УДК 538.574.6:621.372.82

С. И. ЛАПТА,
В. Г. СОЛОГУБ, канд. физ.-мат. наук

ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТРЕЗКА КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА ПРОДОЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ, РАСПОЛОЖЕННЫМ НА ЕГО ОСИ

Задача о дифракции электромагнитных волн на отрезке круглого волновода представляет большой теоретический интерес и имеет обширные приложения на практике. Она тесно связана с задачами об антенном вибраторе и кольцевой антенне. Проводящий круглый цилиндр конечной длины является также удовлетворительной электрической моделью многих рассеивающих тел. Поэтому данной задаче посвящено довольно большое количество работ [1—5]. Однако методы исследования ее носили существенно приближенный характер [1—3], либо основывались на численном решении интегрального уравнения 1-го рода для плотности поверхностного тока на цилиндре [4, 5].

В настоящей работе предложен математически обоснованный метод исследования задачи о дифракции на отрезке круглого волновода (цилиндрическое кольцо) электромагнитных полей, возбуждаемых электрическим и магнитным диполями. Стенка кольца предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей. Для простоты рассмотрен случай, когда диполь находится на оси кольца и ориентирован вдоль нее.

Используя точное решение системы парных интегральных уравнений специального вида, рассматриваемую задачу сводим к нахождению решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром простого вида относительно преобразования Фурье плотности поверхностного тока на кольце.

Это уравнение удобно для численного анализа задачи при всех значениях ее параметров. В случае, когда ширина кольца мала по сравнению с его диаметром и с длиной волны, для решения уравнения применен метод последовательных приближений, найдены с оценкой погрешности приближенные выражения для плотности поверхностного тока и поля в дальней зоне.

Магнитный диполь. Постановка задачи

Рассмотрим случай магнитного диполя с величиной магнитного момента, равной m. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с осью Oz, совпадающей с осью кольца, и центром O, равноудаленным от его кромок.

Можно показать, что при рассматриваемом способе возбуждения электромагнитное поле полностью определяется единственной отличной от нуля z-составляющей магнитного вектора Герца, которую представим так:

$$\Pi^m = \Pi_0^m + \Pi_1^m,$$

где $\Pi_0^m = m\frac{e^{ikR}}{R}$ соответствует диполю в свободном пространстве*), а $-\Pi_1^m$ рассеянному полю ($R=\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}$, z_0 — координата точки нахождения диполя).

Функция Π_1^m должна удовлетворять уравнению Гельмгольца всюду вне кольца, условию на бесконечности в форме принципа предельного поглощения и быть такой, чтобы определяемое посредством нее электромагнитное поле удовлетворяло граничному условию на кольце и условию конечности энергии в любой ограниченной области. Эту функцию будем искать в виде

$$\Pi_1^m(\rho, z) = \frac{m}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(s)}{g}\begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(g)\,J_0\left(g\frac{\rho}{a}\right) \\ J_1(g)\,H_0^{(1)}\left(g\frac{\rho}{a}\right)\end{Bmatrix} e^{is\frac{z}{a}}\,ds. \tag{1}$$

Здесь и далее в фигурных скобках следует брать верхнюю строчку при $\rho \leqslant a$, а нижнюю при $\rho \geqslant a$; I^n (y), H_n^1 (y) — функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно; $g=\sqrt{\varkappa^2-s^2}$, причем взята та ветвь корня, для которой $\operatorname{Im} g>0$ при $|s| \to \infty$ вдоль вещественной оси; $\varkappa=ka$; k — волновое число; a — радиус кольца.

Зная $x(s)$, по известным формулам, используя (1), получаем рассеянное поле во всем пространстве. Плотность поверхностного тока на кольце при этом будет иметь вид

$$j_\varphi^m = -\frac{icm}{2\pi^2 a^3}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,e^{is\frac{z}{a}}\,ds\;(J_z^m=0), \tag{2}$$

где c — скорость света. Таким образом, с точностью до постоянного множителя искомая функция $x(s)$ есть преобразование Фурье плотности поверхностного тока на кольце и, следовательно, полностью определяет энергетические характеристики рассеянного поля.

Обращение в нуль тангенциальной составляющей полного электрического поля на поверхности кольца и отсутствие токов на ее дополнении до бесконечно длинного цилиндра приводят к следующей системе парных интегральных уравнений, которым должна удовлетворять искомая функция $x(s)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)J_1(g)\,H_1^{(1)}(g)e^{is\frac{z}{a}}ds = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} gH_1^{(1)}(g)e^{i\frac{s}{a}(z-z_0)}ds,\; |z|<\frac{d}{2}, \tag{3}$$

* Временная зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, e^{is\frac{z}{a}}\, ds = 0, \qquad |z| > \frac{d}{2}, \tag{4}$$

где d — ширина кольца.

Сведение задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Приближенное решение для узкого кольца

Систему уравнений (3), (4) можно привести к виду, рассмотренному в работе [6]. С этой целью введем величину $\varepsilon_1(s)$ посредством соотношения

$$J_1(g)\, H_1^{(1)}(g) = \frac{1}{i\pi |s|}\left[1 - \varepsilon_1(s)\right], \quad \varepsilon_1(s) \underset{|s|\to\infty}{=} O(s^{-2}),$$

а уравнение (3) заменим уравнением, полученным из него дифференцированием по z, и равенством, которое следует из него при $z=0$. Используя результаты работы [6], систему парных интегральных уравнений (3), (4) можно заменить интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Соответствующие ему уравнения для четной $x^+(s)$ и нечетной $x^-(s)$ частей функции $x(s)$ при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned} x^+(s) &= \eta \int_0^\infty x(t)\, \varepsilon_1(t)\, W_{\eta s}^{\eta t}\, dt + \eta\, \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \operatorname{tg} H_1^{(1)}(g) \cos t\, \frac{z_0}{a}\, W_{\eta s}^{\eta t}\, dt + \\ &\quad + x(0)\, J_0(\eta s); \\ x^-(s) &= \eta \int_0^\infty x^-(t)\, \varepsilon_1(t)\, U_{\eta s}^{\eta t}\, dt - \eta\, \frac{i\pi}{2} \int_0^\infty \operatorname{tg} H_1^{(1)}(g) \sin t\, \frac{z_0}{a} U_{\eta s}^{\eta t} dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\eta = \frac{d}{2a};$$

$$W_\lambda^\mu = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda^2}\left[\lambda J_0(\lambda) J_1(\mu) - \mu J_0(\mu) J_1(\lambda)\right];$$

$$U_\lambda^\mu = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda^2}\left[\mu J_0(\lambda) J_1(\mu) - \lambda J_0(\mu) J_1(\lambda)\right].$$

Постоянная $x(0)$ определяется из дополнительного соотношения

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty x^+(s)\, J_1(g)\, H_1^{(1)}(g)\, ds = b = \\ &= \frac{a^2}{2(a^2 + z_0^2)} \left(i\varkappa - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z_0^2}}\right) e^{ik\sqrt{a^2+z_0^2}}, \end{aligned} \tag{6}$$

которое получается из уравнения (3) при $z=0$.

Заметим, что функция $x^-(s)$ определяет решение задачи о возбуждении магнитным диполем такого же кольца половинной ширины, стоящего на бесконечной идеально проводящей плоскости. Магнитный вектор Герца рассеянного кольцом поля в этой задаче определяется тем же представлением (1), в котором вместо $x(s)$ стоит ее удвоенная нечетная часть.

Решение интегральных уравнений (5) с дополнительным условием (6) при любых значениях параметров задачи можно получить одним из численных методов. Отметим, что погрешность, возникающую при замене (5), (6) уравнениями с конечными верхними пределами интегрирования, нетрудно оценить, если учесть эквивалентность (5), (6) системе (3), (4).

В случае узкого кольца можно найти явное решение уравнений (5), (6), используя метод последовательных приближений. Для выяснения области значений параметров задачи, при которых применим этот метод, удобно перейти в уравнениях (5) к функциям

$$\tilde{x}^+(s) = s^{-\frac{1}{2}}[x^+(s) - x(0)J_0(\eta s)], \quad \tilde{x}^-(s) = s^{-\frac{1}{2}}x^-(s).$$

Решения полученных уравнений будем искать в пространстве функций $L_2(0,\infty)$. Можно показать, что принадлежность $\tilde{x}^{\pm}(s)$ этому пространству обеспечит конечность энергии рассеянного поля в любом ограниченном объеме. В пространстве $L_2(0,\infty)$ для норм интегральных операторов рассматриваемых уравнений справедлива оценка (см. приложение) *

$$\|\mathbf{K}\| < C\eta\,(1 + \varkappa\,|\ln\varkappa|^{\frac{1}{2}}), \tag{7}$$

где C — абсолютная постоянная.

Следовательно, когда ширина кольца достаточно мала по сравнению с его диаметром и с длиной волны, $\|\mathbf{K}\|<1$ и можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Ограничиваясь в уравнениях (5), (6) первым приближением, получаем для функции $x(s)$ выражение

$$x(s) = \frac{b}{L(\eta)}J_0(\eta s) - \eta\frac{\pi i}{2}C_1 J_1(\eta s) + O\left(\frac{\eta^2}{\ln\eta}\right). \tag{8}$$

Здесь

$$L(\eta) = \frac{i}{\pi}\left[\ln\frac{\eta}{4} + 2 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2\varkappa}H_0(x)\,dx - \pi H_1(2\varkappa)\right] + \varkappa J_0(2\varkappa) -$$

$$- J_1(2\varkappa) + \varkappa\frac{\pi}{2}[J_1(2\varkappa)H_0(2\varkappa) - J_0(2\varkappa)H_1(2\varkappa)];$$

---

* Правые части данных уравнений принадлежат $L_2(0,\infty)$.

$$C_1 = \int_0^\infty \operatorname{tg} H_1^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} dt = -ia \frac{d}{dz_0} b;$$

$H_n(x)$ — функции Струве.

Используя (8), из формулы (2) находим приближенное выражение для плотности поверхностного тока:

$$j_\varphi^m = -\frac{imc}{\pi a^3 \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}}} \left[\frac{b}{\pi\eta L(\eta)} + C_1 \frac{z}{d}\right] [1 + O(\eta^2 \ln \eta)].$$

Полный ток, текущий по кольцу, при этом имеет вид с точностью $O(\eta^2)$

$$J_\varphi^m = -\frac{imc}{\pi a^2} \frac{b}{L(\eta)} = \frac{ca}{2\pi\varkappa L(\eta)} \tilde{E}_\varphi^{0m}, \tag{9}$$

где $\tilde{E}_\varphi^{0m}$ — φ-составляющая электрического вектора поля источника при $z=0$, $\rho=a$.

Из (9) видно, что с уменьшением ширины кольца величина полного тока убывает обратно пропорционально логарифму отношения $\frac{d}{a}$, а его фаза в первом приближении отстает от фазы E_φ^{0m} на $\frac{\pi}{2}$.

Из представления (1) следует, что в дальней зоне сферические составляющие рассеянного поля имеют вид

$$\tilde{E}_\varphi^{1m} = -H_\theta^{1m} = -\frac{2i\varkappa m}{a^2} x(\varkappa \cos\theta) J_1(\varkappa \sin\theta) \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$H_r^{1m} = 0\left(\frac{1}{r}\right); \; E_r^{1m} = E_\theta^{1m} = H_\varphi^{1m} = 0.$$

Здесь использованы сферические координаты r, θ, φ с центром в точке O, угол θ отсчитывается от оси Oz.

Отсюда, учитывая (8), получаем формулу, определяющую в первом приближении распределение интенсивности излучения по углам:

$$I^m = \frac{c\varkappa^2 m^2}{2\pi a^4} \frac{|b^2|}{|L(\eta)|^2} J_1^2(\varkappa \sin\theta)[1 + O(\eta^2 \ln \eta)].$$

Из этого выражения следует, что в рассматриваемом приближении диаграмма рассеяния узкого кольца при возбуждении его магнитным диполем совпадает с диаграммой направленности проволочной кольцевой синфазной равноамплитудной антенны.

Легко видеть, что максимум интенсивности рассеянного излучения имеет место при $z_0=0$, т. е. когда диполь расположен в середине кольца. С уменьшением ширины кольца интенсивность излучения убывает пропорционально $\ln^{-2} \eta$.

Зависимость рассмотренных дифракционных характеристик от длины волны имеет осциллирующий характер, который выражен тем резче, чем меньше длина волны. Из выражения для $L(\eta)$ видно, что при $\varkappa \gg 1$ осцилляции определяются нулями функции

$$F(\varkappa) = J_1(2\varkappa)\, H_0(2\varkappa) - J_0(2\varkappa)\left[H_1(2\varkappa) - \frac{2}{\pi}\right].$$

Электрический диполь

Перейдем к рассмотрению задачи о возбуждении кольца электрическим диполем с моментом по величине, равным p. В этом случае электромагнитное поле полностью определяется электрическим вектором Герца с единственной отличной от нуля составляющей по оси Oz, которую будем искать в виде

$$\Pi^p = \Pi_0^p + \Pi_1^p.$$

Здесь $\Pi_0^p = p\frac{e^{i\varkappa R}}{R}$ соответствует электрическому диполю в свободном пространстве. Функцию Π_1^p, которая определяет рассеянное поле, ищем в таком представлении:

$$\Pi_1^p(\rho, z) = \frac{p}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s) \begin{Bmatrix} H_0^{(1)}(g)\, J_0\left(g\frac{\rho}{a}\right) \\ J_0(g) H_0^{(1)}\left(g\frac{\rho}{a}\right) \end{Bmatrix} e^{is\frac{z}{a}}\, ds, \qquad (10)$$

где $y(s)$ с точностью до постоянного множителя — преобразование Фурье плотности поверхностного тока

$$j_z^p = -\frac{c\varkappa p}{2\pi^2 a^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{is\frac{z}{a}}\, ds \quad (j_\varphi^p = 0).$$

Из условия равенства нулю тангенциальной составляющей полного электрического поля на кольце и непрерывности полей вне его получим систему парных интегральных уравнений, которым должна удовлетворять искомая функция $y(s)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s)\, g^2 J_0(g)\, H_0^{(1)}(g) e^{is\frac{z}{a}}\, ds = -\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g)\, e^{i\frac{s}{a}(z - z_0)}\, ds,$$

$$|z| < \frac{d}{2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{is\frac{z}{a}}\, ds = 0, \qquad |z| > \frac{d}{2}.$$

Аналогично предыдущему, вводя величину $\varepsilon_2(s)$ по формуле

$$g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g) = \frac{i|s|}{\pi}[1 - \varepsilon_2(s)], \quad \varepsilon_2(s) \underset{|s|\to\infty}{=} O(s^{-2})$$

и переходя к четной $y^+(s)$ и нечетной $y^-(s)$ по s частям функции $y(s)$, эту систему можно заменить эквивалентными ей интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода:

$$y^+(s) = \eta \int_0^\infty y^+(t)\, \varepsilon_2(t)\, U_{\eta t}^{\eta s}\, dt - \eta \frac{\pi}{2s} \int_0^\infty g^2 H_0^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} U_{\eta s}^{\eta t}\, dt;$$

$$y^-(s) = \eta \int_0^\infty y^-(t)\, \varepsilon_2(t)\, W_{\eta t}^{\eta s}\, dt + \eta \frac{i\pi}{2s} \int_0^\infty g^2 H_0^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} W_{\eta s}^{\eta t}\, dt. \tag{11}$$

Представление (10) при замене $y(s)$ ее удвоенной четной частью дает выражение для электрического вектора Герца, рассеянного кольцом поля в задаче о возбуждении электрическим диполем такого же кольца половинной ширины, стоящего на бесконечной идеально проводящей плоскости.

Замечания о численном решении системы уравнений (5), (6) относится и к системе (11).

Если перейти в уравнениях (11) к новым неизвестным функциям $\tilde{y}^{\pm}(s)$, связанным с $y^{\pm}(s)$ соотношениями

$$\tilde{y}^+(s) = s^{-\frac{1}{2}} \left[y^+(s) - A J_0(\eta s) + \eta \frac{\pi}{2s} \int_0^\infty g^2 H_0^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} U_{\eta s}^{\eta t} dt \right],$$

$$\tilde{y}^-(s) = s^{\frac{1}{2}} y^-(s),$$

где A — постоянная, определяемая из дополнительного условия

$$\eta \int_0^\infty y^+(t)\, \varepsilon_2(t)\, J_1(\eta t)\, dt = A,$$

то полученные в результате замены интегральные уравнения можно рассматривать в пространстве функций $L_2(0, \infty)$. Для норм интегральных операторов данных уравнений будет иметь место та же оценка (7), что и в случае магнитного диполя. Следовательно, когда кольцо узко по сравнению с диаметром и с длиной волны, полученные уравнения можно также решать методом последовательных приближений.

Ограничиваясь первым приближением, для функции $y(s)$ получаем выражение

$$y(s) = -\eta \frac{\pi}{2} C_2 \frac{J_1(\eta s)}{s} \eta^2 \frac{\pi i}{4} C_3 \frac{J_2(\eta s)}{s} + O(\eta^4 \ln \eta),$$

где

$$C_2=\int_0^\infty g^2 H_0^{(1)}(g)\cos t\frac{z_0}{a}\,dt=-ia^3\left(\frac{d^2}{dz_0^2}+k^2\right)\frac{e^{ik\sqrt{a^2+z_0^2}}}{\sqrt{a^2+z_0^2}}.$$

При этом плотность поверхностного тока с точностью порядка $O(\eta^3\ln\eta)$ имеет вид

$$j^p_z=\eta\frac{c\varkappa p}{2\pi a^3}\sqrt{1-\frac{4z^2}{d^2}}\left(C_2+C_3\frac{z}{2a}\right)=-i\eta\frac{c\varkappa}{2\pi}\sqrt{1-\frac{4z^2}{d^2}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{z}{2}\frac{d}{dz_0}\right)\tilde{E}_z^{0p}.$$

Здесь $C_3=-a\dfrac{d}{dz_0}C_2$ и $\tilde{E}_z^{0p}$ — z-составляющая электрического вектора поля источника при $z=0$, $\rho=a$. Отсюда следует, что в первом приближении фаза тока опережает фазу $\tilde{E}_z^{0p}$ на $\dfrac{\pi}{2}$.

Из представления (10) получим составляющие поля в дальней зоне:

$$E^{1p}_{\theta}\underset{r\to\infty}{=}H^{1p}_{\varphi}=\frac{2ip}{a^2}\varkappa^2\sin\theta\, y(\varkappa\cos\theta)J_0(\varkappa\sin\theta)\frac{e^{ikr}}{r}+o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$E^{1p}_r\underset{r\to\infty}{=}0\left(\frac{1}{r}\right);\quad E^{1p}_{\varphi}=H^{1p}_{\theta}=H^{1p}_r=0.$$

Распределение интенсивности излучения по углам в первом приближении определяется формулой

$$I^p=\eta^4\frac{\pi c\varkappa^4p^2}{32a^4}|C_2|^2\sin^2\theta\, J_0^2(\varkappa\sin\theta)\left[1+O(\eta^2\ln\eta)\right].$$

Отсюда видно, что с уменьшением ширины кольца интенсивность излучения убывает пропорционально четвертой степени отношения $\dfrac{d}{a}$, причем максимальное значение ее, как и в случае магнитного диполя, достигается при $z_0=0$.

Полученные результаты показывают, что узкое кольцо значительно лучше рассеивает поле, возбуждаемое продольным магнитным диполем, чем таким же электрическим (интенсивность излучения убывает с уменьшением ширины кольца пропорционально $\ln^{-2}\eta$ и η^4 соответственно). Осциллирующий характер зависимости дифракционных характеристик от длины волны также сильнее выражен в случае магнитного диполя.

При малых $\varkappa$ (большие длины волн) диаграммы рассеяния в обоих случаях близки между собой и приближенно описываются функцией $\sin^2\Theta$. При $\varkappa \gg 1$ диаграммы рассеяния существенно различны, хотя общим для них является отсутствие излучения вдоль оси диполя.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегральные операторы уравнений для определения $\tilde{x}^{\pm}(s)$ имеют вид

$$K_i f(s) = \eta^2 s^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1(t)\, dt \int_0^1 \xi J_1(\eta s\xi) J_i(\eta t\xi)\, d\xi \quad (i=0,1).$$

Заменяя $\varepsilon_1(t)$ на $\varepsilon_2(t)$ и полагая $i=1$, получаем интегральный оператор уравнений, соответствующих функциям $\tilde{y}^{\pm}(s)$.

Используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье-Бесселя и неравенство Шварца, находим

$$\|K_i f(s)\|^2 = \int_0^\infty |K_i f(s)|^2 ds = \eta^4 \int_0^\infty dss \int_0^1 d\xi\xi J_i(\eta s\xi) \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{1}{2}} \varepsilon(t) \times$$

$$\times J_i(\eta t\xi) dt|^2 = \eta^2 \int_0^\infty dyy \left| \int_0^\infty \xi J_i(y\xi)\, \psi_i(\xi)\, d\xi \right|^2 = \eta^2 \int_0^\infty |\psi_1(u)|^2 u du =$$

$$= \eta^2 \int_0^1 duu \left| \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{1}{2}} \varepsilon(t) J_i(\eta tu)\, dt \right|^2 \leqslant \|f\|^2 \eta^2 \int_0^1 duu \int_0^\infty t |\varepsilon(t)|^2 J_i^2(\eta tu) dt.$$

Здесь

$$\psi_i(\xi) = \begin{cases} \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{1}{2}} \varepsilon(t) J_i(\eta t\xi)\, dt, & 0 \leqslant \xi \leqslant 1; \\ 0, & \xi > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{K}_i\| \leqslant \eta \left[\int_0^1 duu \int_0^\infty t |\varepsilon(t)|^2 J_1^2(\eta tu)\, dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая явный вид функции $\varepsilon_{1,2}(t)$ и оценивая оставшиеся интегралы, нетрудно получить неравенство (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А., Левин М. Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн.— ЖТФ, 1944, т. 14, № 9, с. 481—506.
2. Фиалковский А. Т. Рассеяние плоской электромагнитной волны на тонком цилиндрическом проводнике конечной длины.— ЖТФ, 1966, т. 36, № 10, с. 1744—1751.

3. Williams W. E. Diffraction by a cylinder of finite length. — Proc. Camb. Philos. Soc., 1956, vol. 52, p. 322—335.
4. Капица П. Л., Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины, ч. 1, 2.— ЖТФ, 1959, т. 29, № 10, с. 1188—1205; ЖТФ, 1967, т. 37, № 7, с. 1181—1188.
5. Као С. С. Electromagnetic scattering from a finite tubular cylinder. Part 1, 2.— J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 12, p. 4732—4740; Radio Science, 1970, vol. 5, No. 3, p. 617—624.
6. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования.— ЖВММФ, 1971, т. 11, № 4, с. 837—854.