УДК 621.396.67

В. А. УСИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Для некоторых схем построения антенных решеток (АР) характерно наличие периодических фазовых ошибок [1, 2]. В ряде случаев они случайны. В связи с этим представляет интерес исследование воздействия этих ошибок на параметры АР.

Рассмотрим линейную эквидистантную решетку, состоящую из $N=2MK$ элементов ($2M$ — число секций, K — число элементов в одной секции). Комплексный множитель системы излучателей запишем в виде*

$$f(\theta)=\sum_{s=-M}^{M}\sum_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda}\, e^{ikz_{s\lambda}\sin\theta+i\varphi_{s\lambda}}, \tag{1}$$

где $a_{s\lambda}$, $\varphi_{s\lambda}$ — амплитуда и фаза возбуждения λ-го элемента s-й секции;

k — волновое число;

$z_{s\lambda}$ — расстояние от начала координат до λ-го элемента s-й секции.

Если амплитудное распределение симметричное и элементы возбуждены синфазно, то поле в отсутствие ошибок

$$f_0(\psi)=\sum_{s}\sum_{\lambda} a_{s\lambda}\cos\psi_{s\lambda},$$

где

$$\psi_{s\lambda}=\psi z_{s\lambda},\quad \psi=k\sin\theta. \tag{2}$$

Считаем, что фазы возбуждения элементов $\psi_{s\lambda}$ являются случайными величинами

$$\varphi_{s\lambda}=x_{s\lambda}\,\delta, \tag{3}$$

где $x_{s\lambda}$ — случайная величина, принимающая значения $-P$, $-(P-1)$ ... P с вероятностью $1/2P+1$;

$\delta=\dfrac{\Delta}{2P}$ — константа;

Δ — интервал распределения ошибок.

В дальнейшем будем различать два случая:

I. $\varphi_{s\lambda}$ независимы в пределах всей антенны.

II. Случайные фазовые ошибки $\varphi_{s\lambda}$ являются независимыми в пределах одной секции, периодическими по секциям $\varphi_{|s|\lambda}=\varphi_\lambda$ и противоположными по знаку относительно начала координат $\varphi_{-|s|\lambda}=-\varphi_\lambda$.

---

* В дальнейшем суммирование в пределах (1) будем обозначать $\sum\limits_{s}\sum\limits_{\lambda}$.

Заметим, что запись фазовых ошибок в форме (3) позволяет анализировать как системы с дискретными ошибками, так и с непрерывными, равномерно распределенными в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$. Последний случай характерен для АР со специальным способом фазирования элементов [4]. Для получения характеристик АР в случае непрерывно распределенных ошибок в окончательных результатах необходимо сделать предельный переход при $P \to \infty$.

Средняя ДН по мощности

Используя (1) и (3), для средней ДН по мощности можно получить следующие выражения (индексами I, II обозначены соотношения для случаев независимых и периодических фазовых ошибок):

$$\overline{|f(\psi)|^2_{\mathrm{I}}} = f_0^2(\psi) h^2(P, \Delta) + [1 - h^2(P, \Delta)] \sum_s \sum_\lambda a^2_{s\lambda}; \tag{4}$$

$$\overline{|f(\psi)|^2_{\mathrm{II}}} = f_0^2(\psi) h^2(P, \Delta) + 2 \sum_{s=1}^{M} \sum_{p=1}^{M} \sum_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda} a_{p\lambda} \{\cos(\psi_{s\lambda} - \psi_{p\lambda}) \times$$

$$\times [1 - h^2(P, \Delta)] + \cos(\psi_{s\lambda} + \psi_{p\lambda})[h(P, 2\Delta) - h^2(P, \Delta)], \tag{4a}$$

где

$$h(P, \Delta) = \overline{e^{i\varphi_{s\lambda}}} = \frac{1}{2P+1} \frac{\sin \frac{(2P+1)}{4P} \Delta}{\sin \frac{\Delta}{4P}}. \tag{5}$$

Выражение (4) подобно выражению, описывающему среднюю ДН линейной антенны с нормально распределенными фазовыми ошибками [5]. Роль дисперсии фазовых ошибок в выражении (4) играет величина

$$\sigma^2_{\text{эфф1}} = 1 - h^2(P, \Delta). \tag{6}$$

В случае малых фазовых ошибок величина $\sigma^2_{\text{эфф1}}$ совпадает с дисперсией ошибок (рис. 1), т. е.

$$1 - h^2(P, \Delta) \approx \sigma^2_{\text{ф}}, \quad \sigma^2_{\text{ф}} = \frac{\Delta^2 (P+1)}{12P}. \tag{7}$$

Для равномерно распределенных ошибок

$$h(\Delta) = \lim_{P \to \infty} h(P, \Delta) = \frac{\sin \Delta/2}{\Delta/2}.$$

Выражение для средней ДН по мощности в этом случае имеет вид

$$\overline{|f(\psi)|^2_{\rm I}} = f_0^2(\psi)\,\frac{\sin^2\Delta/2}{(\Delta/2)^2} + \left[1 - \frac{\sin^2\Delta/2}{(\Delta/2)^2}\right]\sum_s\sum_\lambda a_{s\lambda}^2. \qquad (8)$$

Соотношение (8) совпадает с полученным в [2] выражением для средней ДН при независимых в элементах, равномерно распределенных в интервале (—Δ/2, Δ/2) фазовых ошибках.

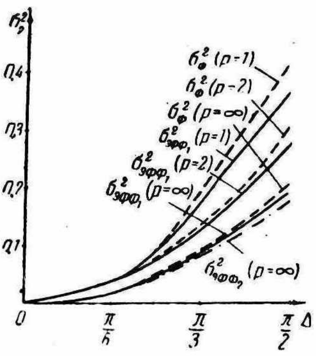
Рис. 1.

Дисперсия флюктуаций поля $|\overline{\Delta f(\psi)}|^2$ для системы с независимыми фазовыми ошибками представляет собой постоянный фон (вторые слагаемые в (4), (8)). Если ошибки периодические, дисперсия флюктуаций поля обладает направленными свойствами (второе слагаемое в (4а)). При этом для малых ошибок флюктуации мощности излучения в направлении главного максимума $\psi = 0$ отсутствуют.

Соотношения (4), (4а) позволяют рассчитать среднюю ДН и дисперсию флюктуаций поля, задаваясь амплитудным распределением, геометрией системы и характером распределения фазовых ошибок.

Так, для малых ошибок

$$\sigma^2_{\text{эфф1}} = 1 - h^2(P, \Delta) \approx \sigma^2_{\text{ф}}, \quad \sigma^2_{\text{эфф2}} = h^2(P, \Delta) - h(P, 2\Delta) \approx \sigma^2_{\text{ф}}. \quad (9)$$

Если амплитудное распределение при этом равномерное ($a_{s\lambda} = 1$), выражение (4а) преобразуется к виду

$$\overline{|f(\psi)|^2_{\rm II}} = f_0^2(\psi)(1 - \sigma^2_{\text{ф}}) + 2\sigma^2_{\text{ф}}\,\frac{\sin^2\dfrac{\psi N z_э}{4}}{\sin^2\dfrac{\psi K z_э}{2}}\left[K - \frac{\sin\psi K z_э}{\sin\psi z_э}\cos\frac{\psi N z_э}{2}\right], \qquad (8а)$$

где $z_э$ — расстояние между элементами АР*.

В соответствии с выражением (8а) дисперсия флюктуаций поля является функцией обобщенного угла ψ. Для значений

* Заметим, что выражение (8а) отличается от выражения для средней ДН, полученного в [3] (где рассматривался случай периодически коррелированных фазовых ошибок) наличием множителя в квадратных скобках у второго слагаемого (8а). Это отличие вызвано тем, что в нашем случае фазовые ошибки в секциях жестко связаны.

угла $\psi_u = \frac{2\pi U}{K z_э}, u = \pm 1, \pm 2, \ldots$ средняя ДН имеет паразитные боковые лепестки [3], уровень которых составляет

$$F_п = 10 \lg \frac{\sigma_ф^2 M}{N} \ дб. \qquad (10)$$

При фиксированной длине антенны N уровень паразитных лепестков $F_п$ и угловое расстояние между ними $\Delta\psi_u = 2\pi / K z_э$ определяются величиной периода фазовых ошибок $K z_э$. С уменьшением числа периодов фазовых ошибок — числа секций АР ($2M$) — угловое расстояние между паразитными лепестками уменьшается, сами паразитные боковые лепестки также становятся меньше. В предельном случае, когда фазовые ошибки независимы на всей АР, паразитные боковые лепестки исчезают — выражение (4). Характер распределения фазовых ошибок (дискретно распределенные или непрерывные) сказывается лишь на величине дисперсии $\sigma^2_{эфф1}$ и не влияет на вид средней ДН для независимых фазовых ошибок (4). В случае периодических фазовых ошибок влияние характера распределения их становится существенным лишь для больших величин $\sigma_ф^2$, когда нельзя полагать выполненным равенство (9) и вытекающее из него $\sigma^2_{эфф1} = \sigma^2_{эфф2}$.

Средний КНД

Получим выражения для снижения среднего КНД. Исходным является соотношение [5]

$$\Delta_к = 1 - \frac{\bar{D}}{D_0},$$

где

$$\bar{D} = \frac{2k\overline{|f(0)|^2}}{\int\limits_{-k}^{k} \overline{|f(\psi)|^2}\, d\psi} \qquad (11)$$

Используя полученные выше выражения для средних ДН (4) и (4а), нетрудно получить величину снижения КНД для рассматриваемых случаев

$$\Delta_{кI} = 1 - \frac{1 - \sigma^2_{эфф1} + \alpha\sigma^2_{эфф1}}{1 - \sigma^2_{эфф1} + \alpha D_0 \sigma^2_{эфф1}}, \quad \alpha = \frac{\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a^2_{s\lambda}}{f_0^2(0)}; \qquad (12а)$$

$$\Delta_{кII} = 1 - \frac{f_0^2(0)\, h^2(P,\Delta) + 2(\sigma^2_{эфф1} - \sigma^2_{эфф2}) \sum\limits_{s=1}^{M} \sum\limits_{p=1}^{M} \sum\limits_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda} a_{p\lambda}}{f_0^2(0)\, h^2(P,\Delta) + 2D_0 \sum\limits_{s=1}^{M} \sum\limits_{p=1}^{M} \sum\limits_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda} a_{p\lambda} \left[\sigma^2_{эфф1} \times \frac{\sin k(z_{s\lambda} - z_{p\lambda})}{k(z_{s\lambda} - z_{p\lambda})} - \sigma^2_{эфф2} \frac{\sin k(z_{s\lambda} + z_{p\lambda})}{k(z_{s\lambda} + z_{p\lambda})} \right]}. \qquad (12б)$$

Для равномерного амплитудного распределения из (12) получим

$$\Delta_{\kappa I} = \sigma^2_{\text{эфф}1} - \frac{\sigma^2_{\text{эфф}1}}{N}. \tag{13}$$

Выражение (13) в точности совпадает с выражением для снижения КНД, полученным в [5]. Роль дисперсии фазовых ошибок играет величина $\sigma^2_{\text{эфф}1}$. При большом числе излучателей ($N \gg 1$) снижение КНД составляет

$$\Delta_{\kappa I} = \sigma^2_{\text{эфф}1}.$$

Если амплитудное распределение равномерное и расстояния между элементами кратны $\lambda/2$, то для II случая получим

$$\Delta_{\kappa II} = \sigma^2_{\text{эфф}1} - \frac{\sigma^2_{\text{эфф}1} - \sigma^2_{\text{эфф}2}}{N} M. \tag{13а}$$

Для малых ошибок $\sigma^2_{\text{эфф}1} = \sigma^2_{\text{эфф}2}$ и из (13) и (13а) следует, что периодический характер ошибок приводит к большему снижению КНД. Однако, если число элементов в секции АР $K \gg 1$, то снижение КНД в обоих случаях одинаково и определяется величиной $\sigma^2_{\text{эфф}1}$. График снижения КНД в этом случае совпадает с графиком $\sigma^2_{\text{эфф}1}$ (рис. 1).

Зависимость снижения КНД $\Delta_{\kappa I}$ и $\Delta_{\kappa II}$ от характера распределения фазовых ошибок (дискретные или непрерывные) такая же, как и зависимость средней ДН по мощности (п. 2).

Флюктуации направления главного максимума

Рассмотрим случай малых фазовых ошибок. Учитывая малость ψ, разлагаем $|f(\psi)|^2 = R^2$ в ряд по степеням ψ. Дифференцируя и приравнивая нулю производную $\frac{dR^2}{d\psi} = 0$, получаем

$$\psi_{\text{м}} = \frac{\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a_{s\lambda} z_{s\lambda} \varphi_{s\lambda}}{\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a_{s\lambda} z^2_{s\lambda}} = - \frac{\delta \sum\limits_s \sum\limits_\lambda a_{s\lambda} z_{s\lambda} x_{s\lambda}}{\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a_{s\lambda} z^2_{s\lambda}}. \tag{14}$$

Полученное выражение аналогично выражению для флюктуаций направления главного максимума в случае нормально распределенных ошибок [5]. Если $K \gg 1$, то в силу центральной предельной теоремы закон распределения случайной величины $\psi_{\text{м}}$ нормальный. Среднее значение $\overline{\psi_{\text{м}}} = 0$. Дисперсия флюктуаций направления главного максимума для рассматриваемых случаев равна соответственно

$$\overline{\psi^2_{\text{м}I}} = \sigma^2_{\Phi} \frac{\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a^2_{s\lambda} z^2_{s\lambda}}{\left(\sum\limits_s \sum\limits_\lambda a_{s\lambda} z^2_{s\lambda}\right)^2}; \tag{15}$$

$$\overline{\psi_{\text{мII}}^2} = 4\sigma_\Phi^2 \frac{\sum\limits_{s=1}^{M} \sum\limits_{p=1}^{M}{}' \sum\limits_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda}\, a_{p\lambda}\, z_{s\lambda}\, z_{p\lambda}}{\left(\sum\limits_{s} \sum\limits_{\lambda}{}' a_{s\lambda}\, z_{s\lambda}^2\right)^2}. \tag{15а}$$

Из сравнения (15) и (15а) следует, что периодический характер фазовых ошибок приводит к увеличению дисперсии флюктуаций направления главного максимума.

Рассмотрим зависимость $\overline{\psi_{\text{м}}^2}$ от вида амплитудного распределения, которое зададим в виде

$$a_{s\lambda} = 1 - \gamma\,|z_{s\lambda}|,\ \ z_{s\lambda} = \left[K(s-1) + \lambda - \frac{1}{2}\right] z_э. \tag{16}$$

Считая, что число элементов $N \gg 1$; для величины $\overline{\psi_{\text{м}}^2}$ получаем следующее выражение

$$\overline{\psi_{\text{мI}}^2} = \sigma_\Phi^2 \frac{\frac{1}{3} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{5}}{2z_э \left(\frac{N}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{4}\right)^2}. \tag{17}$$

В выражении (17) $u = \gamma N z_э/2$ — уменьшение амплитуды последнего $\frac{N}{2}$-го элемента (рис. 2).

Если антенна состоит из двух секций ($2M = 2$), то, используя аппроксимацию амплитудного распределения в виде (16), получаем

$$\overline{\psi_{\text{мII}}^2} = \sigma_\Phi^2 \frac{\frac{1}{3} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{5}}{z_э^2 \left(\frac{N}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{4}\right)^2}. \tag{17а}$$

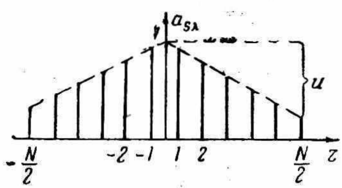

Рис. 2.

Рассмотрим случай $M \gg 1$. Для упрощения будем полагать, что амплитудное распределение по секциям ступенчатое, т. е.

$$a_{s\lambda} = a_s = 1 - \gamma\,|s|. \tag{18}$$

Положим также, что $K \gg 1$. Тогда

$$\overline{\psi_{\text{мII}}^2} = \sigma_\Phi^2 \frac{M\left(\frac{1}{2} - \frac{u_{\text{м}}}{3}\right)^2}{z_э^2 \left(\frac{N}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{u_{\text{м}}}{4}\right)^2}, \tag{17б}$$

где $u_{\text{м}} = \gamma M$ — уменьшение амплитуды возбуждения последней секции. Из рассмотрения выражений (17)—(17а) следует, что характер изменений $\overline{\psi^2_м}$ в зависимости от $\sigma^2_ф$, N одинаков для обоих случаев. Дисперсия флюктуаций направления главного максимума пропорциональна дисперсии ошибок. При увеличении длины антенны флюктуации уменьшаются. Зависимость $\overline{\psi^2_м}$ от вида амплитудного распределения приведена на рис. 3.

$$\left(1-\frac{\overline{\psi^2_{мII}}}{\sigma^2_ф}\cdot z_э\left(\frac{N}{2}\right)^3,\quad 2M=2;\right.$$

$$\left.2-\frac{\overline{\psi^2_{мI}}}{\sigma^2_ф}\cdot z_э\left(\frac{N}{2}\right)^3;\ 3-\frac{\overline{\psi^2_{мII}}}{2M\sigma^2_ф}\cdot z_э\left(\frac{N}{2}\right)^3\right).$$

Для спадающего амплитудного распределения дисперсия флюктуаций возрастает. У антенн с периодическими фазовыми ошибками дисперсия флюктуаций направления главного максимума примерно в $2M$ раз больше, чем у антенн с независимыми фазовыми ошибками. Как и в предыдущих случаях (п. 2 и п. 3) от характера распределения фазовых ошибок зависит лишь дисперсия ошибок $\sigma^2_ф$.

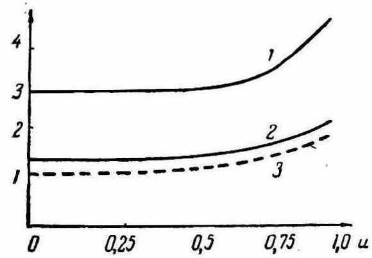

Рис. 3.

Расширение главного лепестка средней ДН

Рассмотрим случай малых фазовых ошибок. Используя (6), (6а) и (10), нормированные ДН можно записать (с точностью до членов порядка $\sigma^2_ф$) в виде

$$\overline{|F(\psi)|^2}=\frac{\overline{|f(\psi)|^2}}{\overline{|j(0)|^2}}=F^2_0(\psi)+\frac{\sigma^2_ф}{f^2_0(0)}V(\psi), \tag{19}$$

где

$$V(\psi)=\begin{cases}\sum\limits_s\sum\limits_\lambda a^2_{s\lambda}\,[1-F^2_0(\psi)]; & \text{I.}\\ 2\sum\limits_{s=1}^{M}\sum\limits_{p=1}^{M}\sum\limits_{\lambda=1}^{K} a_{s\lambda}\,a_{p\lambda}\,[\cos(\psi_{s\lambda}-\psi_{p\lambda})-\cos(\psi_{s\lambda}+\psi_{p\lambda})] & \text{II.}\end{cases}$$

Воспользовавшись далее методикой, приведенной в [5], нетрудно получить выражение для расширения главного лепестка средней ДН:

$$2\Delta\psi_I=(\psi_1-\psi_2)-2\psi_0=3{,}7\,\frac{\sigma^2_ф}{N^2 z_э}, \tag{20}$$

где $\psi_{1,2}$, ψ_0 — углы, соответствующие уровню половинной мощности ДН при наличии и отсутствии ошибок.

При выводе (20) амплитудное распределение полагалось равномерным и число элементов $N \gg 1$, так что ДН в области главного лепестка могла быть аппроксимирована выражением

$$F_0^2(\psi) = \left(\frac{\sin \frac{N\psi z_э}{2}}{\frac{N\psi z_э}{2}} \right)^2.$$

Для линейной антенны в случае малых ошибок и малых радиусов корреляции расширение главного лепестка средней ДН описывается выражением [5] $2\Delta\psi = 1{,}63 c\alpha$.
Для остронаправленных антенн

$$2\Delta\theta = 0{,}26 \frac{c\alpha\lambda}{L}, \qquad (21)$$

где c — относительный радиус корреляции;
α — дисперсия фазовых ошибок;
L — длина антенны.

Из выражения (20), используя (2), получаем

$$2\Delta\theta = 0{,}29 \frac{\sigma_ф^2 \lambda}{N^2 z_э}. \qquad (22)$$

Считая расстояние между элементами $z_э$ равным радиусу корреляции и учитывая, что длина антенны $L = Nz_э$, а относительный радиус корреляции $c = \frac{\Delta L}{L} = \frac{z_э}{Nz_э} = \frac{1}{N}$, можно выражение (22) переписать в виде

$$2\Delta\theta = 0{,}29 \frac{c\sigma_ф^2 \lambda}{L}$$

Последнее соотношение совпадает с аналогичной формулой для расширения средней ДН, полученной в работе [5] при нормально распределенных фазовых ошибках в линейной антенне.

Можно показать, что в случае периодических фазовых ошибок расширение главного лепестка средней ДН составляет

$$2\Delta\psi_{II} \simeq 3{,}7 \frac{\sigma_ф^2}{N^2 z_э} 2M. \qquad (20а)$$

Из уравнения (20) и (20а) следует, что периодический характер фазовых ошибок в АР приводит к расширению главного лепестка средней ДН пропорционально числу периодов фазовых ошибок $2M$. Последнее эквивалентно увеличению радиуса корреляции фазовых ошибок у линейной антенны с расстояния, равного расстоянию между элементами $z_э$, до величины $2Mz_э$ (при этом предполагается выполнение условия $\frac{2Mz_э}{Nz_э} = \frac{2Mz_э}{L} \ll 1$).

Итак, рассмотрение некоторых эффектов влияния периодических случайных фазовых ошибок на характеристики антенных решеток показало, что периодический характер фазовых ошибок приводит к появлению паразитных лепестков у средней ДН, величина и угловое положение которых зависит от периода ошибок. Флюктуации направления главного максимума и расширение главного лепестка средней ДН находятся в прямой зависимости от числа периодов фазовых ошибок, укладывающихся на АР. В меньшей степени периодический характер фазовых ошибок влияет на снижение КНД.

Автор глубоко благодарен профессору Я. С. Шифрину за постоянное внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерюгин Л. Н. Об эффективности секционирования сканирующих антенных решеток. — Сб. «Сканирующие антенны СВЧ». Под редакцией Л. Н. Дерюгина. М., «Машиностроение», 1964, с. 273—282.
2. Зимин Д. Б. Свойства антенн со ступенчатым фазовым распределением.— Сб. «Сканирующие антенны СВЧ». Под редакцией Л. Н. Дерюгина. М., «Машиностроение», 1964, с. 159—176.
3. Рудин В. Ю., Сазонов В. В. Статистика поля линейной антенной решетки при периодически коррелированных фазовых ошибках. — «Радиотехника», 1967, т. 22, № 2, с. 43—48.
4. О подавлении паразитных лепестков в ДН коммутационных антенных решеток. — «Радиотехника и электроника», 1971, т. XVI, вып. 7, с. 1268—1270. Авт.: Ф. А. Айзин, А. А. Долженков, Д. Б. Зимин и др.
5. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. М., «Советское радио», 1970, 383 с.