УДК 621.372.8

В. М. УШАКОВ, Н. А. ХИЖНЯК, д-р физ.-мат. наук

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА ОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассеяние электромагнитных волн на одном тонком цилиндре в прямоугольном волноводе рассматривалось в ряде работ [1, 2 и др.]. Определенный интерес представляет случай, когда число таких цилиндров очень велико. Подобные системы могут найти применение в качестве эффективных замедляющих систем приборов СВЧ и длинных линейных ускорителей. Если цилиндры сегнетокерамические или ферритовые, то возникает возможность управления фазовой скоростью волны в волноводе с помощью статических полей. В то же время малые поперечные размеры цилиндров обусловливают малые потери мощности в системе.

Постановка задачи

Пусть в прямоугольном волноводе, заполненном изотропной средой с проницаемостями ε_1 и μ_1, вдоль его оси при $z \geqslant 0$ расположены эквидистантные эллиптические цилиндры, параллельные узкой стенке волновода. Координаты центра этих цилиндров x_0, y_0, $z_l = lz_0$, где $l = 0, 1, 2, \ldots,$ — номер цилиндра. Расстояние между ними z_0 порядка длины волны в волноводе $\lambda_в$. Электромагнитные свойства цилиндров характеризуются произвольными тензорами $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Наибольший поперечный размер цилиндров b предполагается малым по сравнению с $\lambda_в$

$$(b/\lambda_в) \ll 1, \tag{1}$$

что позволяет ограничиться при расчетах лишь дипольным взаимодействием между ними.

Из области $z<0$ падает электромагнитная волна $\sim e^{i\omega t}$. Необходимо найти постоянную распространения нагруженной части волновода и амплитуды полного и отраженного полей.

Одиночный цилиндр в волноводе

В общем случае потенциалы Герца, определяющие рассеянные поля, равны:

$$\begin{aligned}
\vec{\Pi}^{э}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}_{вн}(\vec{r}\,')\, f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)\, d\vec{r}\,', \\
\vec{\Pi}^{м}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}_{вн}(\vec{r}\,')\, f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)\, d\vec{r}\,',
\end{aligned} \tag{2}$$

где

V — объем рассеивающего тела;

$\vec{E}_{вн}$, $\vec{H}_{вн}$ — внутренние поля;

$f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ — функция, определяемая уравнением

$$\Delta f(|\vec{r}-\vec{r}'|)+k^2\varepsilon_1\mu_1 f(|\vec{r}-\vec{r}'|)=-4\pi\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|) \qquad (3)$$

и удовлетворяющая граничным условиям на поверхности волновода.

Так как размеры цилиндра по оси y не удовлетворяют соотношению (1), будем решать следующую эквивалентную исходной задачу; на бесконечный цилиндр, находящийся между металлическими плоскостями, падают две плоские волны, получающиеся в результате разложения волноводных гармоник поля:

$$\vec{E}_0(\vec{r})=\vec{E}_0(\vec{\rho})e^{\pm ik_y y};\ \vec{H}_0(\vec{r})=\vec{H}_0(\vec{\rho})e^{\pm ik_y y} \qquad (4)$$

Решением уравнения (3) с учетом граничных условий на бесконечных плоскостях является диагональная матричная функция со следующими элементами:

$$f_{11}^{э}=\frac{2\pi i}{d}\sum_m\frac{1}{\xi_z}[\cos k_x x_0\cos k_x x]\,H_0^{(2)}(\gamma_n|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|);$$

$$f_{22}^{э}=\frac{2\pi i}{d}\sum_m\frac{1}{\xi_z}[\sin k_x x_0\sin k_x x]\,H_0^{(2)}(\gamma_n|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|); \qquad (5)$$

$$f_{33}^{э}=f_{11}^{м}=f_{22}^{э};\ f_{22}^{м}=f_{33}^{м}=f_{11}^{э},$$

где

$$\gamma_n=\sqrt{k^2\varepsilon_1\mu_1-k_x^2};\ k_x=m\pi/d;$$

$$Z(z-z_l)=\xi e^{-i\beta_{mn_z}(z-z_l)}-\zeta e^{i\beta_{mn_z}(z-z_l)}.$$

Коэффициенты ξ и ζ равны 1 или 0 в зависимости от расположения точки наблюдения по отношению к рассеивающим телам.

Поле внутри цилиндра будет иметь по y зависимость типа (4). Подставляя (4) и (5) в выражение (2) и интегрируя для m-й гармоники поля по y в бесконечных пределах, получаем компоненты векторов Герца для каждой экспоненциальной зависимости (4). Складывая по принципу суперпозиции одноименные компоненты векторов Герца, получаем искомые величины. Компонент $\Pi_x^{э}$ имеет вид

$$\Pi_x^{э}=\frac{i}{k_z d}\cos k_x x_0\cos k_x x\sin k_y y\,Z(z-z_l)\times$$
$$\times\int_S\left[\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}_{вн}(\vec{\rho}')\right]_x d\vec{\rho}'.$$

Возвращаясь к прямоугольному волноводу и удовлетворяя граничным условиям на его широких стенках, получаем $\bar{k}_y=n\pi/h$.

Компоненты электрического и магнитного векторов Герца представим таким образом:

$$\Pi_\alpha^{э}=d_{1\alpha}f_{1\alpha};\ \Pi_\alpha^{м}=d_{2\alpha}f_{2\alpha}, \qquad (6)$$

где

$$\vec{d}_1=\frac{1}{2\pi}\int_S\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}_{вн}(\vec{\rho}')\,d\vec{\rho}'=\hat{g}\vec{E}_{пад};$$

$$\vec{d}_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}_{\text{вн}}(\vec{\rho}')\, d\vec{\rho}' = \hat{p}\,\vec{H}_{\text{пад}}$$

— дипольные моменты рассеивающего тела;

S — площадь поперечного сечения цилиндра;

$\hat{g}$, $\hat{p}$ — матрицы рассеяния;

$\vec{E}_{\text{пад}}$, $\vec{H}_{\text{пад}}$ — падающее на цилиндр поле;

$$f_{1x} = \frac{2\pi i}{d}\sum_{mn}\frac{1}{\beta_{mn}}[\cos k_x x_0 \cos k_x x \sin k_y y]\, Z(z - z_l);$$

$$f_{1y} = \frac{2\pi i}{d}\sum_{mn}\frac{1}{\beta_{mn}}[\sin k_x x_0 \sin k_x x \cos k_y y]\, Z(z - z_l);$$

$$f_{1z} = \frac{2\pi i}{d}\sum_{mn}\frac{1}{\beta_{mn}}[\sin k_x x_0 \sin k_x x \sin k_y y]\, Z(z - z_l); \tag{7}$$

$$f_{2z} = \frac{2\pi i}{d}\sum_{mn}\frac{1}{\beta_{mn}}[\cos k_x x_0 \cos k_x x \cos k_y y]\, Z(z - z_l);$$

$$f_{2x} = f_{1y};\ f_{2y} = f_{1x};\ \beta_{mn} = \sqrt{k^2\varepsilon_1\mu_1 - k_x^2 - k_y^2}.$$

Периодическая цепочка цилиндров в волноводе

При решении этой задачи воспользуемся общими положениями работы [3], в которой рассмотрена полубесконечная цепочка эллипсоидов в прямоугольном волноводе. В итоге получаем формально те же уравнения, связывающие компоненты полного среднего поля в волноводе, однако теперь матрицы, входящие в них, будут иными. Эта система уравнений имеет вид

$$f^{\text{э}}_{i,mn} E^i_{mn}(0)\, e^{-i\psi_0 l} = f^{\text{э}}_{i,mn} E^i_{mn0}\, e^{-i\beta_{mn} z_0 l} + \{[(P_{mn})_{ik}\, g_{kr}\, A_{rp} - ik\mu_1 \times$$
$$\times (Q_{mn})_{ik}\, p_{kr}\, C_{rp}]\sum_{m'n'} f^{\text{э}}_{p'm'n'} E^p_{m'n'}(0) + [(P_{mn})_{ik}\, g_{kr}\, B_{rp} - ik\mu_1 (Q_{mn})_{ik} \times$$
$$\times p_{kr}\, D_{rp}]\sum_{m'n'} f^{\text{м}}_{p,m'n'} H^p_{m'n'}(0)\}\left[\frac{e^{-i\beta_{m'n'} z_0 l}}{1 - e^{-i(\psi_0 - \beta_{m'n'} z_0)}} + e^{-i\Psi_0 l} \times\right.$$
$$\left.\times\left(1 + \frac{i\sin\Psi_0}{\cos\Psi_0 - \cos\beta_{m'n'} z_0}\right)\right]; \tag{8}$$

$$f^{\text{м}}_{i,mn} H^i_{mn}(0)\, e^{-i\Psi_0 l} = f^{\text{м}}_{i,mn} H^i_{mn0}\, e^{-i\beta_{mn} z_0 l} + \{[(R_{mn})_{ik}\, p_{kr}\, C_{rp} + ik\varepsilon_1 \times$$
$$\times (S_{mn})_{ik}\, g_{kr}\, A_{rp}]\sum_{m'n'} f^{\text{э}}_{p,m'n'} E^p_{m'n'}(0) + [(R_{mn})_{ik}\, p_{kr}\, D_{rp} +$$
$$+ ik\varepsilon_1 (S_{mn})_{ik}\, g_{kr}\, B_{rp}]\sum_{m'n'} f^{\text{м}}_{p,m'n'} H^p_{m'n'}(0)\} \times$$
$$\times\left[\frac{e^{-i\beta_{m'n'} z_0 l}}{1 - e^{-i(\Psi_0 - \beta_{m'n'} z_0)}} + e^{-i\Psi_0 l}\left(1 + \frac{i\sin\Psi_0}{\cos\Psi_0 - \cos\beta_{m'n'} z_0}\right)\right].$$

Временная зависимость, одинаковая для всех полей, опущена. Здесь в роли переменной z выступает номер рассеивающего тела l, ближайшего к рассматриваемой точке; $f_{i,m}$ — значения собственных функций волновода в центре цилиндра; Ψ_0 — фазовый сдвиг среднего поля между двумя соседними цилиндрами; E_{mn0}, H_{mn0} — амплитуды падающего поля; $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ и $\hat{S}$ связывают рассеянное цилиндром поле с его дипольными моментами (6) и определяются функциями (7); $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ определяют возбуждающее тело поле через полное среднее поле в этой точке.

Число этих уравнений равно числу гармоник поля, для которых величина β_{mn} вещественна. Система (8) распадается на две группы независимых уравнений, поскольку переменная l входит в виде множителей $\exp(-i\,\Psi_0 l)$ и $\exp(-i\beta_{mn} z_0 l)$. Первая группа уравнений, содержащих слагаемые, пропорциональные $\exp(-i\Psi_0 l)$, позволяет найти дисперсионное уравнение нагруженного волновода. Вторая группа уравнений, слагаемые которых пропорциональны $\exp(-i\beta_{mn} z_0 l)$, определяет амплитуды полей в волноводе через соответствующие амплитуды падающей волны.

H_{10} — волна в волноводе с цепочкой ферритовых цилиндров, подмагниченных вдоль своей оси

Магнитная проницаемость цилиндра в этом случае задается тензором:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -i\alpha \\ 0 & \mu_з & 0 \\ i\alpha & 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Подставляя в (6) внутреннее поле цилиндра [4] и тензор (9), получаем матрицы $\hat{g}$ и $\hat{p}$, ненулевые элементы которых

$$g = \frac{S(\varepsilon - \varepsilon_1)}{2\pi\varepsilon_1}; \quad p_{11} = \frac{S}{2\pi(a+b)\mu_1^2\Delta^{м}}\{(\mu-\mu_1)[(a\mu + b\mu_1)\times$$
$$\times\cos^2\varphi + (b\mu + a\mu_1)\sin^2\varphi] - \alpha^2(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)\}; \tag{10}$$

$$p_{13} = \frac{S}{2\pi(a+b)\mu_1^2\Delta^{м}}\{[(\mu-\mu_1)^2 - \alpha^2](a-b)\sin\varphi\cos\varphi -$$
$$- i\alpha\,\mu_1(a+b)\};$$

$$p_{31} = p_{13}^*;\ p_{33} = \frac{S}{2\pi(a+b)\mu_1^2\Delta^{м}}\{(\mu-\mu_1)[(a\mu + b\mu_1)\sin^2\varphi +$$
$$+ (b\mu + a\mu_1)\cos^2\varphi] - \alpha^2(a\sin^2\varphi + b\cos^2(\varphi)\},$$

где a, b — полуоси эллипса;

φ — угол между большой полуосью b и осью волновода z;

$$\Delta^{\text{м}} = \frac{(a\mu + b\mu_1)(b\mu + a\mu_1) - \alpha^2 ab}{(a+b)^2 \mu_1^2}.$$

Первая группа уравнений системы (8) имеет вид

$$f_y^{\text{э}}(1 - \Delta_{11}\Psi) E^y(0) - f_x^{\text{м}}\Delta_{12}\Psi H^x(0) - f_z^{\text{м}}\Delta_{13}\Psi H^z(0) = 0;$$

$$-f_y^{\text{э}}\Delta_{21}\Psi E^y(0) + f_x^{\text{м}}(1 - \Delta_{22}\Psi) H^x(0) - f_z^{\text{м}}\Delta_{23}\Psi H^z(0) = 0;$$

$$-f_y^{\text{э}}\Delta_{31}\Psi E^y(0) - f_x^{\text{м}}\Delta_{32}\Psi H^x(0) + f_z^{\text{м}}(1 - \Delta_{33}\Psi) H^z(0) = 0,$$

где

$$\Psi = 1 + \frac{i \sin \Psi_0}{\cos \Psi_0 - \cos \beta z_0}; \quad \Delta_{11} = gP_{22}/A;$$

$$\Delta_{12} = -\frac{P_{22}}{Ak\varepsilon_1}(\beta p_{11} + ik_x p_{31} \operatorname{ctg} k_x x_0);$$

$$\Delta_{13} = -\frac{P_{22}}{Ak\varepsilon_1}(\beta p_{13} + ik_x p_{33} \operatorname{ctg} k_x x_0); \qquad (11)$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{\beta}{k\mu_1}\Delta_{1p}; \qquad \Delta_{3p} = \frac{ik_x}{k\mu_1} \operatorname{ctg} k_x x_0 \Delta_{1p};$$

$$A = 1 + \frac{P_{22}}{k^2\varepsilon_1\mu_1}[gk^2\varepsilon_1\mu_1 + \beta^2 p_{11} + k_x^2 p_{33} \operatorname{ctg}^2 k_x x_0 + i\beta k_x (p_{31} -$$

$$- p_{13}) \operatorname{ctg} k_x x_0]; \quad P_{22} = \frac{2\pi i\, k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{d\beta} \sin^2 k_x x_0.$$

Здесь и далее опущен индекс основной моды колебаний.

Данная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равняется нулю. Из этого условия получаем дисперсионное уравнение нагруженного волновода:

$$\cos \Psi_0 = \cos \beta z_0 + i(A-1) \sin \Psi_0. \qquad (12)$$

Выражение, стоящее в скобках, $\sim S/d\ \lambda_{\text{в}}$ и является малой возмущающей величиной. Поэтому, если $\sin \beta z_0 \neq 0$, то решение уравнения (12) можно записать так:

$$\Psi_0 = \beta z_0 + \delta, \text{ где } \delta \ll \beta z_0.$$

Из (12) получаем для δ следующее выражение:

$$\delta = i(A-1) = \frac{2\pi}{d\beta}[gk^2\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 k_x x_0 + \beta^2 p_{11} \sin^2 k_x x_0 +$$

$$+ k_2^x p_{33} \cos^2 k_x x_0 + \frac{i\beta k_x}{2}(p_{31} - p_{13}) \sin 2k_x x_0.$$

Отсюда следует, что нагрузка волновода периодической цепочкой тонких ферритовых цилиндров приводит к изменению фазовой скорости волны, которое зависит от внешнего подмагничивающего поля. Это изменение невелико и по порядку величины равно $S/d\lambda_в$, однако на больших расстояниях суммарное изменение фазы волны может быть значительно.

Для определения амплитуд полного поля служит вторая группа уравнений системы (8), которая с использованием (11) выглядит следующим образом:

$$f_y^э \Delta_{11} E^y(0) + f_x^м \Delta_{12} H^x(0) + f_z^м \Delta_{13} H^z(0) = BE_0^y;$$

$$f_y^э \Delta_{21} E^y(0) + f_x^м \Delta_{22} H^x(0) + f_z^м \Delta_{23} H^z(0) = BH_0^x;$$

$$f_y^э \Delta_{31} E^y(0) + f_x^м \Delta_{32} H^x(0) + f_z^м \Delta_{33} H^z(0) = BH_0^z;$$

где $B = e^{-i(\Psi_0 - \beta z)_0} - 1$.

Эта система является линейно-зависимой, так как компоненты поля связаны соотношениями для однородного волновода. Решая ее с учетом того, что $\delta \ll \beta z_0$, получаем

$$E^y(0) = (1 - i\delta) E_0^y.$$

Полное поле в точке $z = lz_0$ найдем по теореме Флоке:

$$E^y(z) = (1 - i\delta) E_0^y e^{-i\Psi_0 l}.$$

Рассеянное l-м цилиндром поле, согласно [3], можно представить так:

$$\vec{E}_{расс}(\vec{r}) = \hat{P}(\vec{r}, \vec{r}_l)\, g(\hat{A}\vec{E} + \hat{B}\vec{H}) - ik\mu_1 \hat{Q}(\vec{r}, \vec{r}_l)\, p(\hat{C}\vec{E} + \hat{D}\vec{H});$$

$$\vec{H}_{расс}(\vec{r}) = \hat{R}(\vec{r}, \vec{r}_l)\, p(\hat{C}\vec{E} + \hat{D}\vec{H}) + ik\varepsilon_1 \hat{S}(\vec{r}, \vec{r}_l)\, g(\hat{A}\vec{E} + \hat{B}\vec{H}).$$

Просуммировав найденное отсюда рассеянное поле по всем цилиндрам, получаем отраженную волну

$$E_{отр}^y = -\frac{\pi i}{d\beta \sin \beta z_0}[gk^2 \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 k_x x_0 - \beta^2 p_{11} \sin^2 k_x x_0 +$$

$$+ k_x^2 p_{33} \cos^2 k_x x_0 + \frac{i\beta k_x}{2}(p_{31} + p_{13}) \sin 2k_x x_0] E_0^y e^{i\beta(z+z_0)}. \quad (13)$$

Коэффициент отражения имеет величину порядка $S/d\lambda_в$ и сдвиг по фазе, равный βz_0. При $z_0 = n\lambda_в/2$, $\sin \beta z_0 = 0$ и в волноводе устанавливается режим стоячих волн.

Для круглых цилиндров выражения (10) значительно упрощаются. Подставив их в (13), получаем коэффициент отражения от цепочки круглых цилиндров:

$$\eta = -\frac{\pi i a^2}{d\beta \sin\beta z_0}\left[k^2 \varepsilon_1 \mu_1 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) \sin^2 k_x x_0 + \frac{\mu^2 - \mu_1^2 - \alpha^2}{(\mu + \mu_1)^2 - \alpha^2} \times\right.$$

$$\left.\times (k_x^2 \cos^2 k_x x_0 - \beta^2 \sin^2 k_x x_0)\right]. \quad (14)$$

Если ε или $\mu^2-\alpha^2/\mu$ имеют большую величину, то внутри тела длина волны может оказаться соизмеримой с его поперечными размерами. При этом выражение (14) остается прежним, если ε, μ и α заменить на их эффективные значения. Используя результаты работ [5, 6], получаем

$$\varepsilon_{эфф}=\varepsilon\frac{2I_1(x)}{xI_0(x)};\quad \mu_{эфф}=\frac{\mu(\mu^2-\alpha^2)}{\mu^2-\alpha^2F^2(x)}F(x);$$

$$\alpha_{эфф}=\frac{\alpha(\mu^2-\alpha^2)}{\mu^2-\alpha^2F^2(x)}\quad F^2(x),$$

где $F(x)=\dfrac{2I_1(x)}{x[I_0(x)-I_2(x)]}$; $\quad x=ka\sqrt{\varepsilon(\mu^2-\alpha^2)/\mu}$;

$I_n(x)$— функция Бесселя n-го порядка. При данной ориентации цилиндров относительно стенок волновода в системе могут иметь место лишь магнитные резонансы, определяемые условием $\mu_{эфф}+\mu_1=\alpha_{эфф}$. Коэффициент отражения принимает бесконечно большие значения.

Дисперсионное уравнение (12) справедливо и в случае нагрузки волновода резонансными цилиндрами, однако величину, стоящую в скобках, уже нельзя считать малой. В этом случае решение уравнения (12) можно представить в виде

$$\cos\Psi_0=\frac{\cos\beta z_0\pm\sqrt{\delta^4+\delta^2\sin^2\beta z_0}}{1+\delta^2}.$$

В чисто резонансном случае $\delta\to\infty$ и в волноводе устанавливается стоячая волна.

Положив в (13) $\alpha=0$, получаем случай изотропных цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Epstein P. S., Berk A. D. Ferrite post in a rectangular wave guide.— «J. Appl. Phys.», 1956, vol. 27, No. 11, p. 1328—1335.
2. Никольский В. В. Расчет фазовых сдвигов гиротропных неоднородностей в волноводе методом возмущения.— «Радиотехника и электроника», 1957, т. 2, № 7, с. 833—842.
3. Хижняк Н. А. Теория волноводов, нагруженных полубесконечной цепочкой однородных рассеивающих тел. — Сб. «Радиотехника». Вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970, с. 3—12.
4. Гал Л. К., Хижняк Н. А. Рассеяние электромагнитных волн тонким бесконечно длинным металлическим стержнем эллиптического сечения. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, т. 14, № 10, с. 1596—1610.
5. Левин И. Л. Современная теория волноводов. М., ИЛ, 1954, 216 с.
6. Никольский В. В. Простейший случай дифракции плоской волны на гиротропном цилиндре. — «Радиотехника и электроника», 1958, т. 3, № 6, с. 756—759.