УДК 623.4.021

В. К. МАРИГОДОВ

ОЦЕНКА КОМПЕНСАЦИИ МЕЖСИМВОЛЬНЫХ ПОМЕХ С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ ИГР

При передаче сигналов частотного телеграфирования (ЧТ) в каналах с аддитивной помехой, отличающейся от белого шума, в обеляющем фильтре происходит растягивание сигналов во времени, что приводит к межсимвольной интерференции. Для компенсации межсимвольных помех можно в передатчике применять предыскажающий фильтр, передаточная функция которого $\Phi_1(j\omega)$ удовлетворяет условию $|\Phi_1(j\omega)|^2=N(\omega)$, где $N(\omega)$ — энергетическая спектральная плотность аддивной помехи с неравномерным спектром. Корректирующий фильтр, расположенный перед решающей схемой приемника, является обеляющим и его передаточная функция $\Phi_2(j\omega)$ выбирается из соотношения $|\Phi_2(j\omega)|^2=1/N(\omega)$. Если передатчик формирует неперекрывающиеся сигналы длительностью T с энергетической спектральной плотностью $G(\omega)$, то при использовании для передачи идеального канала связи с постоянными параметрами последовательное включение предыскажающего и корректирующего (обеляющего) фильтров устраняет межсимвольную интерференцию.

Представляет интерес исследование эффективности такого метода компенсации межсимвольных помех с помощью теории игр. При этом будем рассматривать антагонистическую игру двух партнеров: игрока А — «связиста» и игрока Б — «источника помех». Стратегией игрока А является выбор всевозможных характеристик $\Phi_1(j\omega)$, а стратегией игрока Б — выбор различных классов и видов энергетических спектров $N(\omega)$. В качестве платежной функции можно принять величину средней вероятности ошибки, которая для ЧТ определяется формулой [1]:

$$p_{\text{ср}}=\frac{1}{8}\exp\left\{-\frac{h}{2}\,\frac{1-2\left[2B\left(\frac{T}{2}\right)-1\right]\left[1-\left(2B\left(\frac{T}{2}\right)-1\right]}{\Delta FT}\right\}\times$$

$$\times I_0\left\{\frac{h\left[2B\left(\frac{T}{2}\right)-1\right]}{2\Delta FT}\left[1-\left(2B\left(\frac{T}{2}\right)-1\right)\right]\right\}+\frac{1}{8}\exp\left(-\frac{h}{\Delta FT}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{h}{2}\,\frac{1-2\left[B\left(\frac{T}{2}\right)\left(1-B\left(\frac{T}{2}\right)\right]}{\Delta FT}\right\}I_0\left\{\frac{h\left[B\left(\frac{T}{2}\right)\right]}{2\Delta FT}\left[1-B\left(\frac{T}{2}\right)\right]\right\}, \tag{1}$$

где $h = \dfrac{E_0^2 T}{2(\delta_п^2/\Delta p)}$ — отношение энергии элементарного сигнала к спектральной плотности помехи; E_0 — стационарная амплитуда сигнала; $B(T)$ — переходная характеристика обеляющего фильтра (реакция на единичное включение гармонического на-

$$\frac{\overset{\infty}{\ldots}\,(j\omega)|^2\,d\omega}{(j\omega)|^2_{max}}$$ — энергетическая полоса

... фильтра; $\sigma_п^2$ — энергетическая спектральная плотность белого шума; $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Игрок А заинтересован минимизировать среднюю вероятность ошибки, а игрок Б выбирает свою стратегию с целью максимизировать $p_{ср}$. Задача состоит в нахождении цены игры. Фактический выигрыш игрока А должен при разумных действиях партнеров лежать между гарантированным нижним уровнем проигрыша игрока Б (верхней ценой игры) $\max\limits_{N} \min\limits_{\Phi} p_{ср}(\Phi, N)$ и гарантированным верхним уровнем выигрыша игрока А (нижней ценой игры) $\min\limits_{\Phi} \max\limits_{N} p_{ср}(\Phi, N)$. При этом всегда выполняется неравенство

$$\max_{N} \min_{\Phi} p_{ср}(\Phi, N) \geqslant \min_{\Phi} \max_{N} p_{ср}(\Phi, N), \tag{2}$$

где индексы N и Φ в максимине и минимаксе соответствуют стратегиям партнеров при выборе характеристик $\Phi_1(j\omega)$ и $N(\omega)$.

Из анализа структуры выражения (1) очевидно, что вероятность ошибки главным образом зависит от величины отношения $\dfrac{h}{2\Delta FT}$, которое можно представить в виде $\dfrac{h}{2\Delta FT} = \dfrac{K}{\int\limits_0^\infty \dfrac{N(\omega)}{|\Phi_1(j\omega)|^2}\,d\omega}$,

где $K = \dfrac{E_0^2 T}{4} = \text{const}$.

Если учитывать условие фиксации средней мощности полезного сигнала на входе канала

$$\int_0^\infty G(\omega)\,|\Phi_1(j\omega)|^2\,d\omega = P_{ср} = \text{const}, \tag{3}$$

а также класс источников помех с ограниченной средней мощностью

$$\int_0^\infty N(\omega)\,d\omega = P_п = \text{const}, \tag{4}$$

то можно найти

$$\max_N \min_\Phi p_{\text{ср}}(\Phi, N) = \frac{\int\limits_0^\infty G(\omega)\,d\omega \int\limits_0^\infty N(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty G(\omega)|\Phi_1(j\omega)|^2\,d\omega}. \qquad (5)$$

При нахождении максимина (5) учитывалось, что $\min p_{\text{ср}}$ соответствует $\min \int\limits_0^\infty \frac{N(\omega)}{|\Phi_1(j\omega)|^2}\,d\omega$, а $\max p_{\text{ср}}$ — $\max \int\limits_0^\infty \frac{N(\omega)}{|\Phi_1(j\omega)|^2}\,d\omega$.

Была также определена при выводе выражения (5) энергетическая спектральная плотность наихудшей помехи

$$N(\omega)_{\min} = G(\omega)\frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{с}}}, \qquad (6)$$

где

$$P_{\text{с}} = \int\limits_0^\infty G(\omega)\,d\omega.$$

Из выражения (6) следует, что наихудший спектр помехи должен выбираться пропорциональным энергетической спектральной плотности полезного сигнала на входе предыскажающего фильтра с коэффициентом пропорциональности, равным $P_{\text{п}}|P_{\text{с}}$.

С учетом дополнительных условий (3) и (4) находим минимакс:

$$\min_\Phi \max_N p_{\text{ср}}(\Phi, N) = \frac{\int\limits_0^\infty G(\omega)\,d\omega \int\limits_0^\infty N(\omega)d\omega}{\int\limits_0^\infty G(\omega)|\Phi_1(j\omega)|^2\,d\omega}. \qquad (7)$$

Таким образом, неравенство (2) на основании формул (5) и (7) превращается в равенство. В этом случае выигрыш игрока А является вполне определенным числом, а сама игра называется вполне определенной [2]. Тогда говорят, что существует цена игры, равная

$$U = \min_\Phi \max_N p_{\text{ср}}(\Phi, N) = \frac{\int\limits_0^\infty G(\omega)\,d\omega \int\limits_0^\infty N(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty G(\omega)|\Phi_1(j\omega)|^2\,d\omega}. \qquad (8)$$

В этом случае каждый из игроков действует так, как будто он заранее знает действия партнера. Если учесть, что частотная характеристика предыскажающего фильтра выбирается из условия $|\Phi_1(j\omega)|^2 = N(\omega)$, то цена игры получается равной

$$U = \frac{\int\limits_0^\infty G(\omega)\,d\omega \int\limits_0^\infty N(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty G(\omega)\,N(\omega)\,d\omega}. \qquad (9)$$

Анализ выражения (9) показывает, что числитель и знаменатель правой части (9) связаны между собой неравенством Буняковского-Коши:

$$\int\limits_0^\infty [\sqrt{G(\omega)}\sqrt{N(\omega)}]^2 d\omega \leqslant \int\limits_0^\infty [\sqrt{G(\omega)}]^2\,d\omega \int\limits_0^\infty [\sqrt{N(\omega)}]^2 d\omega.$$

Отсюда следует, что для увеличения цены игры необходимо, чтобы функции $\sqrt{G(\omega)}$ и $\sqrt{N(\omega)}$ максимально отличались между собой по форме. Если они пропорциональны друг другу либо отличаются постоянными множителями, то цена игры получается пропорциональной ширине полосы пропускания «идеального» канала, образованного последовательным включением предыскажающего и корректирующего (обеляющего) фильтров. Расширение полосы пропускания «идеального» канала способствует уменьшению средней вероятности ошибки в формуле (1) вследствие улучшения переходной характеристики $B(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малолепший Г. А. Влияние избирательного тракта на помехоустойчивость некогерентного приема дискретных сигналов. — «Электросвязь», 1970, № 7, с. 24—28.
2. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. М., Физматгиз, 1959, 300 с.