УДК 621.385.6

*Жураховский В. А.*, канд. физ.-мат. наук

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСРЕДНЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО РОТАТОРА ВНУТРИ ВОЛНОВОДА, ПОГРУЖЕННОГО В АДИАБАТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. Ч. II. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКИХ СКОРОСТЕЙ

В работе [1] рассмотрена нелинейная задача о винтовом движении электрона под действием плавно изменяющегося стационарного магнитного и дополнительного резонансного электромагнитного полей внутри волновода. Сформулирована усредненная по быстрому вращению система сглаженных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся характеристик движения, инвариантная относительно вида пространственной конфигурации направляющего адиабатического магнитного поля.

Содержанием настоящей работы является дальнейшее развитие темы и доведение указанной задачи до безразмерной формы с минимально возможным числом обобщенных параметров, как этого требуют известные методы численного решения, подразумевающие использование ЭВМ.

## Релятивистская масса и связанные с ней переменные характеристики гирорезонансного движения

Отправным пунктом настоящей работы является инвариантная система дифференциальных уравнений динамики электрона на возмущаемой винтовой траектории [1]:

$$\frac{dX}{dT}=\frac{\partial U}{\partial Y};\ \frac{dY}{dT}=-\frac{\partial U}{\partial X};\ \frac{dr}{dT}=\frac{n}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \Theta};$$

$$\frac{d\Theta}{dT}=-\frac{n}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\left[\omega\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)-\frac{nm_0\Gamma(1+\psi)}{m}\right]\frac{l}{\beta_z c};\qquad (1)$$

$$\frac{d\beta_z}{dT}=\frac{1-\beta_z\beta_\Phi}{m\beta_\Phi}\cdot\frac{dm}{dT}-\frac{r^2m_0^2\Gamma^2}{2m^2c^2\beta_z}\cdot\frac{d\psi}{dT}.$$

Здесь $X$, $Y$, $r$ — переменные величины, заменившие проварьированные (в результате возмущения) произвольные постоянные в формулах для координат $X_1$, $Y_1$ ведущего центра и радиуса $r_1$ винтовой траектории электрона в адиабатически изменяющемся чисто магнитном поле;

$m_0$, $m$, $\beta_z$ — масса покоя, текущая релятивистская масса и нормированная к скорости света $c$ продольная скорость частицы;

$\Theta$ — относительная фаза резонансной компоненты сил электромагнитного поля, воспринимаемых электроном при вращении;

$T\in[0;\ 1]$, $l$ — нормированная и физическая длина пространства взаимодействия;

$\Gamma,\Gamma(1+\psi)$ — начальная и текущая нерелятивистская гирочастота;

$n$ — порядок гирорезонанса;

$\omega$, $\beta_\Phi$ — частота и нормированная фазовая скорость электромагнитной волны;

$U$ — обобщенная усредненная сила резонансного поля;

$$U=\mathrm{Re}\,\frac{\eta l}{\Gamma\omega\beta_z}\left[\frac{1-\beta_z\beta_\Phi}{\beta_\Phi}\Pi_n^eF^e+\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{r_1}{n}\cdot\frac{\partial\Pi_n^m}{\partial r_1}F^m\right]e^{j\Theta},\qquad (2)$$

где $\Pi_n^e$, $\Pi_n^m$ — рабочие гармоники мембранных функций Герца ТМ- и ТЕ-компонент бегущей (в общем случае — гибридной) электромагнитной волны;

$F^e$, $F^m$ — соответствующие этим функциям комплексные медленноменяющиеся амплитуды;

$j=\sqrt{-1}$ — мнимая единица;

Re — символ взятия вещественной части комплексного выражения;

$\eta=|e|/m_0$ — удельный заряд покоящегося электрона.

Рассмотрим уравнение для продольной скорости, представленное в системе (1). В однородном магнитном поле $\psi = 0$ это уравнение порождает интеграл движения

$$\beta_z = \left[\beta_{zi} - \frac{1}{\beta_\Phi}\left(1 - \frac{m}{m_i}\right)\right]\frac{m_i}{m}. \tag{3}$$

($i$ — индекс начальных условий). В случае же неоднородного магнитного поля $\psi \neq 0$ удобно сохранить формулу (3), заменив в ней (проварьировав) постоянную величину $\beta_{zi}$ новой медленно меняющейся «адиабатической» переменной $\beta_\zeta$:

$$\beta_z = \left[\beta_\zeta - \frac{1}{\beta_\Phi}\left(1 - \frac{m}{m_i}\right)\right]\frac{m_i}{m}. \tag{4}$$

Выпишем еще одну формулу, связывающую переменные величины $\beta_z$ и $m$ — формулу релятивистской зависимости массы частицы от модуля ее полной скорости:

$$m^2\left[1 - \beta_z^2 - \frac{r^2 m_0^2 \Gamma^2 (1 + \psi)}{c^2 m^2}\right] = m_0^2. \tag{5}$$

В частном случае отсутствия высокочастотного возмущения ($m = m_i = \mathrm{const}$) формула (5) принимает вид

$$m_i^2\left[1 - \beta_{zi}^2 (1 - q^2\psi) - \frac{r_i^2 m_0^2 \Gamma^2 (1 + \psi)}{c^2 m_i^2}\right] = m_0^2, \tag{6}$$

где выражение $\beta_{zi}^2 (1 - q^2\psi)$, заменяющее $\beta_z^2$, возникает как интеграл движения из последнего уравнения системы (1) при $m = \mathrm{const}$;
$q = \beta_{ti}/\beta_{zi}$ — начальное отношение поперечной и продольной компонент вектора скорости электрона (геометрический параметр невозмущенного винтового движения).

Объединим теперь соотношения (4) — (6). Для этого подставим в левую часть формулы (5) выражение $\beta_z$ (4) и одновременно заменим правую часть формулы (5) выражением $m_0^2$ (6). Смысл последнего действия состоит в том, что исследуемый реальный процесс (5) представляется на фоне известного процесса сравнения (6). В результате получаем квадратное уравнение относительно текущей релятивистской массы

$$m^2\left\{1 - \left[\beta_\zeta - \frac{1}{\beta_\Phi}\left(1 - \frac{m}{m_i}\right)\right]^2 \frac{m_i^2}{m^2} - \frac{r^2 m_0^2 \Gamma^2 (1 + \psi)}{c^2 m^2}\right\} = m_i^2\left[1 - \beta_{zi}^2 (1 - q^2\psi) - \frac{r_i^2 m_0^2 \Gamma^2 (1 + \psi)}{c^2 m_i^2}\right] \tag{7}$$

с решением

$$1 - \frac{m}{m_i} = \frac{\beta_{ti}^2\left[\left(1 - r^2 r_i^{-2}\right)(1 + \psi) + q^{-2}\left(1 - q^2\psi - \beta_\zeta^2 \beta_{zi}^{-2}\right)\right]}{2\left(1 - \frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1 - \beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1 - \frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]};$$

$$:\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\beta_{ti}^2(\beta_\Phi^2-1)\left[(1-r^2r_i^{-2})(1+\psi)+q^{-2}(1-q^2\psi-\beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2})\right]}{\beta_\Phi^2\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)^2\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]^2}}\right\},$$

определенным привязкой к начальным условиям. (8)

Соотношение (8) можно существенно упростить в рамках слабо релятивистского приближения

$$r_1^2k_\perp^2=r_1^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{|\beta_\Phi^2-1|}{\beta_\Phi^2}\ll 1, \tag{9}$$

где $k_\perp$ — поперечное (критическое) волновое число электродинамической системы.

Неравенство (9) при учете условия гирорезонанса выглядит как

$$\frac{n^2\beta_t^2\,|\beta_\Phi^2-1|}{\beta_\Phi^2\left(1-\beta_z\beta_\Phi^{-1}\right)^2}\ll 1, \tag{10}$$

и это обстоятельство позволяет приближенно заменить все выражение в фигурных скобках соотношения (8) просто единицей. Следовательно, принимается

$$1-\frac{m}{m_i}\;\frac{\beta_{ti}^2\left[(1-r^2r_i^{-2})=(1+\psi)+q^{-2}\left(1-q^2\psi-\beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2}\right)\right]}{2\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]}. \tag{11}$$

Подставляя соотношения (4) и (11) в выражение частотной расстройки из системы (1), получаем важный результат

$$\left[\omega\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)-\frac{nm_0\Gamma\,(1+\psi)}{m}\right]\frac{l}{\beta_z c}=\frac{m_i\beta_{zi}}{m\beta_z}\left\{\omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)-\frac{nm_0\Gamma}{m_i}-\right.$$

$$-\frac{nm_0\Gamma}{m_i}\left[\psi-\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\frac{\omega\,(1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1})m_i}{nm_0\Gamma}\right]-$$

$$\left.-\frac{\omega\beta_{ti}^2\,(\beta_\Phi^2-1)\left[(1-r^2r_i^{-2})\,(1+\psi)+q^{-2}\left(1-q^2\,\psi-\beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2}\right)\right]}{2\beta_\Phi^2\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]}\right\}\frac{l}{\beta_{zi}c}. \tag{12}$$

Подставляя далее равенство (11) в формулу (4), записываем соотношение

$$\frac{m_i\beta_{zi}}{m\beta_z}=\left\{\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}-\frac{\beta_{ti}^2\left[(1-r^2r_i^{-2})\,(1+\psi)+q^{-2}\left(1-q^2\psi-\beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2}\right)\right]}{2\beta_{zi}\beta_\Phi\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]}\right\}^{-1}. \tag{13}$$

Наконец, дифференцируя равенство (4) и привлекая уравнение для продольной скорости из системы (1), а затем соотношение (12), формулируем дифференциальный закон поведения адиабатической переменной $\beta_\zeta$:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right) = -\frac{d\psi}{dT}\cdot\frac{q^2 r^2}{2r_i^2}:$$

$$:\left\{\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}} - \frac{\beta_{ti}^2\left[\left(1 - r^2 r_i^{-2}\left(\left(1+\psi\right) + q^{-2}\left(1 - q^2\psi - \beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2}\right)\right]\right.\right.}{2\beta_{zi}\beta_\Phi\left(-1\,\frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1 - \frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]}\right\}. \qquad (14)$$

В заключение цепочки преобразований дифференцируем равенство (11) и привлекаем уравнение движения (14). Это позволяет сформулировать дифференциальный закон изменения текущей полной энергии электрона $W = mc^2$:

$$\frac{dW}{dT} = \frac{(dr/dT)\, r m_i c^2 \beta_{ti}^2}{r_i^2\left(1 - \beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}\right)}\cdot\frac{1+\psi}{1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1 - \frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)}. \qquad (15)$$

Полный электронный коэффициент полезного действия определяется с помощью равенства (11) как

$$\varkappa = \frac{1 - (m/m_i)}{1 - (m_0/m_i)} =$$

$$= \frac{q^2\left[\left(1 - r^2 r_i^{-2}\right)\left(1+\psi\right) + q^{-2}\left(1 - q^2\psi - \beta_\zeta^2\beta_{zi}^{-2}\right)\right]}{(q^2+1)\left(1 - \frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right)\left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1 - \frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]}, \qquad (16)$$

а дифференциальный закон его изменения подчиняется правилу

$$\frac{d\varkappa}{dT} = -\frac{2\,(dW/dT)\, q^2}{m_i c^2 \beta_{ti}^2 (q^2+1)}. \qquad (17)$$

Итогом проведенного исследования являются формулы (12) — (17), которые будут использованы ниже. Пока же отметим, что они заметно упрощаются при условии $|\beta_\Phi| \to \infty$, которое отвечает переходу от волноводных к резонаторным системам. В другом частном случае $\psi \to 0$ они превращаются (с сохранением обозначений) в формулы [2], описывающие гирорезонансные движения электронов в однородном магнитном поле.

### Слаборелятивистские уравнения движения и возбуждения

Обратимся к первым четырем уравнениям движения нормальной дифференциальной системы (1). В правые части этих уравнений входит обобщенная усредненная сила $U$ резонансного электромагнитного поля, определяемая выражением (2).

Упростим выражение (2), используя допущения и результаты предыдущего параграфа.

Прежде всего, произведя замену (4), записываем

$$\sigma \equiv \frac{1-\beta_z\beta_\Phi}{\beta_\Phi} = \sigma_i\,\frac{m_i}{m}\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi}\left(1-\beta_\zeta\beta_{zi}^{-1}\right)\right]. \tag{18}$$

Привлекая условие гирорезонанса, получаем приближенно

$$s \equiv 1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi} = s_i\,\frac{m_i}{m}\,(1+\psi). \tag{19}$$

Далее конкретизируем выражения рабочих гармоник мембранных функций Герца $\Pi_n^e$ и $\Pi_n^m$ в рамках допущений слаборелятивистского приближения (9) — (10). Здесь нам помогает то обстоятельство, что зависимость $\Pi_n^e$ и $\Pi_n^m$ от $X_1$, $Y_1$ и $r_1$ формально такая же, как в задаче [2] с однородным магнитным полем при переменных $X$, $Y$ и $r$. Поэтому сразу используем результаты работы [2], переобозначая в них $X$, $Y$ и $r$ на $X_1$, $Y_1$ и $r_1 = r/\sqrt{1+\psi}$:

$$\Pi_n = \frac{r_1}{n}\cdot\frac{\partial \Pi_n}{\partial r_1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{2\sqrt{1+\psi}}\right)^n \nabla_{\xi 1}^n \Pi, \tag{20}$$

где введен оператор $\nabla_{\xi 1} = \frac{\partial}{\partial X_1} + j\frac{\partial}{\partial Y_1}$, а через $\Pi$ обозначена любая из двух мембранных функций Герца $\Pi^e$ или $\Pi^m$ с заменой аргументов $x$, $y$ координатами ведущего центра рассматриваемой электронной орбиты $X_1$, $Y_1$.

Подставляя соотношения (18) — (20) в выражение (2), получаем формулу слаборелятивистского приближения:

$$U = \frac{m_i\beta_{zi}\left(r_i^2/n\right)}{m\beta_z\sqrt{(1+\psi)^n}}\cdot\frac{(r/r_i)^n\eta l r_i^{n-2}}{\Gamma\omega 2^n(n-1)!\,\beta_{zi}}\left\{\sigma_i\left[1+\frac{\beta_{zi}\beta_\Phi}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]\times\right.$$
$$\times\left[\operatorname{Re}F^e\operatorname{Re}\left(\nabla_{\xi 1}^n\Pi^e e^{j\Theta}\right)-\operatorname{Im}F^e\operatorname{Im}\left(\nabla_{\xi 1}^n\Pi^e e^{j\Theta}\right)\right]+$$
$$\left.+\,s_i(1+\psi)\left[\operatorname{Re}F^m\operatorname{Re}\left(\nabla_{\xi 1}^n\Pi^m e^{j\Theta}\right)-\operatorname{Im}F^m\operatorname{Im}\left(\nabla_{\xi 1}^n\Pi^m e^{j\Theta}\right)\right]\right\} \tag{21}$$

($\mathrm{I_m}$ — символ взятия мнимой части комплексного выражения).

Переходим к проблеме возбуждения. Обозначаем через $\Theta_1$ индивидуальное начальное значение относительной фазы электрона на входе в рассматриваемое пространство взаимодействия или в первый из предшествующих ему модуляторов (если они используются) и составляем уравнение баланса средних мощностей:

$$\frac{d\overline{Q}}{dT} = -\frac{I}{|e|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dW}{dT}\,d\Theta_1. \tag{22}$$

Здесь $I > 0$ — средний ток потока электронов;

$\overline{Q}$ — средний (за период поля) поток электромагнитной мощности в волноводе;

$$\overline{Q} = \frac{S}{2\beta_{\Phi} Z} \{h^e [(\mathrm{Re} F^e)^2 + (\mathrm{Im} F^e)^2] + h^m [(\mathrm{Re} F^m)^2 + (\mathrm{Im} F^m)^2]\}, \qquad (23)$$

$Z = 120\ \pi$ *ом* — волновое сопротивление вакуума;

$S$ — площадь поперечного сечения волновода;

$h^e$, $h^m$ — безразмерные числовые положительные коэффициенты [2], связанные с учетом неоднородности распределения плотности энергии электромагнитного поля по поперечному сечению волновода.

Теперь необходимо детализировать уравнение (22). Для этого следует расшифровать его левую часть выражением (23), а правую — выражением (15) с подстановкой $dr/dT$ из системы (1) и $U$ из формулы (21).

При выполнении указанной последовательности действий обратим внимание на следующее. Уравнение баланса средних мощностей определяет, по существу, *одну вещественную функцию* — закон продольного распределения измеряемой интенсивности электромагнитного поля в «горячем» волноводе (поперечное распределение поля считается заданным для выбранного типа волны — $TM$, $TE$ или гибридной). Этот закон математически выступает как переменная величина, *заменившая проварьированную* произвольную постоянную (измеряемую интенсивность) в решении однородной электродинамической задачи «холодного» волновода.

Для наглядности и удобства математических выкладок названный закон *представлен нами* с помощью четырех вещественных функций $\mathrm{Re} F^e$, $\mathrm{Im} F^e$, $\mathrm{Re} F^m$ и $\mathrm{Im} F^m$. Такое представление, естественно, не может быть однозначным до тех пор, пока мы не подчиним *четыре* функции каким-либо *трем дополнительным условиям.* Эти условия никоим образом не вытекают из физики рассматриваемых процессов, а назначаются просто *по нашему желанию* (такой математический прием является типичным для метода вариации произвольных постоянных).

Учитывая изложенное выше, определим три дополнительных условия как попарные равенства коэффициентов в левой и правой частях детализированного уравнения (22) при каждой из первых трех перечисленных выше вещественных функций в отдельности. Тогда замыкание этих условий до закона (22) автоматически принимает вид такого же равенства коэффициентов при последней (четвертой) вещественной функции. Таким образом, правило баланса средних мощностей (22) расписывается как две пары единообразных по форме дифференциальных уравнений возбуждения:

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} \frac{dF^e}{dT} = \frac{\beta_{\Phi} I Z l r_i^n \sigma_l}{S h^e 2^n n! \beta_{zl}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits^{+\pi} \frac{m_i \beta_{zl}}{m \beta_z} \left(\frac{r}{r_l}\right)^n \begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{Bmatrix} (\nabla_{\xi 1}^n \Pi^e e^{j\theta}) \times$$

$$\times (1+\psi)^{1-\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]\left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]^{-1} d\Theta_1;$$
$$\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} \frac{d\dot{F}^m}{dT} = \frac{\beta_\Phi lZlr_i^n s_i}{Sh^m 2^n n! \beta_{zi}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{m_i\beta_{zi}}{m\beta_z}\left(\frac{r}{r_i}\right)^n \begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{Bmatrix} (\nabla_{\xi 1}^n \Pi^m e^{j\theta}) \times$$
$$\times (1+\psi)^{2-\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}{1-\beta_{zi}\beta_\Phi^{-1}}\left(1-\frac{\beta_\zeta}{\beta_{zi}}\right)\right]^{-1} d\theta_1. \qquad (24)$$

Здесь выполнено упрощение коэффициентов правых частей уравнений с учетом условия гирорезонанса и взаимосвязи начальной поперечной скорости с радиусом электронной орбиты.

Соотношения (24) в совокупности с уравнениями (13), (14) для продольного движения и уравнениями (1) для переменных поперечного движения с подстановкой выражения обобщенной резонансной силы (21) образуют *замкнутую* дифференциальную систему.

## Замкнутая дифференциальная задача в безразмерном виде

Введем нормированные переменные поперечного и продольного движения

$$\Xi = k_\perp X, \ \rho = k_\perp Y, \ \rho = r/r_i, \ \upsilon = \beta_\zeta/\beta_{zi}, \qquad (25)$$

где, по предположению, $r_i \neq 0$ и $\beta_{zi} \neq 0$, так что $\rho_i = 1$ и $\upsilon_i = 1$.

Теперь естественно ввести безразмерную комплексную амплитуду

$$A^e + jB^e + A^m + jB^m = \frac{\eta l r_i^{n-2} \nabla_{\xi 1}^n}{\Gamma\omega 2^n (n-1)! \beta_{zi}} (\sigma_i \Pi_i^e F^e + s_i \Pi_i^m F^m), \qquad (26)$$

два релятивистских параметра

$$\mu = \frac{\beta_{ti}^2 \omega l (\beta_\Phi^2 - 1)}{2c\beta_{zi}(\beta_\Phi^2 - \beta_\Phi\beta_{zi})}; \ \nu = \frac{\beta_{ti}^2}{2(\beta_\Phi\beta_{zi} - \beta_{zi}^2)}, \qquad (27)$$

а также упрощенный на основании условия гирорезонанса переменный параметр частотной расстройки

$$\varphi = \varphi_i - \phi[\psi - 2\nu q^{-2}(1-\upsilon)] \qquad (28)$$

с начальным значением

$$\varphi_i = \left[\omega\left(1 - \frac{\beta_{zi}}{\beta_\Phi}\right) - \frac{nm_0\Gamma}{m_i}\right]\frac{l}{\beta_{zi}c}, \qquad (29)$$

определяемым как разность набегов фаз двух колебаний с близкими частотами — допплеровской и $n$-кратной гирорезонансной — за полное время пролета электрона по невозмущенной траектории. Под $\phi$ с равным правом можно понимать любой из двух указанных набегов фаз.

В результате проведенных замен система пяти уравнений движения принимает вид

$$\frac{d\Xi}{dT} = \frac{2n\,|\mu|\,\rho^n\,(\partial/\partial\Upsilon)}{\phi\sqrt{(1+\psi)^n}}\left\{\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}\,(1-\upsilon)\right]\left(A^e\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-B^e\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}\right)+(1+\psi)\left(A^m\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}-B^m\mathrm{Im}\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}\right)\right\}:$$

$$:\left[\upsilon-\nu\,\frac{(1-\rho^2)(1+\psi)+q^{-2}\,(1-q^2\psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right];$$

$$\frac{d\Upsilon}{dT} = -\frac{2n\,|\mu|\,\rho^n\,(\partial/\partial\Xi)}{\phi\sqrt{(1+\Psi)^n}}\left\{\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}\,(1-\upsilon)\right]\left(A^e\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}-\right.\right.$$

$$\left.-B^e\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}\right)+(1+\Psi)\left(A^m\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}-B^m\,\mathrm{Im}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}\right)\right\}:\left[\upsilon-\nu\,\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}\,(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right];$$

$$\frac{d\rho}{dT} = -\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{(1+\Psi)^n}}\left\{\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}\,(1-\upsilon)\right]\left(A^e\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}+\right.\right.$$

$$\left.+B^e\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}\right)+(1+\Psi)\left(A^m\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}+B^m\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\,e^{j\theta}\right)\right\}:\left[\upsilon-\nu\,\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}\,(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right];$$

$$\frac{d\theta}{dT} = \left\langle-\frac{n\rho^{n-2}}{\sqrt{1+\Psi^n}}\left\{\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}\,(1-\upsilon)\right]\left(A^e\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-B^e\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^e_i}\,e^{j\theta}\right)+(1+\Psi)\left(A^m\,\mathrm{Re}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\,e^{j\theta}-B^m\,\mathrm{Im}\,\frac{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m}{\nabla^n_{\xi 1}\Pi^m_i}\times\right.$$

$$\left.\left.e^{j\theta}\right)\right\}+\varphi_i-\phi\left[\Psi-2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)\right]-$$

$$\left.\mu\,\frac{(1-\rho^2)(1-\Psi)+q^{-2}\,(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right\rangle:$$

$$:\left[\upsilon-\nu\times\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}\,(1-q^2\psi)-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right];$$

$$\frac{d\upsilon}{dT} = -\frac{d\Psi}{dT}\cdot\frac{q^2\rho^2}{2}:\left[\upsilon-\nu\,\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}\,(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}\,(1-\upsilon)}\right] \qquad (30)$$

Далее преобразуем две пары соотношений (24). Складываем 1-е уравнение 1-й пары с умноженным на мнимую единицу 2-м уравнением этой же пары и получаемое комплексное уравнение, умножаем на коэффициент при $F^e$ из правой части равенства (26). После этого разделяем вещественную и мнимую части. Аналогичные действия производим с $F^m$. В результате проведенных преобразований система четырех уравнений возбуждения принимает вид

$$\frac{dA^e}{dT} = \frac{\varepsilon^e}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho^n (1+\Psi)^{1-\frac{n}{2}}\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}(1-\upsilon)\right]\operatorname{Im}\frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^e}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^e}\,e^{j\theta}}{[1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)]\left[\upsilon-\nu\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)}\right]}\,d\theta_1;$$

$$\frac{dB^e}{dT} = \frac{\varepsilon^e}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho^n (1+\Psi)^{1-\frac{n}{2}}\left[1+\frac{2\nu^2 q^{-2}\phi+\mu}{\nu\phi-\mu}(1-\upsilon)\right]\operatorname{Re}\frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^e}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^e}\,e^{j\theta}}{[1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)]\left[\upsilon-\nu\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)}\right]}\,d\theta_1;$$

$$\frac{dA^m}{dT} = \frac{\varepsilon^m}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho^n (1+\Psi)^{2-\frac{n}{2}}\operatorname{Im}\frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^m}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^m}\,e^{j\theta}}{[1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)]\left[\upsilon-\nu\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}(1-\nu)}\right]}\,d\theta_1;$$

$$\frac{dB^m}{dT} = \frac{\varepsilon^m}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho^n (1+\Psi)^{2-\frac{n}{2}}\operatorname{Re}\frac{\Delta_{\xi 1}^n \Pi^m}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^m}\,e^{j\theta}}{[1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)]\pi\left[\upsilon-\nu\frac{(1-\rho^2)(1+\Psi)+q^{-2}(1-q^2\Psi-\upsilon^2)}{1+2\nu q^{-2}(1-\upsilon)}\right]}\,d\theta_1, \tag{31}$$

где безразмерные токовые параметры введены как

$$\varepsilon^e = \frac{\beta_\phi I Z\eta n}{S\Gamma\omega h^e}\left(\frac{l r_i^{n-1}\sigma_i}{\beta_{zi}2^n n!}\right)^2 |\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^e|^2; \tag{32}$$

$$\varepsilon^m = \frac{\beta_\phi I Z\eta n}{S\Gamma\omega h^m}\left(\frac{l r_i^{n-1}s_i}{\beta_{zi}2^n n!}\right)^2 |\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^m|^2,$$

причем алгебраические знаки этих параметров определяются знаком фазовой скорости бегущей электромагнитной волны, т. е. ее направлением (попутным или встречным) по отношению к электронному потоку, с перемещением которого, по условию, связывается положительное направление продольной координаты в волноводе.

Преобразуем еще уравнения для электронного к. п. д. (16) и (17). Первое из них, записанное в безразмерных переменных и усредненное, выглядит в новом качестве как

$$\bar{\varkappa} = \frac{q^2 + 2\nu}{q^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - \rho^2)(1 + \psi) + q^{-2}(1 - q^2\psi - \upsilon^2)}{1 + 2\nu q^{-2}(1 - \upsilon)} d\theta_1, \quad (33)$$

второе —

$$\frac{d\bar{\varkappa}}{dT} = \frac{q^2 + 2\nu}{q^2 + 1} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \rho^n \left\{ (1 + \psi)^{1 - \frac{n}{2}} \left[ 1 + \frac{2\nu^2 q^{-2} \phi + \mu}{\nu\phi - \mu} (1 - \upsilon) \right] \times \right.$$

$$\times \left( A^e \operatorname{Im} \frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^e}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^e} e^{j\theta} + B^e \operatorname{Re} \frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^e}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^e} e^{j\theta} \right) + (1 + \psi)^{2 - \frac{n}{2}} \left( A^m \operatorname{Im} \frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^m}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^m} \times \right.$$

$$\left. \left. \times e^{j\theta} + B^m \operatorname{Re} \frac{\nabla_{\xi 1}^n \Pi^m}{\nabla_{\xi 1}^n \Pi_i^m} e^{j\theta} \right) \right\} [1 + 2\nu q^{-2}(1 - \upsilon)]^{-1} \times$$

$$\times \left[ \upsilon - \nu \frac{(1 - \rho^2)(1 + \psi) + q^{-2}(1 - q^2\psi - \upsilon^2)}{1 + 2\nu q^{-2}(1 - \upsilon)} \right]^{-1} d\theta_1. \quad (34)$$

Сравнивая правые части выражений (34) и (31), получаем новую формулу, выражающую закон сохранения энергии:

$$\bar{\varkappa} = \frac{q^2 + 2\nu}{q^2 + 1} \left[ \varepsilon^e \left( A^{e2} + B^{e2} - A_i^{e2} - B_i^{e2} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^m \left( A^{m2} + B^{m2} - A_i^{m2} - B_i^{m2} \right) \right]. \quad (35)$$

Соотношение (35) может быть использовано как контрольное в процессе численного решения дифференциальной системы (30)—(31) с итоговым выходом (33).

На основании изложенного выше можно сделать следующие выводы. Замкнутая (самосогласованная) задача электронно-волнового взаимодействия в волноводе с гибридной волной при адиабатически изменяющемся стационарном магнитном поле в общем случае включает пять (индивидуальных) уравнений движения (30) и четыре (коллективных) уравнения возбуждения (31), содержащих два релятивистских параметра ($\mu$, $\nu$), три геометрических ($\varphi_i$, $\phi$, $q$) и два токовых параметра ($\varepsilon$ , $\varepsilon^m$) и подразумевающих, кроме того, явное задание двух мембранных функций Герца $\Pi^e(X_1, Y_1)$ $\Pi^m(X_1, Y_1)$ и, естественно,— функции магнитной неоднородности $\psi(T)$, которая, во-первых, непосредственно входит в названные уравнения и, во-вторых, определяет [1] выражения координат ведущего центра электронной орбиты $X_1, Y_1$ через унифицированные дрейфовые переменные $\Xi$, $\upsilon$.

В ряде случаев математическая формулировка задачи может быть существенно упрощена. Так, в поперечно-одномерных полях или в полях с азимутальной симметрией первые два уравнения движения отделяются (и могут не рассматриваться), поскольку при данных условиях вклад резонансных сил в перемещение ведущего центра электронной орбиты направлен *по линиям уровня* поперечной картины поля этих сил. В полях, не обладающих указанными видами симметрии, *как правило*, первые два уравнения движения могут быть опущены, а величины $\Xi$ и $\upsilon$ приняты постоянными ввиду малого релятивистского фактора $2n^2|\mu|\phi^{-1} = r_l^2 k_\perp^2 \ll 1$ (9), определяющего порядок изменения этих величин.

Исключением, возможно, являются специальные ситуации, при которых ведущие центры электронных орбит проходят через зоны слабых или даже нулевых компонент сил резонансного поля, ответственных за *орбитальное* движение электрона. При этом порядки изменения орбитальных и дрейфовых переменных поперечного перемещения становятся *соизмеримыми*, поскольку поперечное распределение резонансных компонент сил для *дрейфового* движения отлично от орбитального, о чем свидетельствует наличие операторов $\partial/\partial\upsilon$ и $-\partial/\partial\Xi$ в правых частях дифференциальных уравнений для переменных $\Xi$, $\upsilon$.

Другой характерный случай упрощения математической формулировки задачи электронно-волнового взаимодействия реализуется при редукции гибридного бегущего поля до чистого $TM$- или $TE$-типа. При этом правые части всех используемых дифференциальных уравнений укорачиваются наполовину, а вместо двух пар уравнений возбуждения остается только одна. Наконец, в задаче о стоячем поле уравнения возбуждения могут не использоваться вовсе, а уравнения движения упрощаются за счет выбора $B^e = B^m = 0$ и предельного перехода $\nu \to 0$.

В заключение выпишем в качестве примера рабочие формулы азимутально-симметричной задачи [3] о движении электронов внутри круглого резонатора с медленно изменяющимся продольным распределением высокочастотного поля $A^m = Cf(T)$ при поперечной структуре типа $TE_{0n}$. В такой задаче поведение тонкого поливинтового кольцевого электронного потока полностью моделируется поведением любой одной из его винтовых нитей.

Полагая нулевое начальное значение азимутальной координаты оси, выбранной для рассмотрения винтовой нити электронного потока, учитывая ее радиальное смещение по адиабатическому закону $R\sqrt{1+\psi} = \sqrt{X_l^2 + Y_l^2} \equiv R_l$ и принимая магнитную функцию Герца в виде $\Pi^m = \pm J_0(k_\perp R)$, получаем конкретизированное представление трех последних уравнений системы (30):

$$\frac{d\rho}{dT} = -(1+\psi)^{1-\frac{n}{2}} \frac{J_0^{(n)}\left(k_\perp R_l / \sqrt{1+\psi}\right)}{J_0^{(n)}(k_\perp R_l)\,\upsilon} Cf(T)\,\rho^{n-1}\sin\theta;$$

$$\frac{d\theta}{dT} = -(1+\psi)^{1-\frac{n}{2}} \frac{J_0^{(n)}\left(k_\perp R_i \big/ \sqrt{1+\psi}\right)}{J_0^{(n)}(k_\perp R_i)\, \upsilon} nCf(T)\, \rho^{n-2}\cos\theta +$$

$$+ \{\varphi_i - \phi\psi - \mu\,[(1-\rho^2)(1+\psi) + q^{-2}(1-q^2\psi-\upsilon^2)]\}\, \upsilon^{-1}; \qquad (36)$$

$$\frac{d\upsilon}{dT} = -\frac{d\psi}{dT}\cdot\frac{q^2\rho^2}{2\upsilon},$$

где символом $J_0^{(n)}(\cdot)$ обозначена производная $n$-го порядка от бесселевой функции нулевого индекса при указанном в скобках значении аргумента. Полный электронный к. п. д. задачи подсчитывается по формуле (33) при значении $\nu = 0$.

Соотношения (36) дополнительно упрощаются применительно к типичным ситуациям, в которых не только скорость изменения $d\psi/dT$, но и само относительное изменение $\psi$ стационарного магнитного поля выступают как величины условно малые. Действительно, можно видеть, что активное управление фазовыми характеристиками электронного потока достигается при значениях $\phi|\psi| \sim \mu$, т. е. уже при $|\psi| \sim 0{,}5\,\beta_{ti}^2 \ll 1$ . В этом случае на основании последнего уравнения системы (36) с допустимой относительной погрешностью порядка $|\psi| \ll 1$ принимается соотношение $\upsilon = 1$ и, кроме того, в силу тождества

$$\frac{d}{dT}[(1-\rho^2)(1+\psi) + q^{-2}(1-q^2\psi-\upsilon^2)] = (1+\psi)\frac{d(1-\rho^2)}{dT}, \qquad (37)$$

параллельно производится замена содержимого написанной квадратной скобки выражением $1-\rho^2$. В результате этих действий система (36) редуцируется к традиционному виду

$$\frac{d\rho}{dT} = -Cf(T)\,\rho^{n-1}\sin\theta; \qquad (38)$$

$$\frac{d\theta}{dT} = -nCf(T)\,\rho^{n-2}\cos\theta + \varphi - \mu(1-\rho^2),$$

где $\varphi = \varphi_i - \phi\psi$ играет роль *переменного* параметра частотной расстройки.

В некоторых специальных случаях (при секционировании пространства взаимодействия неоднородным магнитным полем [3]) неравенство $|\psi| \ll 1$ не выполняется, однако представляется возможным принять новое ограничивающее условие $\psi^2 \ll 1$ и на его основе упростить систему (36) путем *линеаризации* по $\psi$ правых частей всех ее дифференциальных уравнений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. А. Жураховский. Математическое описание усредненных перемещений электронного ротатора внутри волновода, погруженного в адиабатически-неоднородное магнитное поле.— Сб. «Радиотехника». Вып. 22. Харьков, 1974, с. 40—51.
2. В. А Жураховский. Нелинейные колебания электронов в магнитонаправляемых потоках. К., «Наукова думка», 1972, с. 29—89.
3. А. Кураев. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Минск, «Наука и техника», 1971, с. 221—237.