УДК 621.317.08 : 621.391.144

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, канд. техн. наук

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ. IX. СИНТЕЗ СПЕКТРА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В работах [1—4] рассматриваются методы спектрального анализа в реальном масштабе времени. Излагаются две группы задач — синтез и анализ. Синтез состоит в построении функциональных схем анализаторов спектра. Анализ сводится к оценке показателей схем при условии, что в них заданы алгоритмы преобразования сигнала.

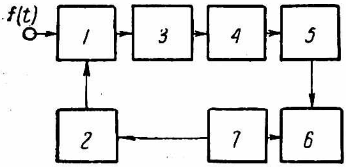
При решении первой группы задач приняты достаточно широкие классы сигналов и функциональные схемы синтезированы в соответствии с алгоритмами выполнения преобразования Фурье, характерными для этих классов. Полученные схемы позволяют формировать мгновенный спектр в интегральной форме, а также в виде рядов Фурье и Котельникова.

Заданные классы сигналов нуждаются в уточнении. Кроме того, не рассматривался вопрос о погрешностях измерения спектра.

В настоящей статье определяются классы сигналов, спектр которых представим в интегральной форме, и оценивается погрешность формирования спектра.

Дисперсионный метод спектрального анализа. Для получения спектра в интегральной форме используется явление дисперсии. Поэтому соответствующий метод анализа получил название дисперсионного.

Типичная функциональная схема дисперсионного анализатора спектра приведена на рисунке [1]. Здесь входной сигнал предварительно подвергается линейной частотной модуляции и поступает на вход устройства с дисперсией. При условии согласования параметров преобразованного сигнала с параметрами устройства с дисперсией на выходе последнего формируется отклик, огибающая которого является спектром входного сигнала. Отклик формируется в ограниченной полосе частот из отрезка сигнала конечной длительности.



Функциональная схема дисперсионного анализатора спектра:
$f(t)$ — входной сигнал; *1* — смеситель; *2* — генератор линейно изменяющейся частоты; *3* — фильтр; *4* — устройство с дисперсией; *5* — детектор; *6* — индикатор; *7* — синхронизатор.

Рассмотрим класс сигналов, спектр которых можно представить в интегральной форме.

Класс анализируемых сигналов. Для характеристики точности измерения спектра будем пользоваться среднеквадратичным критерием. Поэтому введем пространство $L_2(-\infty, \infty)$ функций $f(t)$ и обсудим условия, при которых в этом случае справедливо преобразование Фурье в обычном смысле.

Для функций пространства $L_2(-\infty, \infty)$ имеет место преобразование Фурье-Планшереля [5], представимое формулами обращения:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt} dt, \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{j\omega t} - 1}{j\omega} d\omega. \tag{1a}$$

Функция $F(\omega)$ в формуле (1) снова принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Если потребовать, чтобы (1а) совпадало с преобразованием Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{2}$$

то функция $F(\omega)$ должна, кроме того, принадлежать пространству $L_1(-\infty, \infty)$ абсолютно интегрируемых функций, т. е. быть из $L_{1,2}(-\infty, \infty)$. Получаемая при этом функция $f(t)$, согласно теореме Римана-Лебега, ограничена, непрерывна при всех значениях t $(-\infty < t < \infty)$ и стремится к нулю, когда $|t| \to \infty$ [6]. Однако не для всех функций $F(\omega)$ из $L_{1,2}(-\infty,\infty)$ справедлива формула

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \tag{3}$$

позволяющая по $f(t)$ восстановить $F(\omega)$. Поэтому $F(\omega)$ из $L_{1,2}(-\infty,\infty)$ в общем случае нельзя рассматривать как спектр некоторого сигнала $f(t)$. Для справедливости формулы (3) на функции $F(\omega)$ следует наложить некоторые дополнительные ограничения. Одним из таких ограничений является достаточное условие [5]

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{F_z(\omega)}{\omega}\, d\omega = 0(1),\ \ \delta\to 0, \tag{4}$$

где

$$F_z(\omega)=\frac{F(z+\omega)+F(z-\omega)}{2}-F(z).$$

Покажем, что (4) выполняется, если $F(\omega)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Представим левую часть равенства (4) в виде

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{[F(z+\omega)-F(z)]+[F(z-\omega)-F(z)]}{2\omega}\, d\omega \tag{5}$$

и применим к подынтегральному выражению формулу Лагранжа о конечных приращениях. Получим

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{[F'(\xi)-F'(\zeta)]\omega}{2\omega}\, d\omega, \tag{5a}$$

где

$$\zeta\in[-\omega,\ z];$$

$$\xi\in[z,\omega].$$

Оценивая (5a) по модулю, имеем

$$\left|\frac{1}{\delta}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{[F'(\xi)-F'(\zeta)]\omega}{2\omega}\, d\omega\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\max|F'(\xi)-F'(\zeta)|. \tag{5б}$$

Учитывая, что $F'(\omega)$ непрерывная функция, получаем

$$\frac{1}{2}\max|F'(\xi)-F'(\zeta)|\to 0,$$

если $\delta \to 0$, т. е. выражение (5) при $\delta \to 0$, действительно, является бесконечно малой величиной высшего порядка малости по сравнению с единицей. Поэтому класс непрерывно дифференцируемых функций из пространства $L_{1,2}(-\infty, \infty)$ можно рассматривать как класс спектров, соответствующий некоторому классу сигналов.

Определим свойства сигналов такого класса. Для этого дополнительно предположим, что функция $F'(\omega)$ интегрируема на всей оси $-\infty < \omega < \infty$ и стремится к нулю при $|\omega| \to \infty$. Проинтегрируем по частям выражение (2) [6]. Тогда с учетом сделанных допущений получим

$$f(t) = \frac{j}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{2а}$$

Умножая обе части равенства на t и используя теорему Римана—Лебега для функции $F'(\omega)$, получаем, что функция $tf(t)$ ограничена, непрерывна при всех значениях $t(-\infty < t < \infty)$ и стремится к нулю при $|t| \to \infty$.

Таким образом, класс сигналов, спектр которых можно представить в интегральной форме, обладает следующими свойствами. Каждая функция $f(t)$ этого класса принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$-функций с конечной энергией. Кроме того, функция $tf(t)$ ограничена, непрерывна при всех t и стремится к нулю, когда $|t| \to \infty$. Этому классу сигналов отвечает класс спектров, каждый элемент которого представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию $F(\omega)$ из пространства $L_{1,2}(-\infty, \infty)$, причем производная $F'(\omega)$ интегрируема на всей оси и стремится к нулю при $|\omega| \to \infty$.

Задача оценки погрешности формирования спектра в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ потребовала некоторых ограничивающих предположений о классе анализируемых сигналов. Без них в качестве этого класса можно выбрать такой класс сигналов $f(t)$, что каждая функция $tf(t)$ ограничена, непрерывна при всех t и стремится к нулю, когда $|t| \to \infty$. Ему соответствует класс спектров из $L_1(-\infty, \infty)$, каждая функция $F(\omega)$ которого непрерывно дифференцируема, а производная $F'(\omega)$ интегрируема и стремится к нулю при $|\omega| \to \infty$.

Методическая погрешность синтеза спектра. Введем в построенном классе сигналов скалярное произведение $f(t)$ и $g(t)$ в виде

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt, \tag{6}$$

норму элемента $\varphi(t)$ как

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}, \tag{7}$$

а расстояние между сигналами $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определим соотношением

$$\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|. \tag{8}$$

В классе спектров скалярное произведение, норму и расстояние можно представить в виде

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\, d\omega;$$

$$\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)};$$

$$\rho(F_1, F_2) = \|F_1 - F_2\|.$$

Здесь $F(\omega)$, $G(\omega)$, $\Phi(\omega)$, $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ соответственно спектры сигналов $f(t)$, $g(t)$, $\varphi(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$.

Функция $f(t)$, принадлежащая классу сигналов, в общем случае существует при $-\infty < t < \infty$, а ее преобразование Фурье $F(\omega)$ — при $-\infty < \omega < \infty$. В результате синтеза спектра по отрезку сигнала конечной длительности в ограниченной полосе частот получается некоторая функция $F_{TF}(\omega)$, которая отличается от $F(\omega)$. Это различие определяет методическую погрешность. Определяя ее как расстояние между $F(\omega)$ и $F_{TF}(\omega)$, вычисленное в метрике класса спектров, получаем выражение

$$\Delta = \|F - F_{TF}\|. \tag{9}$$

Оценим погрешность для случая синтеза спектра низкочастотного сигнала. Введем сигнал $f_T(t)$, который представляет собой отрезок исследуемого сигнала длительностью T:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leqslant \dfrac{T}{2}; \\ 0, & |t| > \dfrac{T}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда синтезируемый спектр $F_{TF}(\omega)$ можно представить через спектр $F_T(\omega)$ сигнала $f_T(t)$ соотношением

$$F_{TF}(\omega) = \begin{cases} F_T(\omega), & |\omega| \leqslant \Omega; \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Представляя выражение (9) в виде

$$\Delta = \|(F - F_T) + (F_T - F_{TF})\| \tag{9a}$$

и применяя неравенство треугольника, получаем

$$\Delta \leqslant \|F - F_T\| + \|F_T - F_{TF}\|. \tag{12}$$

Учитывая, что, согласно равенству Парсеваля,

$$\|F - F_T\| = \|f - f_T\|,$$

а также учитывая соотношения (10) и (11), окончательно приходим к выражению

$$\Delta \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{T/2} f^2(t)\,dt + \int_{T/2}^{\infty} f^2(t)\,dt \right\}^{1/2} + \left\{ 2 \int_{\Omega}^{\infty} |F_T(\omega)|^2\,d\omega \right\}^{1/2}. \qquad (12а)$$

Полученное неравенство дает оценку методической погрешности синтеза спектра произвольного сигнала из выбранного класса сигналов. Отсюда видно, что погрешность определяется энергией сигнала вне интервала времени T и вне полосы частот F. Поэтому в общем случае, когда неизвестна концентрация энергии сигнала на шкале частоты и времени, задача синтеза спектра может потерять смысл из-за весьма большой погрешности. В этом случае следует ставить задачу синтеза мгновенного спектра, т. е. задачу формирования спектра отрезка сигнала конечной длительности. Здесь в качестве класса анализируемых сигналов можно рассматривать класс ограниченных, непрерывных сигналов из пространства $L_2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Методическая погрешность синтеза мгновенного спектра оценивается неравенством

$$\Delta \leqslant \left\{ 2 \int_{\Omega}^{\infty} |F_T(\omega)|^2\,d\omega \right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Если высказать некоторые предположения о скорости убывания спектра вне полосы частот $|\omega| \leqslant \Omega$, нетрудно определить взаимосвязь погрешности с полосой частот, в которой синтезируется спектр. Так, если

$$|F_T(\omega)| \leqslant \frac{c}{|\omega|^k}, \quad |\omega| > \Omega = 2\pi F,$$

то для погрешности справедлива оценка

$$\Delta \leqslant \sqrt{\frac{2}{2k-1}}\,\frac{c}{\Omega^{k-\frac{1}{2}}}. \qquad (13а)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Омельченко В. А. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени. I, II. — Сб. «Радиотехника». Вып. 16. Харьков, 1971, с. 80—94.
2. Омельченко В. А. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени. III, IV. — Сб. «Радиотехника». Вып. 19. Харьков, 1971, с. 9—21.
3. Омельченко В. А. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени. V, VI. — Сб. «Радиотехника». Вып. 3. Харьков, 1971, с. 34—49.
4. Омельченко В. А. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени. VII, VIII. — Сб. «Радиотехника». Вып. 21. Харьков, 1972, с. 3—15.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965. 407 с.
6. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962. 220 с.