УДК 621.396.67

Я. С. ШИФРИН, д-р техн. наук

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ АТМОСФЕРЫ НА ТОЧНОСТЬ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

Получено выражение для дисперсии угловых ошибок фазового пеленгатора в зависимости от статистических характеристик поля падающей волны (дисперсии и радиуса корреляции фазовых флюктуаций) и геометрии пеленгатора (размеров антенн и их разноса). Приведены графики, позволяющие оценить величину ошибки при заданной статистике поля и размерах пеленгатора. Показано, что наибольшая ошибка имеет место при «точечных» антеннах.

Как известно, в фазовых системах угловая координата цели θ определяется по разности фаз сигналов $\Delta\varphi$, принятых двумя разнесенными антеннами (рис. 1):

$$\sin\theta = \frac{\Delta\varphi}{kd}, \tag{1}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число;

d — база.

Выражение (1) можно рассматривать как градуировочное соотношение фазового пеленгатора. При наличии флюктуаций фазы поля в падающей волне, обусловленных неоднородностями атмосферы, разность фаз сигналов $\Delta\varphi$ от цели, находящейся на направлении, нормальном к базе, оказывается не равной нулю. В соответствии с соотношением (1) величина $\Delta\varphi$ определяет ошибку $\Delta\theta$ в определении угловых координат.

Представляет интерес найти величину ошибки $\Delta\theta$ в зависимости от статистических характеристик падающей волны (дисперсии α и радиуса корреляции ρ фазовых флюктуаций) и параметров пеленгатора (величины базы d и размера антенн h). Для малых («точечных») антенн задача решается элементарно.

Действительно, учитывая, что в этом случае

$$\overline{(\Delta\varphi)^2} = \overline{(\varphi_1 - \varphi_2)^2} = 2\alpha[1 - r(d)],$$

где r — коэффициент корреляции фазовых флюктуаций, и по-

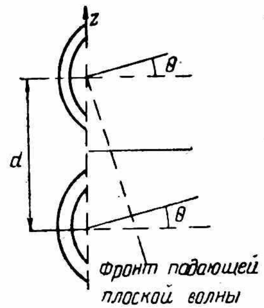

Рис. 1.

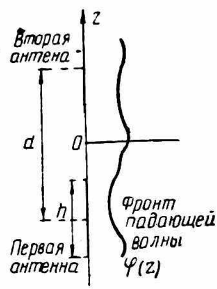

Рис. 2.

лагая флюктуации фазы малыми, находим сразу дисперсию ошибок:

$$\overline{(\Delta\theta)^2} = \frac{2\alpha[1 - r(d)]}{k^2 d^2}. \qquad (2)$$

Если $d \ll \rho$, то

$$r(d) \cong 1 + r''(0)\frac{d^2}{2}^{*},$$

$$\overline{(\Delta\theta)^2} = -\frac{\alpha r''(0)}{k^2}. \qquad (3)$$

Более сложными оказываются расчеты в общем случае — при необходимости учета конечных размеров антенн. Это исследование и составляет содержание настоящей статьи.

Рассматривается фазовый пеленгатор, состоящий из двух линейных антенн длиною h. Центры этих антенн разнесены на расстояние d. На систему падает волна, прошедшая неоднородную атмосферу (рис. 2). Фазовый фронт волны описывается случайной функцией $\varphi(z)$. Флюктуации амплитуды в падающей волне для простоты анализа учитывать не будем. Амплитудное

* Для реальных случайных процессов $r'(0) = 0$.

распределение примем равномерным. Тогда сигналы на выходе первой и второй антенн

$$R_1 e^{j\varphi_1} = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{d-L}{2}} e^{j\varphi(z)}\, dz, \qquad R_2 e^{j\varphi_2} = \int\limits_{\frac{d-L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{j\varphi(z)}\, dz.$$

$(L = d + h)$.

Перейдем к новой переменной $x = \dfrac{2z}{L}$

При этом

$$R_1 e^{j\varphi_1} = \frac{L}{2}\int\limits_{-1}^{-a} e^{j\varphi(x)}\, dx, \quad R_2 e^{j\varphi_2} = \frac{L}{2}\int\limits_{a}^{1} e^{j\varphi(x)}\, dx,$$

где
$$a = \frac{d-h}{L} = \frac{d-h}{d+h}.$$

Полагая фазовые флуктуации малыми, находим

$$\varphi_1 = \frac{\int\limits_{-1}^{-a} \varphi(x)\, dx}{1-a}, \quad \varphi_2 = \frac{\int\limits_{a}^{1} \varphi(x)\, dx}{1-a}$$

и соответственно

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\int\limits_{a}^{1} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{-1}^{-a} \varphi(x)\, dx}{1-a}.$$

Дисперсия разности фаз

$$\overline{(\Delta\varphi)^2} = \frac{2\alpha}{(1-a)^2}\left[\int\limits_{a}^{1}\!\!\int r\, dx\, dx_1 - \int\limits_{-1}^{-a}\int\limits_{a}^{1} r\, dx\, dx_1\right]. \tag{4}$$

Входящие в соотношение (4) интегралы вычислены в приложениях. При этом коэффициент корреляции $r = \dfrac{\overline{\varphi(x)\,\varphi(x_1)}}{\alpha}$ выбран в гауссовой форме: $r = e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}$, где $c = \dfrac{2\rho}{L}$ — радиус корреляции в относительных единицах.

Подставляя приведенные в приложении выражения в (4) и используя далее соотношение (1), получаем окончательно следующее выражение для дисперсии угловой ошибки:

$$\overline{(\Delta\theta)^2} = \frac{\overline{(\Delta\varphi)^2}}{k^2 d^2} = \frac{1}{k^2 d^2}\frac{2\alpha}{(1-a)^2}\left\{\sqrt{\pi}\, C(1-a)\,\Phi\left(\frac{1-a}{c}\right) - c^2 \times \right.$$
$$\times\left[1 - e^{-\frac{(1-a)^2}{c^2}}\right] - \sqrt{\pi}c\left[\Phi\left(\frac{2}{c}\right) - \Phi\left(\frac{1+a}{c}\right)\right] - \sqrt{\pi}\, ac\left[\Phi\left(\frac{2a}{c}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \Phi\left(\frac{1-a}{c}\right)\right] - \frac{c^2}{2}\left[e^{-\frac{4a^2}{c^2}} + e^{-\frac{4}{c^2}}\right] + c^2 e^{-\frac{(1+a)^2}{c^2}}\right\}. \tag{5}$$

Величину ошибки удобно нормировать к значению ее, соответствующему «точечным» антеннам. Используя соотношения (5) и (2), получаем

$$\frac{\overline{(\Delta\theta)^2}}{(\Delta\theta)^2_{h=0}} = \frac{1}{(1-a)^2\left[1-e^{-\frac{(1+a)^2}{c^2}}\right]}\left\{\sqrt{\pi}\,c\,(1-a)\,\Phi\left(\frac{1-a}{c}\right) - c^2\left[1-e^{-\frac{(1-a)^2}{c^2}}\right] - \sqrt{\pi}\,c\left[\Phi\left(\frac{2}{c}\right)-\Phi\left(\frac{1+a}{c}\right)\right] - \sqrt{\pi}\,ac\left[\Phi\left(\frac{2a}{c}\right) - \Phi\left(\frac{1+a}{c}\right)\right] - \frac{c^2}{2}\left[e^{-\frac{4a^2}{c^2}}+e^{-\frac{4}{c^2}}\right]+c^2e^{-\frac{(1+a)^2}{c^2}}\right\} = \eta(a,c). \qquad (6)$$

Коэффициент $\eta(a, c)$ характеризует влияние конечных раз-

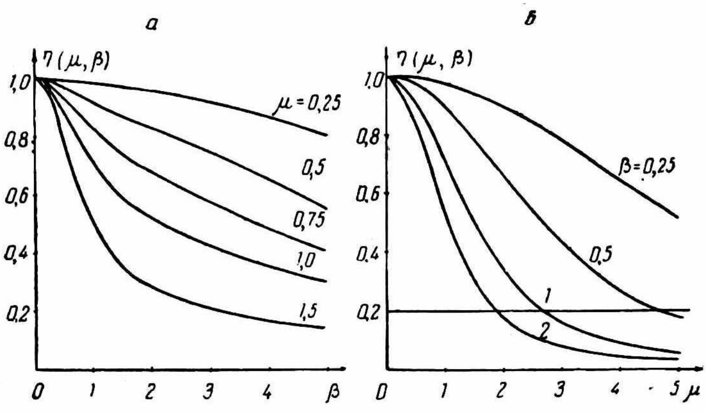

Рис. 3.

меров антенн пеленгатора на величину ошибки. Иногда удобнее вместо безразмерных параметров a и c использовать параметры

$$\mu = \frac{h^*}{d} \text{ и } \beta = \frac{d}{\rho}.$$

Замечая, что

$$c = \frac{2}{\beta(1+\mu)} \text{ и } a = \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

получаем из (6)

$$\eta(a, c) = \eta(\mu, \beta) = \frac{1}{1-e^{-\beta^2}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\mu\beta}\,\Phi(\mu, \beta) - \frac{1-e^{-\mu^2\beta^2}}{\mu^2\beta^2} - \right.$$

* Обычно $h \leqslant d$ (т. е. $\mu \leqslant 1$), однако возможны системы, у которых $d < h$ ($\mu > 1$).

$$-\frac{\sqrt{\pi}(1+\mu)}{2\mu^2\beta}\left[\Phi[\beta(1+\mu)]-\Phi(\beta)\right]-\frac{\sqrt{\pi}(1-\mu)}{2\mu^2\beta}\left[\Phi[\beta(1-\mu)]-\right.$$

$$\left.-\Phi(\beta)\right]-\frac{1}{2\mu^2\beta^2}\left[e^{-\beta^2(1-\mu)^2}+e^{-\beta^2(1+\mu)^2}\right]+\frac{1}{\mu^2\beta^2}e^{-\beta^2}\Bigg\}. \qquad (7)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если $h\to 0$, то величина $a\to 1$, а $\mu\to 0$. При этом величина $\eta(a,c)=\eta(\mu,\beta)\to 1$.

Если $\rho\gg L$, то $c\gg 1$ и $\beta\ll 1$. При этом $\eta\to 1$.

Если $\rho\ll L$, то $c\ll 1$; $\mu\beta\gg 1$ и $\eta\to 0$.

В общем случае необходимо рассчитать η по формулам (6) или (7).

Результаты расчета этой величины для ряда значений μ и β приведены на рис. 3. Как видно из рисунка, $\eta<1$. Максимальная ошибка соответствует случаю «точечных» антенн. При увеличении антенн пеленгатора ошибка уменьшается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Расчет интеграла $\int\limits_a^1\!\!\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}dx\,dx_1$

$$y=\frac{2}{1-a}\left[x-\frac{a+1}{2}\right],\quad y_1=\frac{2}{1-a}\left[x_1-\frac{a+1}{2}\right].$$

При этом

$$\int\limits_a^1\!\!\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}dxdx_1=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\int\limits_{-1}^1\!\!\int e^{-\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2(y-y_1)^2}dydy_1=$$

$$=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 I(c_1,0,0),$$

где $c_1=\frac{2c}{1-a}$, $I(c_1,0,0)=\int\limits_{-1}^1\!\!\int e^{-\frac{(y-y_1)^2}{c_1^2}}dydy_1$,

вычисленный и протабулированный в работе [1]* интеграл

$$I(c_1,0,0)=2\sqrt{\pi}\,c_1\,\Phi\left(\frac{2}{c_1}\right)-c_1^2\left[1-e^{-\frac{4}{c_1^2}}\right].$$

---

* Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. М., «Сов. радио», 1970, с. 382.

Учитывая, что $c_1 = \frac{2c}{1-a}$, окончательно получаем

$$\int_a^1\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}} dx dx_1 = \sqrt{\pi} c(1-a)\Phi\left(\frac{1-a}{c}\right) - c^2\left[1 - e^{-\frac{(1-a)^2}{c^2}}\right].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Расчет интеграла $\int_{-1}^{-a}\int_a^1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}} dx\, dx_1$

Переходя от x и x_1 к новым переменным x, $-x_1$ и далее к переменным x, $y = \frac{x+x_1}{2}$, получаем

$$\int_{-1}^{-a}\int_a^1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}} dx dx_1 = \int_a^1\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}} dx\, dx_1 = c\int_a^1 dx \int_{\frac{x+a}{c}}^{\frac{x+1}{c}} e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{c\sqrt{\pi}}{2}\int_a^1 \left[\Phi\left(\frac{x+1}{c}\right) - \Phi\left(\frac{x+a}{c}\right)\right] dx = I_1' - I_1''.$$

Рассмотрим интеграл вида $I_1 = \int_a^1 \Phi\left(\frac{x+b}{c}\right) dx$.

Переходя к новой переменной $z = \frac{x+b}{c}$, получаем

$$I_1 = \int_a^1 \Phi\left(\frac{x+b}{c}\right) dx = c\int_{\frac{a+b}{c}}^{\frac{1+b}{c}} \Phi(z)\, dz = c\left\{ z\Phi(z)\Big|_{\frac{a+b}{c}}^{\frac{1+b}{c}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a+b}{c}}^{\frac{1+b}{c}} z e^{-z^2} dz \right\} =$$

$$= c\left\{\left(\frac{1+b}{c}\right)\Phi\left(\frac{1+b}{c}\right) - \left(\frac{a+b}{c}\right)\Phi\left(\frac{a+b}{c}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{(1+b)^2}{c^2}} - e^{-\frac{(a+b)^2}{c^2}}\right]\right\}.$$

Используя эти выражения и полагая $b=1$ и $b=a$, находим интегралы I_1', I_1'' и окончательно для искомого интеграла получаем

$$\int\limits_{-1}^{-a}\int\limits_{a}^{1} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}\,dx\,dx_1=\sqrt{\pi}\,c\left[\Phi\left(\frac{2}{c}\right)-\Phi\left(\frac{1+a}{c}\right)\right]+$$

$$+\sqrt{\pi}\,ac\left[\Phi\left(\frac{2a}{c}\right)-\Phi\left(\frac{1+a}{c}\right)\right]+\frac{c^2}{2}\left[e^{-\frac{4a^2}{c^2}}+e^{-\frac{4}{c^2}}\right]-c^2 e^{-\frac{(1+a)^2}{c^2}}$$