности определяется величиной $2\Delta\psi$.

На рис. 3 представлена рассчитанная по формуле (18) зависимость расширения диаграммы направленности от радиуса корреляции.

При $c \ll 1$ первые члены в асимптотических разложениях величин $I_3(c, 0, 0)$ и $I_3(c, \psi_0, \psi_0)$ имеют порядок c :

$$2\Delta\psi \simeq 0,8\beta^2 c = 0,4rLc^2.$$

Таким образом, при уменьшении радиуса корреляции волнового числа величина $2\Delta\psi \rightarrow 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции $I_9(c; \psi; \phi)$

$c \backslash \psi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,195	0,195	0,193	0,191	0,188	0,184	0,180	0,175	0,169	0,164	0,158
0,1	0,380	0,377	0,367	0,352	0,332	0,310	0,287	0,264	0,241	0,220	0,200
0,2	0,720	0,698	0,640	0,561	0,477	0,400	0,334	0,279	0,235	0,199	0,170
0,3	1,020	0,963	0,820	0,653	0,505	0,391	0,305	0,243	0,196	0,161	0,134
0,4	1,282	1,178	0,934	0,679	0,488	0,359	0,270	0,209	0,166	0,134	0,111
0,5	1,509	1,353	1,003	0,674	0,459	0,327	0,240	0,183	0,144	0,115	0,094
0,7	1,876	1,616	1,071	0,628	0,399	0,278	0,196	0,147	0,117	0,091	0,074
1	2,271	1,877	1,094	0,544	0,334	0,235	0,155	0,116	0,095	0,071	0,057
1,6	2,747	2,166	1,070	0,415	0,263	0,196	0,111	0,087	0,078	0,051	0,042
2	2,943	2,279	1,047	0,356	0,238	0,184	0,094	0,077	0,073	0,044	0,036
3	3,242	2,443	1,000	0,262	0,204	0,169	0,070	0,063	0,068	0,033	0,028
4	3,409	2,533	0,968	0,207	0,184	0,162	0,056	0,056	0,065	0,028	0,024
5	3,516	2,589	0,946	0,172	0,170	0,159	0,048	0,052	0,064	0,024	0,022
6	3,591	2,627	0,929	0,147	0,160	0,156	0,042	0,049	0,063	0,022	0,020

б) $\rho \rightarrow \infty$. Средняя диаграмма направленности в этом случае определяется выражением (15). Если в системе условие $\psi = 0$ реализуется, то нормированная диаграмма

$$|\overline{F(\psi)}|^2 = \frac{I_r(Q, \psi, \psi)}{I_r(Q, 0, 0)}. \quad (19)$$

Полагая $|\overline{F(\psi)}|^2 = 0,5$, получим уравнение для ширины средней диаграммы направленности $2\psi_{\text{ср}}$. Результаты графического решения этого уравнения представлены на рис. 4. Величина $2\psi_0 = 2,78$ дает ширину диаграммы направленности в отсутствие ошибок. Если ошибки малы ($\beta \ll 1$), то $Q = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \gg 1$. Используя асимптотические выражения для $I_r(Q, \psi, \psi)$ и $I_r(Q, 0, 0)$ в случае $Q \gg 1$ [1], находим

$$|\overline{F(\psi)}|^2 = F_0^2(\psi) \left[1 + \frac{2}{3Q^2} \right] - \frac{1}{Q^{2,4}} [(3 - 2\psi^2) \cos 2\psi + 4\psi \sin 2\psi - 3]. \quad (20)$$

Дальнейший анализ аналогичен приведенному выше для соотношения (16). Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательное выражение для величины расширения средней диаграммы направленности

$$2\Delta\psi \simeq 0,72\beta^2. \quad (21)$$

Соотношение (21) определяет предельное значение величины $2\Delta\psi$ в случае малых ошибок при $\rho \rightarrow \infty$.

Как отмечено в работе [1], в случае локальных фазовых ошибок зависимость расширения средней диаграммы направленности от радиуса корреляции носит резонансный характер. Так как с увеличением ρ система приближается к синфазной, то при $\rho \rightarrow \infty$ $2\Delta\psi \rightarrow 0$.

Иное положение мы наблюдаем в случае нелокальных ошибок. С увеличением ρ фазовые ошибки увеличиваются. При этом растет и величина $2\Delta\psi$ (рис. 4). При $\rho \rightarrow \infty$ $2\Delta\psi \rightarrow 0,72\beta^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Шифрин. Статистика поля линейной антенны. АРТА, 1962.
2. В. И. Галахов, Н. М. Шеронова. О влиянии случайных ошибок в распределении источников на диаграммы направленности антенн бегущей волны. «Изв. вузов, Радиофизика», 1959, т. II, № 3.