

*Я. С. ШИФРИН*, д-р техн. наук,  
*Л. Г. КОРНИЕНКО*, канд. техн. наук

## **О ПРЕДЕЛЬНОМ УРОВНЕ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАЗОВЫМИ ОШИБКАМИ**

Как известно, для снижения уровня бокового излучения антенн используется спадающее к краям амплитудное распределение (АР). Изменяя характер АР, можно уменьшить боковые лепестки. Однако реально возможности снижения уровня боковых лепестков путем управления АР ограничиваются влиянием всегда имеющих место случайных ошибок в амплитудно-фазовом распределении. Эти ошибки создают «фон» бокового излучения, относительный уровень которого растет по мере отклонения амплитудного распределения от равномерного. Если номинальный

уровень боковых лепестков (в отсутствие ошибок) становится соизмеримым с «фоном», то дальнейшие попытки уменьшить боковое излучение путем изменения АР не приводят к желаемым результатам. Таким образом, случайные ошибки ограничивают минимально возможный уровень бокового излучения антенны.

Вопрос о предельном уровне боковых лепестков рассматривался в работах [1, 2].

В работе [1] исследовано влияние случайных ошибок на *средний* уровень боковых лепестков. Полученные при этом результаты, естественно, непригодны для оценки бокового излучения отдельно взятой антенны из ансамбля однотипных антенн.

В работе [2] исследуется предельный уровень боковых лепестков дольф-чебышевской антенной решетки. Предельный уровень определен в результате рассмотрения вероятностных характеристик амплитуды поля в направлении максимума *одного* из боковых лепестков ДН. Подобный подход является шагом вперед по сравнению с использованным в работе [1]. Однако и он не дает ответа о действительном уровне боковых лепестков антенны.

При наличии ошибок ДН антенны является случайной *функцией* угловых координат. Поэтому при анализе уровня боковых лепестков надо изучать не вероятность того, что ДН (амплитуда поля  $R(\psi)$ ) в каком-то одном направлении выйдет за фиксированный уровень (как это делается в работе [2]), а вероятность того, что *вся* ДН в определенном секторе  $\psi_1 - \psi_2$  не выйдет за определенный уровень, характеризуемый заданной кривой  $v(\psi)$ .

Решение этой задачи сводится к нахождению *функционала распределения* случайной функции  $R(\psi)$ , которым, по определению, называется вероятность выполнения неравенства  $R(\psi) \leq v(\psi)$  в заданном секторе углов, т. е.

$$P_R [v(\psi)] = P[R(\psi) \leq v(\psi)], \quad \psi \in [\psi_1, \psi_2]. \quad (1)$$

Подобный подход к исследованию проблемы боковых лепестков, сформулированный впервые в работе [3], положен в основу исследования предельного уровня бокового излучения, проведенного в данной работе.

### Постановка задачи

Рассмотрим линейную эквидистантную решетку из  $2N$  изотропных излучателей с фазовыми ошибками  $\varphi_n$ . Комплексный множитель решетки описывается соотношением

$$f(\psi) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\psi n'} e^{j\varphi_n}, \quad (2)$$

где  $\psi = kd \sin \theta$ ;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $n' = n - 0,5 \frac{n}{|n|}$ ;

$d$  — пространственный период решетки;

$a_n = \frac{A_n}{\sum A_n}$  — амплитудное распределение, нормированное так, что  $|f_0(0)| = 1$ .

Индекс «0» здесь и далее обозначает соответствующие величины в отсутствие ошибок. Заметим, что в отсутствие ошибок решетка предполагается синфазной.

Будем далее считать фазовые ошибки распределенными нормально со средним значением  $\bar{\varphi}_n = 0$  и дисперсией  $\overline{\varphi_n^2} = \sigma_n^2$ , определяемой механизмом происхождения ошибок. Ошибки в элементах решетки полагаем независимыми.

В соответствии со сказанным выше уровень боковых лепестков решетки характеризуется функционалом  $P_R$ , определяемым соотношением (1). Схема вычисления функционала изложена в работе [3]. Имея выражения для  $P_R$ , можно сформулировать две задачи: прямую и обратную.

Прямая задача состоит в вычислении  $P_R$  при заданном амплитудном распределении (номинальном уровне боковых лепестков) и заданной статистике ошибок. Примеры решения прямой задачи для равномерного амплитудного распределения приведены в [3].

Обратная задача может быть сформулирована по-разному, в зависимости от того, что мы хотим определить — уровень  $\nu(\psi)$ , амплитудное распределение  $a_n$  или статистику ошибок. Во всех случаях значение функционала  $P_R$  считается заданным.

При исследовании предельного уровня боковых лепестков наиболее естественной является следующая постановка задачи. Амплитудное распределение принимается дольф-чебышевским. Уровень  $\nu(\psi) = \text{const} = \nu_c$ . Такой выбор  $\nu(\psi)$  представляется разумным, если учесть, что при дольф-чебышевском амплитудном распределении все боковые лепестки в отсутствие ошибок имеют одинаковый уровень  $F_{6.л.}$ .

При выбранных АР и  $\nu(\psi)$  обратная задача может быть сформулирована так. Значение функционала  $P_R$  задано. Необходимо при известной статистике ошибок и принимаемом уровне номинальных боковых лепестков  $F_{6.л.}$ , найти такое значение  $\nu_c$ , при котором значение функционала равно  $P_R$ . Уровень  $\nu_c$  будем называть далее статистическим уровнем боковых лепестков. Определяя величину  $\nu_c$  для различных значений  $F_{6.л.}$ , получаем зависимость  $\nu_c = \nu_c(F_{6.л.})$ , которая позволит определить предельно возможный уровень боковых лепестков.

Приступим к решению этой задачи.

Следуя методике работы [3], найдем выражение для функционала распределения ДН решетки при произвольном амплитудном распределении. Предварительно исследуем корреляционные свойства поля решетки.

## Корреляционные свойства поля

Флюктуации комплексного поля описываются выражением

$$\Delta f(\psi) = f(\psi) - \overline{f(\psi)} = \sum_n a_n \cdot e^{i\varphi_n} [e^{i\varphi_n} - g_n(1)], \quad (3)$$

где черта сверху обозначает операцию усреднения,  $g_n(u) = \overline{\exp(iu\varphi_n)}$  — одномерная характеристическая функция.

При малых нормально распределенных фазовых ошибках флюктуации поля также распределены нормально. Поэтому для исчерпывающего описания случайной функции  $\Delta f(\psi)$  достаточно изучить корреляционную матрицу

$$K(\psi, \psi_1) = \begin{vmatrix} K_x(\psi, \psi_1) & K_{xy}(\psi, \psi_1) \\ K_{yx}(\psi, \psi_1) & K_y(\psi, \psi_1) \end{vmatrix} \quad (4)$$

где  $K_x, K_y$  — корреляционные функции действительной и мнимой частей  $\Delta f(\psi)$  соответственно;

$K_{xy}, K_{yx}$  — взаимные корреляционные функции.

Если рассмотреть функции

$$K_1(\psi, \psi_1) = \overline{\Delta f(\psi) \Delta f^*(\psi_1)} \quad \text{и} \quad K_2(\psi, \psi_1) = \overline{\Delta f(\psi) \Delta f(\psi_1)}, \quad (5)$$

то

$$K_{x,y} = 0,5 \operatorname{Re}(K_1 \pm K_2), \quad K_{xy(y,x)} = 0,5 \operatorname{Im}(K_2 \pm K_1).$$

Следовательно, изучение корреляционной матрицы  $K$  сводится к изучению функций  $K_1$  и  $K_2$ . Величина  $K_1$  представляет собой корреляционную функцию флюктуаций комплексного поля.

При независимости флюктуаций фазы в излучателях решетки

$$K_{1,2}(\psi, \psi_1) = \sum_{n=-N}^N a_n^2 \gamma_n^\pm e^{in(\psi \pm \psi_1)}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_n^+ = 1 - |g_n(1)|^2, \quad \gamma_n^- = g_n(2) - g_n^2(1).$$

Из соотношения (6) следует, что выражения для корреляционной функции комплексного поля  $K_1$  и функции  $K_2$  с независимыми ошибками имеют тот же вид, что и ДН решетки с амплитудным распределением  $a_n^2 \gamma_n^\pm$  и аргументами  $(\psi - \psi_1)$  и  $(\psi + \psi_1)$  соответственно.

Этот вывод при  $\gamma_n = \text{const}$  согласуется с теоремой Ван-Циттерта-Цернике для частично когерентного света [4].

Заметим, что сказанное выше остается справедливым при любом законе распределения и произвольной величине фазовых ошибок в случае независимости их в излучателях и большом числе последних. Тогда  $K_{1,2}$  описываются соотношением (6),

а нормальный закон распределения  $\Delta f(\psi)$  следует из центральной предельной теоремы.

На основании соотношения (6) можно сделать следующие выводы.

1. Для симметричных  $a_n$  и  $\gamma_n$  функции

$$K_{1,2}(\psi, \psi_1) = 2 \sum_{n=1}^N a_n^2 \gamma_n^{\pm} \cos n'(\psi \mp \psi_1) \quad (7)$$

являются действительными. Это означает, что взаимные корреляционные функции  $K_{xy(y,x)} = 0$  и

$$K_{x,y}(\psi, \psi_1) = 0,5 [K_1 \pm K_2]. \quad (8)$$

2. При  $\psi = \psi_1$

$$K_1(\psi, \psi) = 2 \sum_n a_n^2 \gamma_n^+, \quad K_2(\psi, \psi) = 2 \sum_n a_n^2 \gamma_n^- \cos 2n'\psi.$$

Если  $\psi$  расположено вне главного лепестка ДН с достаточно низким уровнем боковых лепестков, то  $|K_1(\psi, \psi)| \gg |K_2(\psi, \psi)|$  и дисперсии реальной и мнимой частей флюктуаций поля, согласно (8), примерно одинаковы:

$$K_{x,y}(\psi, \psi) = \sigma_{x,y}^2 = 0,5 K_1(\psi, \psi) = \sum_n a_n^2 \gamma_n^+ \quad (9)$$

и не зависят от обобщенного угла  $\psi$ .

3. Поскольку интервал (в терминах  $\psi$ ) между максимумами соседних боковых лепестков имеет порядок полуширины (по нулям) главного лепестка ДН, флюктуации поля в соседних боковых лепестках можно считать некоррелированными, а так как флюктуации поля распределены нормально, то и независимыми.

4. При малых фазовых ошибках\* в симметричных относительно  $\psi = 0$  точках нормированные корреляционные функции

$$r_x(\psi, -\psi) = K_x(\psi, -\psi) [K_x(\psi, \psi) K_x(-\psi, -\psi)]^{-\frac{1}{2}} = -1, \\ r_y(\psi, -\psi) = 1,$$

т. е. флюктуации поля в точках  $\psi$  и  $-\psi$  связаны линейной зависимостью. Эта связь вытекает также из соотношения

$$\Delta f(\psi) = j \sum_n a_n e^{j\psi n'} \varphi_n = -\Delta f^*(-\psi). \quad (10)$$

Приведенные результаты позволяют перейти далее к расчету функционала распределения ДН (1).

\* В этом случае  $\gamma_n^{\pm} = \sigma_n^2$ .

## Функционал распределения ДН

Чтобы определить приближенное значение функционала, следует рассчитать вероятность совместного осуществления ряда независимых событий, каждое из которых состоит в том, что  $|f(\psi_k)| \leq v_c$ . Значения  $\psi_k$  целесообразно выбрать равными значениям  $\psi$ , соответствующим положению максимумов боковых лепестков в отсутствие ошибок.

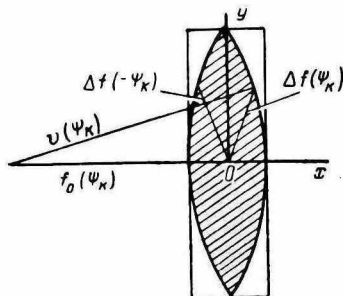


Рис. 1.

Случайная величина  $f(\psi_k)$  представляет собой сумму вещественной неслучайной величины  $f_0(\psi_k)$  и случайной комплексной величины  $\Delta f(\psi_k)$ . Требование, чтобы случайная величина  $|f(\psi_k)|$  в точках  $\pm k_k$  одновременно не превышала  $v_c$ , определяет некоторую область  $G$  допустимых значений величины  $\Delta f(\psi_k)$ . Границы области  $G$ , построенные с учетом соотношения (10), показаны на рис. 1 (заштрихованная область). Вероятность того, что  $|f(\psi_k)|$  попадет в эту область, будет

$$P_k = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_G \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right] dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2} \iint_G \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) dx dy,$$

где

$$\sigma^2 = K_1(\psi, \psi) = 2 \sum_{n=1}^N a_n^2 \gamma_n^+ \quad (11)$$

— дисперсия флюктуаций поля.

Для приближенного определения этой вероятности примем в качестве области интегрирования вместо  $G$  прямоугольник, в который «вписана» область  $G$ . Тогда

$$P_k = \Phi\left[\frac{\sqrt{v_c^2 - f_0^2(\psi_k)}}{\sigma}\right] \Phi\left[\frac{v_c - f_0(\psi_k)}{\sigma}\right], \quad (12)$$

где  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  — интеграл вероятности, подробные таблицы которого приведены в [5]. Так как для дольф-чебышевского  $APf_0(\psi_k) = F_{6.л}$ , то величина  $P_k$  для любой симметричной пары боковых лепестков одинакова.

Если  $M$  — число пар боковых лепестков, входящих в заданный сектор углов, то функционал распределения ДН

$$P_R[v_c] = \prod_{k=1}^M P_k = (P_1)^M. \quad (13)$$

Если в заданный сектор  $\psi_1 - \psi_2$  входит  $M$  пар боковых лепестков и еще  $m$  боковых лепестков, то

$$P_R = \prod_{k=1}^M P_k \prod_{i=1}^m P_{oi}, \quad (13a)$$

где  $P_{oi}$  — вероятность того, что в  $i$ -м боковом лепестке амплитуда поля не превысит значения  $v_c$ .

Для определения этой вероятности нужно знать закон распределения амплитуды поля в максимуме боковых лепестков. Поскольку  $f(\psi_i) = f_0(\psi_i) + X(\psi_i) + jY(\psi_i)$  и  $X, Y$  — независимые нормально распределенные случайные величины, то  $|f(\psi_i)|$  распределено по обобщенному закону Релея. Значит,

$$P_{oi} = \int_0^{v_c} \frac{2x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{f_0^2(\psi_i) + x^2}{\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{2f_0(\psi_i)x}{\sigma^2}\right] dx = 1 - Q(y, A), \quad (14)$$

где  $Q(y, A) = \int_y^\infty t \exp\left[-\frac{A^2 + t^2}{2}\right] I_0(At) dt$  — табулированная

в [6] функция;  $y = \frac{\sqrt{2} v_c}{\sigma}$ ;  $A = \frac{\sqrt{2} f_0(\psi)}{\sigma}$ .

Вероятность  $P_{oi}$ , так же, как и  $P_k$ , для дольф-чебышевского АР не зависит от номера бокового лепестка. Поэтому окончательное выражение для функционала (13a) имеет вид

$$P_R = (P_1)^M (P_{oi})^m. \quad (15)$$

### Статистический уровень боковых лепестков

Сектор углов, в пределах которого нас интересует статистический уровень боковых лепестков, считаем симметричным, состоящим из  $M$  пар боковых лепестков.

Тогда

$$\Phi \left\{ \sqrt{\left(\frac{v_c}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{F_{б.л.}}{\sigma}\right)^2} \right\} \Phi \left\{ \frac{v_c}{\sigma} - \frac{E_{б.л.}}{\sigma} \right\} \sqrt{P_R}^M. \quad (16)$$

Полагая дисперсию фазовых ошибок равномерной  $\sigma_n^2 = \sigma_0^2$ , из соотношения (11), получаем

$$\sigma^2 = 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^N a_n^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum_{n=1}^N A_n^2}{2(\sum A_n)^2}. \quad (17)$$

Сомножитель при  $\sigma_0^2$  в выражении (17) определяет чувствительность антенны к случайным ошибкам [7].

Задавая значениями  $F_{б.л.}$  (или  $A_n$  [8]) и  $\sigma_0^2$ , по формуле (17) найдем  $\sigma^2$ , а затем из (16) — величину  $v_c$ . На рис. 2,а приведены результаты расчета  $v_c$  как функции  $F_{б.л.}$  для решетки из  $2N=8$  излучателей с фазовыми ошибками  $\sigma_0=0,25$ . Кривые 1, 2 рассчитаны при  $P_R=0,99$ , кривые 3, 4 — при  $P_R=0,5$ . Для кривых 2, 4 величина  $M=1$ , для кривых 1, 3  $M=3$ , т. е. сектор углов охватывает все боковые лепестки ДН. Числа, приведенные справа кривых указывают величину статистического уровня боковых лепестков при биномиальном амплитудном распределении, для которого  $F_{б.л.} = 0$ .

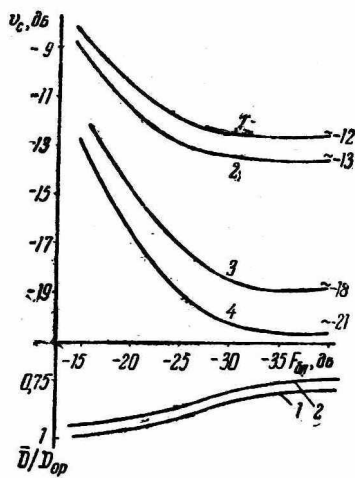


Рис. 2.

Из рис. 2 видно, что с уменьшением номинального уровня боковых лепестков статистический уровень медленно уменьшается и достигает предельного значения  $v_{пр}$ . Так, при  $P_R=0,5$  и  $M=3$   $v_{пр} \approx -19$  дБ. Это означает, что для 50% антенн ансамбля уровень боковых лепестков при  $\sigma_0=0,25$  меньше — 19 дБ получить не удастся. Предельное значение достигается при  $F_{б.л.} = -35$  дБ.

В области  $v_{пр}$  статистический уровень изменяется незначительно. Поэтому целесообразно «остановиться» в начале этой области, поскольку с уменьшением  $F_{б.л.}$  увеличивается снижение КНД. Это видно из рис. 2, на котором приведены графики зависимости  $D/D_{ор}$  (кривая 2) и  $D_0/D_{ор}$  (кривая 1) от



$F_{6.л}$ ;  $D$ ,  $D_0$  — средний КНД и КНД в отсутствие ошибок;  $D_{ор}$  — КНД в отсутствие ошибок при равномерном амплитудном распределении. Рис. 2 позволяет подойти к выбору целесообразного значения для  $F_{6.л}$ .

Возвратимся к рис. 2. Статистический уровень боковых лепестков, найденный при  $M=1$  и 3, заметно отличается.

Очевидно эти отличия будут расти с увеличением числа боковых лепестков в ДН антенны. Поэтому по данным расчета  $v_c$  для одной пары боковых лепестков или тем более для одного бокового лепестка нельзя судить о действительном уровне бокового излучения антенны, который находим на основании функционала распределения ДН, как это сделано выше.

Рис. 2 показывает далее, что в области предельного уровня боковых лепестков и правее ее  $F_{6.л} \ll v_c$ . При этом вместо соотношения (16) имеем значительно более простое соотношение

$$\Phi\left(\frac{v_{пр}}{\sigma}\right) = \sqrt[2M]{P_R}, \quad (18)$$

где среднеквадратичное значение флюктуаций поля  $\sigma$  определяется выражением (17).

Из (18) имеем

$$v_{пр} = c\sigma = c\sigma_0 \frac{[\sum_n A_n^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \sum_n A_n}. \quad (19)$$

Здесь  $c$  — величина, полученная из таблиц [5] для интеграла вероятности  $\Phi$  при заданном значении  $\sqrt[2M]{P_R}$ . Соотношение (19) показывает, что предельный уровень боковых лепестков  $v_{пр}$  определяется чувствительностью антенны к случайным ошибкам. Последняя, в свою очередь, определяется  $F_{6.л}$ , т. е. амплитудным распределением в системе.

При  $M \gg 1$  и немалом  $P_R$  величина  $\sqrt[2M]{P_R} \approx 1$ , при этом  $c \gg 1$ . Следовательно, предельный уровень боковых лепестков заметно больше величины флюктуаций поля  $\sigma$  и пропорционален среднеквадратическому значению фазовых ошибок  $\sigma_0$ .

Итак, в настоящей работе исследовался предельный уровень боковых лепестков для дольфо-чебышевского АР. Очевидно, что подобное исследование может быть проведено и для других типов АР, например, для АР типа «косинус на пьедестале» [9], позволяющего получить номинальный уровень боковых лепестков до 40 дБ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин З. А., Минкович Б. И. О точности воспроизведения амплитудных распределений у антенн СВЧ. — «Труды ХВАИВУ». Вып. 237. Харьков, 1961, с. 19—25.

2. Лейко Н. С., Маяцкий В. И. О статистических свойствах диаграммы направленности и выборе номинальных параметров дольф-чебышевских решеток.—Сб. «Антенны». Вып. 12. М., 1971, с. 3—12.
3. Шифрин Я. С. Корреляционные характеристики поля линейной антенны.—«Радиотехника и электроника», 1961, т. VI, № III, с. 1846.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970, с. 551—557.
5. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1959, с. 249—351,
6. Таблицы распределения Релея-Райса. М., ВЦ АН СССР, 1964. 248 с. Авт.: Л. С. Барк, Л. Н. Большев, Л. Н. Кузнецов и др.
7. Gilbert E., Morgan S. Optimum design of directive antenna arrays subject to random variations. — «Bell. Syst. Techn. J.». 1955, v. 34, No 3, p. 637—663,
8. Кириллов Л. Г. Таблицы коэффициентов возбуждения (токов) и определение некоторых параметров дольф-чебышевских решеток.—Сб. «Антенны». Вып. 3. М., 1968, с. 49—61.
9. Эллиот Р. М. Общая теория антенных решеток.—Сб. «Сканирующие антенные системы СВЧ», Т. II. М., 1969, с. 9—100.