

## ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ТРАНСПОНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Анализатор спектра последовательного действия может быть использован для исследования спектра регулярного сигнала только при условии многократного повторения (периодизации) этого сигнала. Для сокращения времени анализа воспроизведение реализации сигнала осуществляется в режиме сжатия.

Таким образом, на вход анализатора спектра поступает транспонированный [1] сигнал, спектр которого, естественно, отличается от спектра исследуемого сигнала. Это отличие может вызвать искажение результатов анализа даже при идеальном функционировании анализирующего тракта. Представляется целесообразным определить характер изменения спектра транспонированного сигнала в зависимости от параметров транспонирования (коэффициент сжатия, количество циклов воспроизведения, режим запоминания сигнала).

### Спектр сигнала на выходе транспонатора с фиксированной памятью

В транспонаторе с фиксированной памятью реализация исследуемого сигнала фиксируется в устройстве запоминания и циклически воспроизводится в ускоренном темпе без обновления записанной информации. Параметрами режима транспонирования в этом случае являются: интервал запоминания  $T_3$ , интервал воспроизведения  $T_в$ , интервал анализа  $T_a$  и коэффициент сжатия сигнала  $\alpha = T_3/T_в$ . Существенный параметр — количество  $N$ , учитываемых при анализе выборочного значения спектра циклов воспроизведения исследуемого сигнала.

Если исследуемая реализация в натуральном масштабе времени описывается функцией  $f_0(t)$  на отрезке  $(0 - T_3)$ , ее сжатая копия на  $k$ -м цикле воспроизведения будет представлена функцией

$$f_k(t) = f_0(\alpha t - kT_3). \quad (1)$$

Если спектр сигнала  $f_0(t)$  определяется некоторой комплексной функцией  $F_0(\omega)$ , то спектр сжатой копии на  $k$ -м цикле воспроизведения в соответствии с известными теоремами о спектрах [2] равен

$$\Phi_k(\omega) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) e^{-j\frac{\omega k T_s}{\alpha}}. \quad (2)$$

Принцип суперпозиции и выражение (2) позволяют преобразовать интересующий нас спектр  $F_{aN}(\omega)$  конечной последовательности  $N$  сжатых реализаций сигнала:

$$F_{aN}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_k(\omega) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k T_B}. \quad (3)$$

Следовательно [3],

$$F_{aN}(\omega) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \frac{\sin \frac{N\omega T_B}{2}}{\sin \frac{\omega T_B}{2}} e^{-j\frac{(N-1)\omega T_B}{2}}. \quad (4)$$

Более наглядным является представление спектра транспонированного сигнала конечной длительности в виде модулированной последовательности функций  $\sin x/x$ , которое может быть получено из (4) с учетом доказанного в приложении тождества:

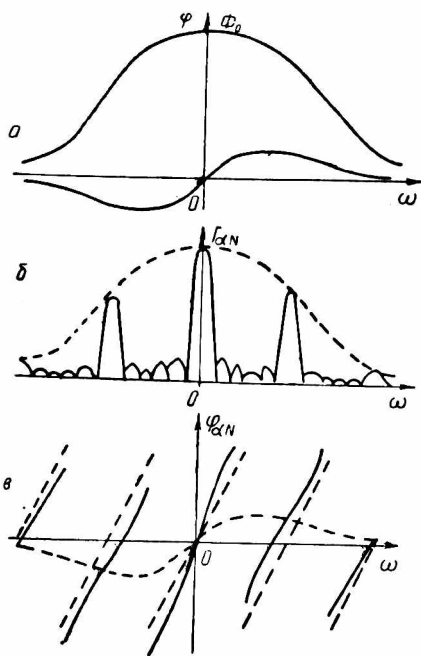
$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{N\omega T_B}{2} e^{-j\frac{(N-1)\omega T_B}{2}}}{\sin \frac{\omega T_B}{2}} = \\ & = N \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{NT_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)}{\frac{NT_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)} e^{-j\frac{(N-1)T_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)} \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае

$$F_{aN}(\omega) = \frac{N}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{NT_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)}{\frac{NT_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)} e^{-j\frac{(N-1)T_B}{2} \left(\omega - q \frac{2\pi}{T_B}\right)}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что транспонирование сигнала, помимо расширения спектра в  $\alpha$  раз, приводит к концентрации

его спектральных составляющих в районе узловых частот  $q \frac{2\pi}{T_B}$  кратных частоте воспроизведения реализаций. Степень концентрации при фиксированном коэффициенте сжатия тем выше, чем выше степень рециркуляции  $N$ . Кроме концентрации энергии, наблюдается существенное искажение фазовых отношений как внутри зон концентрации, так и вне их. Как следует из выражения (6), эти искажения проявляются в дополнительном повороте вектора  $F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$  на угол  $\frac{(N-1)T}{2} \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  отсчитывается в каждой зоне концентрации от узловой частоты  $q \frac{2\pi}{T_B}$ .



Для иллюстрации приведенных положений на рисунке (позиция б) показана нормированная амплитудно-частотная характеристика

$$\frac{\alpha}{N} F_{\alpha N}(\omega) = \left| F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \right| \times \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{NT_B}{2} \left( \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right)}{\frac{NT_B}{2} \left( \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right)} \right), \quad (7)$$

а на рисунке (позиция в) — фазо-частотная характеристика

$$\dot{\varphi}_{\alpha N}(\omega) = \varphi_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{(N-1)T_B}{2} \left[ \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right] \text{rect}_{\frac{2\pi}{T_B}} \left( \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right) \quad (8)$$

транспонированного сигнала, условное изображение нормированного спектра сжатой реализации которого  $\left| F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \right| e^{-T\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$  соответствует рисунку (позиция а). Из соотношений (7), (8) и из рисунка следует, что транспонирование сигнала на входе анализатора спектра исключает возможность точного определения спектральных характеристик исследуемой реализации во всем рабочем диапазоне за исключением малых окрестностей узловых точек. Естественно, что величина допустимой расстройки обратно пропорциональна степени рециркуляции  $N$ .

Рассмотренные выше положения, ограничивающие возможность спектрального анализа с транспонированием сигналов определением спектральных характеристик в дискретном множестве узловых точек рабочего диапазона, не ограничивают возможностей метода. Это объясняется тем, что упомянутое множество отсчетов спектра в узловых точках является информативно полным и позволяет с помощью спектральной теоремы Котельникова [4] точно интерполировать промежуточные значения исследуемой характеристики во всем рабочем диапазоне частот.

При необходимости непосредственного измерения спектра в точке, расположенной между узлами, следует использовать анализирующий тракт с конечной памятью, реагирующий только на одну из воспроизводимых сжатых реализаций и восстанавливающий нулевые начальные условия к моменту начала следующей реализации. В этом случае спектр транспонированного сигнала совпадает со спектром сжатой реализации:

$$F_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha} F_0 \left( \frac{\omega}{\alpha} \right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{T_B}{2} \left( \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right)}{\frac{T_B}{2} \left( \omega - q \frac{2\pi}{T_B} \right)} = \frac{1}{\alpha} F_0 \left( \frac{\omega}{\alpha} \right). \quad (9)$$

В анализаторах спектра с транспонированием сигнала всегда предпочтительно использовать анализирующие тракты с конечной памятью, так как это позволяет уменьшить погрешности, возникающие в результате неточной настройки тракта на чистоту узловой точки, и погрешности, связанные с фактическим увеличением степени рециркуляции  $N$  в процессе измерения, особенно существенные на первых циклах воспроизведения (анализа) сигнала.

### Спектр сигнала на выходе транспониатора со скользящей памятью

В транспониаторе со скользящей памятью записанная информация частично обновляется в течение каждого цикла воспроизведения (начальный участок каждой предыдущей реализации, равный по длительности интервалу воспроизведения, замещается ее продолжением). Если исследуемая реализация, как и в предыдущем случае, определяется функцией  $f_0(t)$ , заданной на отрезке  $(0 - T_s)$ , то  $k$ -му циклу воспроизведения будет соответствовать сигнал

$$f_k(t) = f_0[at - k(T_s - T_B)] \text{rect}_{T_s}(at - kT_B), \quad (10)$$

где высекающая функция  $\text{rect}_{T_s}(t)$  определяется соотношениями

$$\text{rect}_{T_s}(t) = 1 \text{ при } 0 \leq t \leq T_s;$$

$$\text{rect}_{T_s}(t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > T_s. \quad (11)$$

Если смещение реализации на величину  $k T_b$  не приводит к усечению полезного сигнала (что возможно при длительности сигнала, меньшей длительности интервала анализа), то спектр  $k$ -й реализации с учетом сжатия

$$\Phi_k(\omega) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) e^{-j \frac{k\omega(T_a - T_b)}{\alpha}} \quad (12)$$

Спектр последовательности  $N$  следующих друг за другом реализаций определяется суммой вида

$$F_{aN}(\omega) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\omega T_b} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (13)$$

Воспользовавшись приведенными в приложении соотношениями, спектр  $F_{aN}$  можно представить в виде модулированной последовательности функций  $\sin x/x$ :

$$F_{aN}(\omega) = \frac{N}{\alpha} F_0\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \left\{ \frac{NT_b(1-1/\alpha)}{2} \left[ \omega - \frac{2\pi q}{T_b(1-1/\alpha)} \right] \right\}}{\omega - \frac{2\pi q}{T_b(1-1/\alpha)}} \times \\ \times e^{-j \left\{ \frac{(N-1)T_b(1-1/\alpha)}{2} \left[ \omega - \frac{2\pi q}{T_b(1-1/\alpha)} \right] \right\}} \quad (14)$$

Полученное выражение по структуре совпадает с выражением (6) для спектра сигнала на выходе транспониатора с фиксированной памятью. В рассматриваемом случае помимо расширения спектра в  $\alpha$  раз наблюдаются концентрация энергии сигнала в районе узловых частот и искажение фазовой характеристики. Существенным отличием спектра является изменение узловых частот по сравнению со случаем транспонирования с фиксированной памятью. При одном и том же интервале воспроизведения  $T_b$  транспонирование со скользящей памятью увеличивает период повторения узловых частот, который в этом случае зависит от коэффициента сжатия сигнала  $\alpha$  и равен

$$\frac{2\pi}{T_b(1-1/\alpha)}$$

Поскольку расстройка рабочей частоты анализа относительно узловой частоты приводит к появлению дополнительной погрешности измерения спектральных характеристик, изменение узловых частот необходимо учитывать при практическом использовании транспониаторов со скользящей памятью. Для устранения эффекта концентрации спектра в режиме транспонирования со скользящей памятью и всех сопутствующих ему явлений целесообразно использовать, как и в предыдущем случае, анали-

зирующий тракт с конечной и согласованной с интервалом воспроизведения памятью.

В заключение отметим, что режим транспонирования со скользящей памятью может сопровождаться значительными искажениями спектра исследуемого сигнала, возникающими в результате усечения его реализаций по мере развития процесса рециркуляции. Исходная реализация  $f_b(t)$  и реализация с номером  $k f_k(t)$ , как это следует из выражения (10), в результате смещения сигнала на величину  $\kappa T_b$  и усечения могут существенно отличаться друг от друга, что и определяет появление отсеченных искажений.

Уменьшить эти искажения можно только путем уменьшения интервала воспроизведения сигнала  $T_b$ . Полное их устранение возможно только в режиме транспонирования с фиксированной памятью, поэтому для повышения точности определения спектральных характеристик рекомендуется использовать такой режим. Режим транспонирования со скользящей памятью рационально использовать в тех случаях, когда понижение точности анализа компенсируется достижением других эффектов, например повышенном оперативности анализа, исключающей необходимость согласования интервала существования исследуемого сигнала и интервала записи транспониатора.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Сумму равносмещенных векторов

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ikax} = \frac{\sin \frac{Nax}{2}}{\sin \frac{ax}{2}} e^{-j(N-1) \frac{ax}{2}} \quad (I)$$

можно представить в виде бесконечной последовательности сингулярных функций вида  $\sin x/x$ , дающей более наглядное представление о характере и свойствах рассматриваемой величины; а в ряде случаев облегчающей операции с ней.

Преобразование Фурье  $G(\lambda)$  этой суммы является финитной функцией, ограниченной в диапазоне  $[0; (N-1)a]$ :

$$G(a) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\lambda + ak),$$

поэтому сама сумма точно представляется рядом Котельникова с интервалом дискретизации  $\Delta x < \frac{2\pi}{(N-1)a}$ :

$$g(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(p\Delta x) r(x - p\Delta x). \quad (II)$$

Композиционная функция  $r(x)$  является обратным преобразованием Фурье частотной характеристики  $R(\lambda)$  интерполирующего фильтра [5]. При интервале дискретизации, равном  $\frac{2\pi}{Na}$ :

$$R(\lambda) = \Delta x; \quad -Na + \frac{a}{2} \leq \lambda \leq \frac{a}{2};$$

$$R(\lambda) = 0; \quad \lambda < -Na + \frac{a}{2}; \quad \lambda > \frac{a}{2},$$

а композиционная функция

$$r(x) = \frac{\Delta x}{2\pi} \int_{-Na + \frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j\lambda x} d\lambda = \frac{\sin \frac{Nax}{2}}{\frac{Nax}{2}} e^{-j \frac{(N-1)ax}{2}} \quad (III)$$

Таким образом, ряд (II) с учетом (I), (III) можно записать в виде

$$g(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p}{N}\pi} \cdot \frac{\sin \frac{Na}{2} \left(x - p \frac{2\pi}{Na}\right)}{\frac{Na}{2} \left(x - p \frac{2\pi}{Na}\right)} e^{-j \frac{(N-1)ax}{2}} \quad (IV)$$

Учитывая, что члены суммы (IV) при  $p \neq Nq$ , где  $q$  принимает все целочисленные значения, равны нулю, а при  $p = Nq$  их можно представить выражением  $N(-1)^{(N-1)q}$ , ряд (IV) можно преобразовать так:

$$g(x) = N \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{Na}{2} \left(x - q \frac{2\pi}{a}\right)}{\frac{Na}{2} \left(x - q \frac{2\pi}{a}\right)} \exp \left[ -j \frac{(N-1)a}{2} \left(x - q \frac{2\pi}{a}\right) \right]. \quad (V)$$

Полученное выражение совпадает с выражением (6) для суммы равносмещенных векторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Криксунов В. Г. Спектральный анализ электрических сигналов. Київ, «Техніка», 1971. 248 с.
2. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., Физматгиз. 1962. 143 с.
3. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. М., ИЛ, 1963. 141 с.
4. Голдман С. Теория информации. М., ИЛ, 1957. 312 с.
5. Чайковський В. І. Квантування та інтерполяція сигналів в імпульсних радіотехнічних системах. Київ, «Техніка», 1966. 192 с.