УДК 621.372

А. А. Шадрин, А. Г. Шеин,
канд. физ. -мат. наук

МОДИФИКАЦИЯ «СВЕРХБЫСТРОГО» АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ. Ч. II.

Описанная в первой части методика решения уравнения Пуассона в прямоугольной системе координат может быть развита и для трехмерной криволинейной области. Особый интерес представляет решение этой задачи в связи с тем, что в большинстве приборов магнетронного типа (магнетрон, лампа бегущей волны *М*-типа, лампа обратной волны *М*-типа, митрон и др.) пространство взаимодействия представляет собой коаксиальную полость. Поэтому ниже приводятся соотношения для использования алгоритма «сверхбыстрого» решения уравнения Пуассона в такой области и обсуждаются некоторые пути, позволяющие сократить время вычисления полей пространственного заряда.

1. Цилиндрическая геометрия пространства взаимодействия

Исходные соотношения

Ищем решение уравнения Пуассона в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=F(r, \varphi, z) \qquad (1)$$

внутри кольцевого сегмента:

$$r_c < 2 < r_a;$$

$$0 \leqslant \varphi < \theta;$$

$$0 \leqslant z < W \quad \text{или} \quad 0 < z < W,$$

где r_c — радиус внутреннего цилиндра — катода;

r_a — радиус внешнего цилиндра — анода, коаксиального с первым;

θ — угловая длина основной волны периодического азимутального возмущения;

W — линейная длина основной волны продольного возмущения или осевая длина системы.

Наличие нечетной производной по r не позволяет сразу применить метод Хокни, поэтому заменой переменных [1]

$$\varphi = x, \quad r = r_c e^y, \quad f = r^2 F$$

преобразуем (1) в уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} r^2 = f(x, y, z) \tag{2}$$

для прямоугольной области $[0, L;\ 0, H;\ 0, V]$ $\left(L = \theta \text{ и } H = \ln\frac{r_a}{r_c}\right)$ с граничными условиями (2), (7) [3].

Преобразование (2) по семиточечной конечно-разностной схеме на пространственной сетке $N \times M \times N$ приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\alpha^2 (U_{i+1,k,l} + U_{i-1,k,l}) + (U_{l,k+1,l} + U_{l,k-1,l}) +$$
$$+ \beta_k^2 (U_{l,k,l+1} + U_{l,k,l-1}) - 2(1 + \alpha^2 + \beta_k^2) U_{l,k,l} = f^{(0)}_{l,k,l}; \tag{3}$$

$\left(\beta_k = r_k \frac{\Delta y}{\Delta z} = r_c l_k^y \frac{\Delta y}{\Delta z}\right)$, в отличие от (8), [3] зависит от индекса k, которая должна быть решена совместно с соотношениями (10)—(15) [3].

Алгоритм решения

а) *Двумерный Фурье-анализ* проводится на всех ярусах (k) по индексам i и l и преобразует систему (3) в ряд независимых систем уравнений относительно Фурье-коэффициентов:

$$V^{\begin{Bmatrix}cc\\ss\end{Bmatrix}}_{j,k+1,m} - \lambda^{(0)}_{j,k,m} V^{\begin{Bmatrix}cc\\ss\end{Bmatrix}}_{j,k,m} + V^{\begin{Bmatrix}cc\\ss\end{Bmatrix}}_{j,k-1,m} = \Phi^{\begin{Bmatrix}cc\\ss\end{Bmatrix}}_{j,k,m}, \tag{4}$$

где

$$\lambda^{(0)}_{j,k,m} = 2\left[1 + \alpha^2\left(1 - \cos\frac{2\pi j}{N}\right) + \beta_k^2\left(1 - \cos\frac{\delta\pi m}{V}\right)\right], \tag{5}$$

а все остальные обозначения и диапазоны действия индексов j, m, c, s — такие же, как и в первой части статьи [3].

При этом вычисляются преобразования Фурье распределения зарядов

$$f^{(0)}_{l,k,l} \to \Phi^{(0)\begin{Bmatrix}cc\\ss\end{Bmatrix}}_{l,k,m} \tag{6}$$

и граничных потенциалов

$$U_{a_{i,l}} \to V_{a_{j,m}}^{\begin{Bmatrix} cc \\ ss \end{Bmatrix}}, \quad U_{c_{i,l}} \to V_{c_{j,m}}^{\begin{Bmatrix} cc \\ ss \end{Bmatrix}}$$

в общем виде представленные выражениями (21)—(23) [3] и значениями $\lambda_{j,k,m}$ по соотношению (5).

б) *Циклическая редукция* проводится по индексу k для всех Фурье-гармоник j и m по алгоритму, представленному в работе [1].

При этом на r-м цикле прямого хода редукции получаем систему (индексы j, m, c, s опущены)

$$a_k^{(r)} V_{k+2^r} - \lambda_k^{(r)} V_k + b_k^{(r)} V_{k-2^r} = \Phi_k^{(r)}, \tag{7}$$

последовательно вычисляя по рекуррентным формулам для каждого $r = 0, 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \mu_k^{(r)} &= a_k^{(r)} \left(\lambda_{k+2^r}^{(r)}\right)^{-1}; \quad V_k^{(r)} = a_k^{(r)} \left(\lambda_{k-2^r}^{(r)}\right)^{-1}; \\ \lambda_k^{(r+1)} &= \lambda_k^{(r)} - \mu_k^{(r)} b_{k+2^r}^{(r)} - V_k^{(r)} a_{k-2^r}^{(r)}; \\ \Phi_k^{(r+1)} &= \Phi_k^{(r)} + \mu_k^{(r)} \Phi_{k+2^r} + V_k^{(r)} \Phi_{k-2^r}^{(r)}; \\ a_k^{(r+1)} &= \mu_k^{(r)} a_{k+2^r}^{(r)}, \quad b_k^{(r+1)} = V_k^{(r)} b_{k-2^r}^{(r)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$a_k^{(0)} = b_k^{(0)} = 1; \quad k = 2^r, 2 \cdot 2^r, \ldots, M - 2^r.$$

Здесь желательно использовать возможность сокращения операций, изложенную в примечании к 1 части статьи.

После решения системы p^{-1} уравнений, полученной на R-м цикле редукции, на обратном ее ходе, пользуясь соотношением

$$V_k = \left(a_k^{(r)} V_{k+2^r} + b_k^{(r)} V_{k-2^r} - \Phi_k^{(r)}\right) / \left(\lambda_k^{(r)}\right), \tag{9}$$

где

$$r = R-1, R-2, \ldots, 1; \; k = 2^r, 2^r + 2^{r+1}, \; 2^r + 2 \cdot 2^{r+1}, \; M - 2^r,$$

вычисляем значения гармоник на остальных промежуточных ярусах.

в) *Двумерный Фурье-синтез* на всех ярусах проводится по индексам j и m и является конечной операцией алгоритма, определяющей значения потенциала в узлах сетки.

В случае периодических ГУ (13) [3] общий вид преобразования таков:

$$U_{i,k,l} = \frac{1}{4} \left(V_{0,k,0}^{c,c} + (-1)^i V_{N/2,k,0}^{c,c} + (-1)^l V_{0,k,V/2}^{c,c} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{l+i} V_{N/2,k,V/2}^{c,c}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2-1} \left[\left(V_{j,k,0}^{c,c} + (-1)^l V_{j,k,V/2}^{c,c}\right) \times\right.$$

$$\times \cos\frac{2\pi ij}{N} + (V^{s,c}_{j,k,0} + V^{s,c}_{j,k,V/2}) \sin\frac{2\pi ij}{N} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{V/2-1}\Big[(V^{c,c}_{0,k,m} +$$

$$+ (-1)^l V^{c,c}_{N/2,k,m}) \cos\frac{2\pi lm}{V} + (V^{cs}_{0,k,m} + (-1)^l V_{N/2,k,m}) \sin\frac{2\pi lm}{V}\Big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{V/2-1}\sum_{j=1}^{N/2-1}\Big[\Big(V^{c,c}_{j,k,m}\cos\frac{2\pi ij}{N} + V^{s,c}_{j,k,m}\sin\frac{2\pi ij}{N}\Big)\cos\frac{2\pi lm}{V} +$$

$$+ \Big(V^{c,s}_{j,k,m}\cos\frac{2\pi ij}{N} + V^{s,s}_{j,k,m}\sin\frac{2\pi ij}{N}\Big)\sin\frac{2\pi lm}{V}\Big] \qquad (10)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, M;\ i = 0, 1, \ldots, N-1;\ l = 0, 1, 2, \ldots, V-1).$

В случае нулевых условий (11) [3] для четных $l = 0, 2, \ldots, V-2$ имеем

$$U_{i,k,l} = \sum_{m=1}^{V/2-1}\Big\{\frac{1}{2}\Big[V^{c,s}_{0,k,m} + (-1)^{l/2} V^{c,s}_{0,k,m+V/2} + (-1)^l (V^{c,s}_{N/2,k,m} +$$

$$+ (-1)^{l/2} V^{c,s}_{N/2,k,m+V/2})\Big] + \sum_{j=1}^{N/2-1}\Big[(V^{c,s}_{j,k,m} + (-1)^{l/2} V^{c,s}_{j,k,m+V/2}) \times \qquad (11)$$

$$\times \cos\frac{2\pi ij}{N} + (V^{s,s}_{j,k,m} + (-1)^{l/2} V^{s,s}_{j,k,m+V/2}) \sin\frac{2\pi ij}{N}\Big]\Big\} \sin\frac{\pi lm}{V};$$

$$U_{i,k,l} = (-1)^{l-1}\Big[\frac{1}{2}(V^{s,s}_{0,k,V/2} + (-1)^l V_{N/2,k,V/2}) \sum_{j=1}^{V/2-1} \times$$

$$\times \Big(V^{c,s}_{j,k,V/2}\cos\frac{2\pi ij}{N} + V^{s,s}_{j,k,N/2}\sin\frac{2\pi ij}{N}\Big)\Big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{V/2-1} \times \Big\{\frac{1}{2}\Big[(V^{c,s}_{0,k,m} + (-1)^l V^{c,s}_{N/2,k,m}) \sin\frac{\pi lm}{V} +$$

$$+ (-1)^{l-1/2} \times (V_{0,k,m+V/2} + (-1)^l V^{c,s}_{N/2,k,m,+V/2}) \cos\frac{\pi lm}{V}\Big] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N/2-1}\Big[\Big(V^{c,s}_{j,k,m}\cos\frac{2\pi ij}{N} + V^{s,s}_{j,k,m}\sin\frac{2\pi ij}{N}\Big)\sin\frac{\pi lm}{V} + \qquad (11a)$$

$$+ (-1)^{l-1/2}\Big(V^{c,s}_{j,k,m+V/2}\cos\frac{2\pi ij}{N} + V^{s,s}_{j,k,m+V/2}\sin\frac{2\pi ij}{N}\Big)\cos\frac{\pi lm}{V}\Big]\Big\}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M).$$

При выполнении условий симметрии (12) [3] суммирование проводится только по нечетным m для $l = 1, 2, \ldots, N/2$.

Преобразование обычно осуществляется по схеме БПФ с учетом (10) и (11).

2. Применение неравномерной сетки

Введение в некоторых случаях неравномерной в поперечном y-направлении сетки, например, для узкого ленточного или тонкого трубчатого пучка, позволяет несколько сократить время вычислений.

При этом система разностных уравнений, полученная преобразованием исходных выражений (1) [3] или (2) на сетке с неэквидистантными ярусами, имеет вид

$$\alpha_k\alpha_{k-1}(U_{i+1,\,k,\,l}+U_{i-1,\,k,\,l})+\beta_k\beta_{k-1}(U_{i,\,k,\,l+1}+U_{i,\,k,\,l-1})+$$
$$+a_k^{(0)}U_{i,\,k+1,\,l}+b_k^{(0)}U_{i,\,k-1,\,l}-2(1+\alpha_k\alpha_{k-1}+$$
$$+\beta_k\beta_{k-1})U_{i,\,k,\,l}=f_{i,\,k,\,l}^{(0)}, \qquad (12)$$

где $\alpha_k=\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x}$, $\beta_k=\dfrac{\Delta y_k}{\Delta z}$ — для прямоугольной геометрии;

$\beta_k=r_k\dfrac{\Delta y_k}{\Delta z}=r_c e^{y_k}\dfrac{\Delta y_k}{\Delta z}$ — для цилиндрической геометрии;

$$a_k^{(0)}=\frac{2\Delta y_{k-1}}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}};\quad b_k^{(0)}=\frac{2\Delta y_k}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}};\quad f_{i,\,k,\,l}^{(0)}=\Delta y_k\Delta y_{k-1}f_{i,\,k,\,l}$$

а Δy_k — переменный шаг сетки, или расстояние между горизонтальными ярусами сетки.

После двумерного Фурье-анализа по индексам i и l получаем систему уравнений вида (индексы гармоник опущены)

$$a_k^{(0)}V_{k+1}-\lambda_k^{(0)}V_k+b_k^{(0)}V_{k-1}=\Phi_k^{(0)}, \qquad (13)$$

где

$$\lambda_k^{(0)}=2\left[1+\alpha_k\alpha_{k-1}\left(1+\cos\frac{2\pi j}{N}\right)+\beta_k\beta_{k-1}\left(1+\cos\frac{\delta\pi m}{V}\right)\right], \qquad (14)$$

и данная задача сводится к предыдущему случаю — см. (7) и (8).

В заключение, не вдаваясь в сравнительный анализ других методов, рассмотрим особенности приведенного здесь алгоритма.

Алгоритм абсолютно устойчив, так как он базируется на прямом (а не итерационном) сеточном методе и так же, как и двухмерный вариант, обладает хорошей точностью.

О быстродействии можно судить по общему числу выполняемых арифметических действий. Так, 1-й вариант требует примерно $M\times N\times V\times(1{,}6+3{,}5\log_2(N^2V))$ обобщенных арифметических операций, а варианты 2-й части на $\sim(3{,}5\log_2 N)\times\times M\times N\times V$ операций больше, но являются более простыми в программировании, к тому же этот «излишек» в ряде случаев может быть скомпенсирован введением неравномерной сетки с меньшим количеством ярусов.

Необходимо отметить, что в первом варианте алгоритма последовательность преобразований по x и z можно поменять местами между собой, тогда вторая операция циклической редукции будет проводиться в x-направлении, и общее число обобщенных операций пропорционально MNV $(1{,}6 + 3{,}5 \log_2 V^2N)$. Это имеет смысл, если число дискрет в поперечном направлении меньше, чем в продольном, т. е. $V < N$.

Алгоритм позволяет экономно использовать память ЭЦВМ, так как почти все преобразования исходного массива $f_{i,k,l}$ с размером $M \times N \times V$ могут осуществляться «на месте» без существенного увеличения объема ОЗУ. Однако во многих случаях такая величина преобразуемого массива является чрезмерной, поэтому данный метод желательно применять при расчете на ЭЦВМ с большей емкостью оперативного запоминающего устройства.

Громоздкость алгоритма исчезает после составления и отладки программы.

Предложенная нами модификация алгоритма расчета полей пространственного заряда в трехмерных областях может применяться при моделировании довольно широкого класса задач электроники и физики плазмы наряду с другими известными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Романов В. П., Рошаль.** О решении уравнений Пуассона для области взаимодействия электронных приборов. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, XIV, № 5, с. 1097—1104.
2. **Романов П. В., Рошаль А. С., Галимуллин.** О расчете методом Монте-Карло плоского электронного потока в скрещенных полях. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1970, XIII, 7, с. 1096—1105.
3. **Шадрин А. А., Шеин А. Г.** Модификация «сверхбыстрого» алгоритма решения уравнения Пуассона для трехмерных областей взаимодействия электронных приборов. Ч. I. См. статью настоящего сборника.