УДК 621.372.22

В. А. ДИКАРЕВ, канд. физ.-мат. наук

МНОГОПРОВОДНЫЕ ДЛИННЫЕ ЛИНИИ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПО ДЛИНЕ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается метод решения обобщенной системы телеграфных уравнений, которая, как известно [1], описывает процесс электромагнитных колебаний в многопроводных линиях связи. Параметры, характеризующие каждую отдельную линию, а также параметры, учитывающие взаимные влияния между ними, не предполагаются постоянными.

Решение проводится методом ВКБ [2, 3]. Указан алгоритм, позволяющий по n-му ВКБ-приближению находить $n+1$—е-приближение. Доказывается асимптотическая сходимость любого ВКБ-приближения. Получена оценка для приближения любого порядка через параметры многопроводной линии.

Предлагаемый ниже метод расчета пригоден и для многопроводных линий. Кроме того, данный метод дает возможность исследовать асимптотику решений системы телеграфных уравнений при больших значениях частоты.

Система обобщенных телеграфных уравнений для многопроводной линии, состоящей из n ветвей, имеет вид [1]

$$-\frac{dU_k}{dx}=\sum_{j=1}^{n} W_{kj} I_j;$$

$$-\frac{dI_k}{dx}=\sum_{j=1}^{n} Y_{kj} U_j \quad (k, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Здесь $I_к$, $U_к$ — амплитуды тока и напряжения в k-й цепи;

$$\begin{aligned} W_{kj} &= r_{kj} + i\omega m_{kj}, \ k \neq j; \\ W_{kj} &= R_k + i\omega L_k, \ k = j; \\ Y_{kj} &= g_{kj} + i\omega c_{kj}, \ k \neq j; \\ Y_{kj} &= G_k + i\omega C_k, \ k = j, \end{aligned} \tag{2}$$

где C_k, G_k, L_k, R_k, — коэффициенты емкости, утечки, индуктивности и сопротивления, рассчитанные на единицу длины; g_{kj}, c_{kj}, r_{kj}, m_{kj} — активная электрическая связь, емкостная связь, активная магнитная связь и индуктивная связь между k-й и j-й ветвями. В дальнейшем предполагается, что величины C_k, G_k, L_k, R_k, g_{kj}, c_{kj}, r_{kj}, m_{kj} есть функции от x с достаточным запасом гладкости. При $n=1$ система (1) превращается в обычную систему телеграфных уравнений.

В дальнейшем будем записывать системы уравнений и соответствующие им решения в матричной форме. Под скалярным произведением двух вектор-функций, как это принято, подразумеваем сумму произведений их одноименных проекций. При оценке точности ВКБ-приближений используем понятие нормы (обозначение $\|\cdot\|$) функции и матрицы. Предполагается, что норма этих величин рассматривается в пространстве $C_{[a,b]}$.

Далее будет описан способ решения методом ВКБ системы уравнений вида

$$\frac{dX}{dx} = (A + \omega B)X, \tag{3}$$

где $X\{X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x)\}$ — k-мерный вектор, проекции которого есть функции от $x(a \leqslant x \leqslant b)$; $A=A(x)$ и $B=B(x)$ — матрицы-функции k-го порядка; ω — параметр. Легко проверить, что система (1) является частным случаем системы (3).

В дальнейшем предполагается, что все собственные числа матрицы B при любом x, $a \leqslant x \leqslant b$ попарно различны.

Решение системы (3) будем искать в виде

$$X(x) = e^{\omega\int\limits_a^x b(\tau)d\tau} \left\{Z_0(x) + \frac{Z_1(x)}{\omega} + \frac{Z_2(x)}{\omega^2} + \ldots + \frac{Z_n(x)}{\omega^n} + \ldots\right\}, \tag{4}$$

где $b(x)$ — скалярная функция; $Z_n(x)$ — k-мерные вектор-функции, подлежащие определению.

Обозначим выражение в фигурных скобках в правой части (4) через $Z(x, \omega)$. Тогда формула (4) примет вид

$$X(x) = e^{\omega\int\limits_a^x b(\tau)d\tau} Z(x,\omega). \tag{5}$$

Подставим выражение для $X(x)$ из (5) в (3). Отбрасывая в левой и правой частях полученного равенства множитель $\exp[\omega \int\limits_a^x b(\tau)\,d\tau]$, получаем

$$\omega b(x)Z(x, \omega) + Z(x, \omega) = (A+\omega B)Z(x, \omega). \tag{6}$$

Приравнивая здесь коэффициенты при ω, имеем

$$[B-b(x)I]Z_0(x) = 0 \tag{7}$$

(I — единичная матрица).

Функции $b(x)$, $Z_0(x)$, удовлетворяющие уравнению (7), есть соответственно собственные значения и собственные векторы матрицы B. Существует k различных собственных функций $Z_{0j}(x)$ и соответствующих им собственных значений $b_j(x)$ ($j = 1, 2, ..., k$). Отправляясь от любой пары

$$b_j(x),\ Z_{0j}(x) \tag{8}$$

и подбирая соответствующим образом функции $Z_{1j}(x)$, $Z_{2j}(x)$..., можно для системы (3) получить ВКБ-приближение любого порядка, соответствующее этой паре. Ясно, что k решений, порождаемых парами (8), линейно независимы. Методика отыскания последующих приближений $Z_1(x)$, $Z_2(x)$, ... не зависит от выбора пары (8). Поэтому ниже приведена схема отыскания функций $Z_1(x)$, $Z_2(x)$,... для произвольной пары. Ниже для удобства записи индекс j, указывающий номер пары, будем опускать.

Приравняем в (6) коэффициенты при ω^{-n}; тогда

$$Z'_n(x) - AZ_n(x) = [B - b(x)I]\,Z_{n+1}(x),\quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

(положим $Z_{-1}(x) \equiv 0$).

Пусть $y(x)$ — такая отличная от нуля функция, что

$$[B^* - \bar{b}(x)I]\,y(x) = 0, \tag{10}$$

где B^* — матрица, сопряженная к B; $\bar{b}(x)$ — функция, комплексно-сопряженная с $b(x)$. Из (9) и (10) заключаем [4], что

$$(Z'_n(x) - AZ_n(x)),\ y(x)) = 0\ \ (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{11}$$

(здесь символ (.,.) обозначает скалярное произведение).

Выясним, каков вид общего решения системы уравнений (9). Отметим, что (9) имеет бесчисленное множество решений. Так как $\det[B - b(x)I] = 0$, произвольное решение системы уравнений (9) можно представить в виде

$$Z_n(x) = Z_n^0(x) + \varphi_n(x)\,u(x). \tag{12}$$

Здесь $Z_n^0(x)$ — какое-либо частное решение системы (9); $u(x)$ — такая вектор-функция, что $[B - b(x)I]\,u(x) = 0$; $\varphi_n(x)$ — скалярная функция.

Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi_n(x)$. С этой целью подставим правую часть (12) в (11). Тогда

$$\varphi'_n(x)(u(x),\ y(x)) + \varphi_n(x)(u'(x),\ y(x)) - \varphi_n(x)(Au(x),\ y(x)) = \\ = (AZ_n^0(x),\ y(x)) - (Z_n^{0\prime}(x),\ y(x)). \tag{13}$$

Таким образом, любое решение уравнения (9) имеет вид (12), где $\varphi_n(x)$ должна удовлетворять (13).

Перепишем формулу (4):

$$X(x) = e^{\omega \int_a^x b(\tau)d\tau} \left\{ Z_0(x) + \frac{Z_1(x)}{\omega} + \dots + \frac{Z_n(x)}{\omega^n} + \frac{u_n(x, \omega)}{\omega^{n+1}} \right\}. \tag{14}$$

Исследуем сходимость метода для того случая, когда все собственные значения матрицы B чисто мнимые. Имеет место

Теорема. *Пусть функция*

$$X(x) = e^{\omega\int\limits_a^x b(\tau)d\tau}\left\{Z_0(x) + \frac{Z_1(x)}{\omega} + \ldots + \frac{Z_n(x)}{\omega^n} + \frac{u_n(x,\omega)}{\omega^{n+1}}\right\},$$

где Z_i (x) $(i=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют соотношениям (9), есть решение системы (3). Тогда для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|u_n(x, \omega)| < C$, где *C не зависит от x и ω.*

Подставим в (6) вместо $Z(x, \omega)$ выражение в фигурных скобках в правой части равенства (14). Учитывая, что функции $Z_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют соотношениям (9), и полагая $\omega=\alpha^{-1}$, получаем для $u_n(x, \omega)$ уравнение

$$\alpha u'_n - [B - b(x)]u_n = AZ_n(x) - Z'_n(x) + \alpha A u_n. \qquad (15)$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что при $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\left|u_{n+1}\left(x, \frac{1}{\alpha}\right)\right| < \frac{C}{\alpha}, \qquad (16)$$

где C — константа, не зависящая от α. Это следует из того, что

$$u_n(x,\omega) = Z_{n+1}(x) + \alpha u_{n+1}(x,\omega).$$

Пусть $T=T(x)$ — такая матрица, для которой матрица $D=T^{-1}[B-b(x)I]T$ является диагональной. Положим

$$u_{n+1}\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) = T(x)\,U(x,\alpha). \qquad (17)$$

Тогда уравнение (15) перепишется так:

$$\alpha T'U(x) + \alpha TU'(x) - [B - b(x)I]TU(x) - \alpha ATU(x) = g(x), \qquad (18)$$

где $g(x) = AZ_n(x) - Z'_n(x)$. Умножим левую и правую части (18) на матрицу T^{-1} и введем обозначения $T^{-1}g(x) = f(x)$, $T^{-1}T' - T^{-1}AT = Q$. После этого уравнение (18) примет вид

$$\alpha U(x) - DU(x) + \alpha QU(x) = f(x).$$

Приравнивая здесь i-е компоненты в левой и правой части, получаем

$$\alpha U'_i(x) - d_i U_i(x) + \alpha\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(x)U_j(x) = f_i(x). \qquad (19)$$

Пусть

$$U_i(x) = P_i(x) e^{\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^x d_i(\tau)d\tau} \qquad (20)$$

После такой замены уравнение (19) приведем к виду

$$P'_i(x) = \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(x) P_j(x) e^{\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^x [d_j(\tau)-d_i(\tau)]d\tau} = \frac{1}{\alpha} f_i(x) e^{-\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^x d_i(\tau)d\tau} \qquad (21)$$

Полагая в последнем равенстве $i=1, 2, \ldots, k$, получаем систему уравнений, матричная запись которой имеет вид

$$P'(x) = Q_1 P(x) + \frac{1}{\alpha} F(x) \quad \left(F_i(x) = f_i(x) e^{-\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^x d_i(\tau)d\tau}\right).$$

Для уравнений такого типа справедливо неравенство

$$\|P\| \leqslant \frac{1}{\alpha} e^{(b-a)\|Q_1\|} \cdot \|f\|, \qquad (22)$$

проверка которого проводится так же, как проверка аналогичного неравенства в [5].

Отметим, что $\|Q_1\|$ и $\|f\|$ не зависят от α. Так как диагональные элементы $d_i(x)$ матрицы D чисто мнимые, то из (22) и (20) следует, что

$$\|U(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha} e^{(b-a)\|Q_1\|} \|f\|.$$

Наконец, из (17) получаем

$$\|u_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|T\| e^{(b-a)\|Q_1\|} \|f\|. \qquad (23)$$

Теорема доказана.

Из доказанной выше теоремы и оценки (23) следует, что при больших ω достаточная точность будет обеспечена уже нулевым приближением.

Применим описанную выше схему вычислений к обычной системе телеграфных уравнений с переменными коэффициентами. Ограничимся отысканием нулевого приближения. В матричной форме эта система выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \frac{dU}{dx} \\ \frac{dI}{dx} \end{pmatrix} = (A + \omega B) \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}, \; A = -\begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix}, \; B = -i \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Собственные значения матрицы B равны соответственно $\pm i\sqrt{CL}$. Нетрудно проверить, что $u_{1,2}=\{\sqrt{L},\ \pm\sqrt{C}\}$, $y_{1,2}=\{\pm\sqrt{C},\ \sqrt{L}\}$. Перейдем к отысканию функции $Z_0(x)$. Положим в (12) $Z_0^0(x)=0$. Тогда

$$Z_0(x)=\varphi_0(x)\,u(x),$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (13). Учитывая выражения для A, B, u, y, получаем для $\varphi_0(x)$ уравнение

$$\pm 2\sqrt{CL}\,\varphi_0'(x)+(RC+GL)\,\varphi_0(x)\pm\sqrt{CL}\left(\frac{L'}{2L}+\frac{C'}{2C}\right)\varphi_0(x)=0.$$

Решая его, находим

$$\varphi_0(x)=(LC)^{-\frac{1}{4}}\exp\left\{\pm\frac{1}{2}\int\limits_a^x\frac{RC+GL}{\sqrt{CL}}\,d\tau\right\}.$$

Значит,

$$Z_0(x)=(LC)^{-\frac{1}{4}}\exp\left\{\pm\frac{1}{2}\int\limits_a^x\frac{RC+GL}{\sqrt{CL}}\,d\tau\right\}\begin{pmatrix}\sqrt{L}\\ \pm\sqrt{C}\end{pmatrix}.$$

Из изложенного выше следует, что предлагаемый метод решения обобщенной системы телеграфных уравнений пригоден для любой линии с гладко изменяющимися по длине параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шварцман В. О. Взаимные влияния в кабелях связи. М., «Связь», 1966, 480 с.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965, 237 с.
3. Фреман Н., Фреман П. ВКБ-приближение. М., «Мир», 1967. 168 с.
4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971. 191 с.
5. Арсенин В. Я. Математическая физика. М., «Наука», 1966. 193 с.