

УДК 621.372.

А. А. Шадрин, А. Г. Шейн, канд. физ.-мат. наук

**МОДИФИКАЦИЯ «СВЕРХБЫСТРОГО»
АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ
ПРИБОРОВ. Ч. 1.**

Предложенный Хокни численный метод «сверхбыстрого» решения уравнения Пуассона [1] хорошо зарекомендовал себя при моделировании на ЭЦВМ ряда двумерных задач физики плазмы и электроники приборов СВЧ [2—4].

Быстрота и экономичность метода, а также довольно высокая точность получаемого решения делают целесообразным разработку аналогичного алгоритма для трехмерной геометрии, необходимость рассмотрения которой очевидна. Достаточно сказать, что кроме информации о боковой расфокусировке и краевых эффектах, получаемой в дополнение к двумерной модели, трехмерная теория позволяет рассмотреть также широкий класс приборов с аксиально-азимутальным и поперечно-продольным взаимодействием (магнетронные линзы, приборы *E*- и *MJ*-типов, мазеры циклотронного резонанса и др.), где сведение задачи к плоскому случаю не всегда возможно.

В данной статье приводится алгоритм нахождения полей пространственного заряда в трехмерных областях, ограниченных плоскими или коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при различных практически осуществимых распределениях потенциала на этих границах.

Этот алгоритм можно считать развитием алгоритма, приведенного в работе [5], поэтому для удобства сравнения по возможности сохраним принятые там обозначения.

**Прямоугольная геометрия пространства
взаимодействия**

Постановка задачи. Ищется решение $U(x, y, z)$ уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (1)$$

в прямоугольной трехмерной области $[0, L; 0, H; 0, W]$ (рис.), удовлетворяющее граничным условиям (ГУ), которые допускают разложение в ряды по ортогональным периодическим функциям в двух направлениях.

В направлении дрейфа электронного потока обычно применяются периодические ГУ:

$$U(x, y, z) = U(x \pm L, y, z), \quad (2)$$

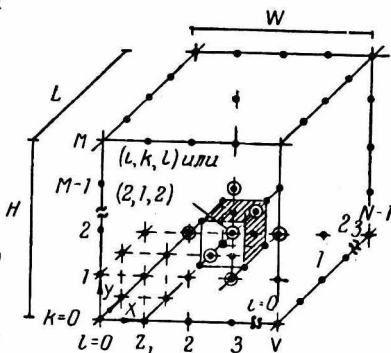
где L — длина волны основной гармоник возмущения или период системы.

Если пространство взаимодействия ограничено с боков металлическими стенками, то в этом направлении применяются нулевые ГУ:

$$U(x, y, 0) = U(x, y, W) = 0 \quad (3)$$

(W — ширина системы).

Практически любое заданное распределение потенциала на боковых электродах исследуемой модели может быть сведено к условию (3) введением определенной вспомогательной функции, обращающей граничный потенциал в нуль. При этом неоднородность граничных условий фигурирует в виде известной добавки к функции распределения зарядов $\hat{f}(x, y, z)$ в правой части уравнения (1). После получения решения истинное значение потенциала восстанавливается вычитанием вспомогательной функции.



Изображение трехмерной сетки, на которой решается уравнение Пуассона.

Иногда в сочетании с условием (3) может быть применено условие симметрии

$$U(x, y, z) = U(x, y, W - z), \quad (4)$$

которое позволяет вдвое сократить количество операций и объем оперативной памяти.

В этом направлении может быть применено и периодическое ГУ:

$$U(x, y, z) = U(x, y, z \pm W), \quad (5)$$

что имеет место, например, в приборах с широким пучком или со множеством пучков, заполняющих всю ширину системы, которая может иметь к тому же двумерную замедляющую структуру.

На верхней и нижней плоскостях («анод» и «катод») обычно задаются соответствующие потенциалы:

$$U(x, H, z) = U_a(x, z); \quad (6)$$

$$U(x, 0, z) = U_c(x, z). \quad (7)$$

Разобьем все пространство взаимодействия (см. рис.) на элементарные ячейки-параллелепипеды и преобразуем уравнение (1) в систему разностных уравнений, связывающих потенциалы и заряды в ячейках

$$\alpha^2 (U_{i+1, k, l} + U_{i-1, k, l}) + (U_{i, k+1, l} + U_{i, k-1, l}) + \beta^2 (U_{i, k, l+1} + U_{i, k, l-1}) - 2(1 + \alpha^2 + \beta^2) U_{i, k, l} = f_{i, k, l}^{(0)}, \quad (8)$$

где i, k, l — целочисленные индексы узлов «арматуры», или соответствующих им элементарных ячеек-параллелепипедов со сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$;

$$\Delta x = \frac{L}{N}; \quad \Delta y = \frac{H}{M}; \quad \Delta z = \frac{W}{V}; \quad \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \beta = \frac{\Delta y}{\Delta z}; \quad (9)$$

$f_{i, k, l}^{(0)} = (\Delta y)^2 f_{i, k}$, с точностью до постоянного множителя — заряд внутри ячейки;

$$i = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 1, 2, \dots, M-1; \\ l = \begin{cases} 1, 2, \dots, V-1 & \text{— для ГУ (3);} \\ 1, 2, \dots, V/2 & \text{— для ГУ (3) совместно с (4);} \\ 0, 1, \dots, V-1 & \text{— для ГУ (5).} \end{cases}$$

Граничные условия (2)—(7) дают соответствующие дополнительные равенства:

$$U_{i, k, l} = U_{i \pm N, k, l}; \quad (10)$$

$$U_{i, k, l} = -U_{i, k, -l}, \quad U_{i, k, V-l} = -U_{i, k, V+l}, \quad (11)$$

причем

$$U_{i, k, 0} = U_{i, k, V} = 0;$$

$$U_{i, k, l} = U_{i, k, V-l}; \quad (12)$$

$$U_{i, k, l} = U_{i, k, l \pm V}; \quad (13)$$

$$U_{i, M, l} = U_{a_l, l}; \quad (14)$$

$$U_{i, 0, l} = U_{c_l, l}. \quad (15)$$

Значения $f_{i, k, l}^{(0)}$ при необходимости также могут быть продолжены за пределы действия индексов i и l по аналогии с условиями (10) — (13).

Применяемый метод требует, чтобы числа M, N, V , выражающие количество дискретных разбиений по каждому направлению, разлагались на простые, желательно малые, целые множители. Удобнее всего выбрать их кратными целым степеням 2. Поэтому возьмем

$$N = q2^T, \quad M = p2^K \quad \text{и} \quad V = r2^E, \quad (16)$$

где p, q, r — простые, а T, K и E — целые числа.

Алгоритм решения

а) *Исключение нечетных ярусов* приводит к следующей системе уравнений, связывающих значения $U_{i, k, l}$ только на четных «этажах» «арматуры» ($k = 2, 4, \dots, M - 2$):

$$\begin{aligned}
 & U_{i, k+2, l} + U_{i, k-2, l} - \alpha^4 (U_{i+2, k, l} + U_{i-2, k, l}) - \\
 & - \beta^4 (U_{i, k, l+2} + U_{i, k, l-2}) + 4(1 + \alpha^2 + \beta^2) [\alpha^2 (U_{i+1, k, l} + U_{i-1, k, l}) + \\
 & + \beta^2 (U_{i, k, l+1} + U_{i, k, l-1})] - 2\alpha^2\beta^2 (U_{i+1, k, l+1} + U_{i-1, k, l+1} + \\
 & + U_{i+1, k, l-1} + U_{i-1, k, l-1}) - 2(1 + \alpha^2 + \beta^2) (1 + 3\alpha^2 + 3\beta^2) U_{i, k, l} = \\
 & = f_{i, k, l}^{(1)}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

При этом для всех четных ярусов, за исключением граничных, вычисляется трехмерный массив

$$\begin{aligned}
 f_{i, k, l}^{(1)} = & 2(1 + \alpha^2 + \beta^2) f_{i, k, l}^{(0)} - \alpha^2 (f_{i+1, k, l}^{(0)} + f_{i-1, k, l}^{(0)}) - \beta^2 \times \\
 & \times (f_{i, k, l+1}^{(0)} + f_{i, k, l-1}^{(0)}) + f_{i, k+1, l}^{(0)} + f_{i, k-1, l}^{(0)},
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

который записывается на месте массива $f_{i, k, l}^{(0)}$.

б) *Двумерный Фурье-анализ на четных ярусах* преобразует систему (17) в ряд независимых подсистем, каждая из которых связывает одноименные коэффициенты Фурье потенциалов и распределения зарядов на всех четных ярусах и имеет вид:

$$V_{j, k+2, m}^{\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}} - \lambda_{j, m}^{(1)} V_{j, k, m}^{\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}} + V_{j, k-2, m}^{\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}} = \Phi_{j, k, m}^{(1)\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}},
 \tag{19}$$

где

$$\lambda_{j, m}^{(1)} = 4 \left[\alpha^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi j}{N} \right) + \beta^2 \left(1 + \cos \frac{\delta \pi m}{V} \right) + 1 \right]^2 - 2;
 \tag{20}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{для условий (11) совместно с (12),} \\ 2 & \text{для условий (13),} \end{cases}$$

j, m — номера гармоник Фурье по направлениям x и z соответственно:

$$V_{j, k, m}^{\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}}, \Phi_{j, k, m}^{(1)\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}} \text{ — косинус-косинус } (V_{j, m}^{c, c} \text{ и } \Phi_{j, m}^{(1)c, c}),$$

косинус-синус ($V_{j, m}^{c, s}$ и $\Phi_{j, m}^{(1)c, s}$), синус-косинус ($V_{j, m}^{s, c}$ и $\Phi_{j, m}^{(1)s, c}$) и синус-синус ($V_{j, m}^{ss}$ и $\Phi_{j, m}^{(1)ss}$) — коэффициенты Фурье потенциала и распределения зарядов;

$$V_{j, m}^{cs} = \frac{4}{NV} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{V-1} U_{i, l} \sin \frac{2\pi i j}{N} \sin \frac{2\pi l m}{V}
 \tag{21}$$

$$(j = 1, 2, \dots, N/2 - 1; m = 1, 2, \dots, V/2 - 1);$$

$$V_{l, m}^{ss} = \frac{4}{NV} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{V-1} U_{i, l} \cos \frac{2\pi i j}{N} \sin \frac{2\pi l m}{V}
 \tag{21a}$$

$$(j = 0, 1, \dots, N/2; m = 1, 2, \dots, V/2 - 1);$$

$$V_{j,m}^{sc} = \frac{4}{NV} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=0}^{V-1} U_{l,i} \sin \frac{2\pi lj}{N} \cos \frac{2\pi lm}{V} \quad (216)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N/2 - 1; m = 0, 1, \dots, V/2);$$

$$V_{j,m}^{co} = \frac{4}{NV} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{V-1} U_{l,i} \cos \frac{2\pi lj}{N} \cos \frac{2\pi lm}{V} \quad (21B)$$

$$(j = 0, 1, \dots, N/2; m = 0, 1, \dots, V/2).$$

Для нулевых ГУ $V_{j,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \equiv 0$;

$$V_{j,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \frac{4}{NV} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{V-1} U_{l,i} \cos \frac{2\pi lj}{N} \sin \frac{\pi lm}{V} \quad (22)$$

$$(j = 0, 1, \dots, N/2; m = 1, 2, \dots, V - 1);$$

$$V_{j,m}^{ss} = \frac{4}{NV} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{V-1} U_{l,i} \sin \frac{2\pi lj}{N} \sin \frac{\pi lm}{V} \quad (22a)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N/2 - 1; m = 1, 2, \dots, V - 1),$$

что с использованием соотношения

$$\sin \frac{\pi m (V - l)}{V} = (-1)^{m+1} \sin \frac{\pi ml}{V}$$

преобразуется для нечетных m к виду

$$V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \frac{4}{NV} \sum_{l=\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{N-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{2\pi lj}{N} \right) \\ \sin \left(\frac{2\pi lj}{N} \right) \end{array} \right\} \left[(-1)^{\frac{m-1}{2}} U_{l, V/2} + \sum_{i=1}^{V/2-1} (U_{l,i} + \right. \\ \left. + U_{l, V-i}) \sin \frac{\pi lm}{V} \right] \quad (23)$$

$$(m = 1, 3, \dots, V - 1),$$

а для чётных m — к виду

$$V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \frac{4}{NV} \sum_{l=\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{N-1} \sum_{i=1}^{V/2-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{2\pi lj}{N} \right) \\ \sin \left(\frac{2\pi lj}{N} \right) \end{array} \right\} (U_{l,i} - \\ - U_{l, V-i}) \sin \frac{\pi lm}{V} \quad (m = 2, 4, \dots, V - 2). \quad (23a)$$

При выполнении условия симметрии (12) последнее выражение тождественно равно 0, и операция преобразования осуществляется только для нечетных m по формуле (23a).

Аналогичным образом Фурье-анализ проводится для распределения зарядов

$$f_{i,l}^{(1)} \rightarrow \Phi_{j,m}^{(1)} \begin{matrix} \{cc\} \\ \{ss\} \end{matrix} \quad (24)$$

и для граничных потенциалов

$$\begin{aligned} U_{a_i,l} &\rightarrow V_{a_j,m} \begin{matrix} \{cc\} \\ \{ss\} \end{matrix}; \\ U_{c_i,l} &\rightarrow V_{a_j,m} \begin{matrix} \{cc\} \\ \{ss\} \end{matrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Необходимо отметить, что в случае нулевых граничных условий (11) ряд синус-коэффициентов по z получается вдвое длиннее, чем при условии периодичности (13). Поэтому представляется целесообразным пренебречь высшими гармониками, начиная с $m = V/2$, что позволит вдвое сократить число преобразований при определенной точности вычислений, которая гарантируется условием малости амплитуд высших гармоник.

Программа для ЭЦВМ должна предусматривать выполнение операций (24) и (25), осуществляемых по одному из известных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) [6, 8], а также вычисление $\lambda_{jm}^{(1)}$ по формуле (20) с учетом особенностей, обусловливаемых граничными условиями.

в) *Циклическая редукция* проводится со всеми имеющимися Фурье-коэффициентами и заключается в последовательном исключении промежуточных горизонтальных ярусов, что приводит к решению подсистемы с минимальным числом уравнений с последующим восстановлением по найденному решению промежуточных значений потенциала [1, 5].

На втором шаге прямого хода циклической редукции ($r = 2, 3, \dots, k$) вычисляем

$$\lambda^{(r)} = (\lambda^{(r-1)})^2 - 2 \quad (26)$$

и для

$$\begin{aligned} k &= 2^r, 2 \cdot 2^r, \dots, (M-2)^r; \\ \Phi_k^{(r)} &= \Phi_{k+2^{r-1}}^{(r-1)} + \lambda^{(r-1)} \Phi_k^{(r-1)} + \Phi_{k-2^{r-1}} \end{aligned} \quad (27)$$

(индексы гармоник j, m, c, s опущены).

После R -редукции остается $(p-1)$ уравнений

$$\begin{aligned} V_{k+\frac{M}{p}} - \lambda^{(k)} V_k + V_{k-\frac{M}{p}} &= \Phi_k^{(k)} \\ \left(k = \frac{M}{p}, \frac{2M}{p}, \dots, M - \frac{M}{p} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

из которых, используя вычисленные ранее значения гармоник граничных потенциалов, находим соответствующие значения V_k , а затем на обратном ходе редукции — остальные коэффициенты на всех ярусах:

$$V_k = (V_{k+2r} + V_{k-2r} - \Phi^{(r)}) / (\lambda^{(r)}) \quad (29)$$

$$(r = R - 1, R - 2, \dots, 1; k = 2r, 2r + 2r + 1, 2r + 2 \cdot 2r + 1, \dots, M - 2r).$$

Для $p = 2$ обратный ход начинается с вычисления

$$V_{M/2} = \frac{V_a + V_c - \Phi_{M/2}}{\lambda^{(k)}}. \quad (30)$$

г) *Одномерный Фурье-синтез на четных ярусах* осуществляется в направлении z (по индексу m) над найденными значениями гармоник потенциала $V_{j,k,m}^{\begin{smallmatrix} cc \\ ss \end{smallmatrix}}$.

Для периодических ГУ (13) это преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{l,l}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \frac{1}{2} \left[V_{l,0}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot c + (-1)^l V_{l,0}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot c + \sum_{m=1}^{V/2-1} \left(V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot c \cos \left(\frac{2\pi lm}{V} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s \sin \left(\frac{2\pi lm}{V} \right) \right) \right], \quad (31) \end{aligned}$$

а для нулевых ГУ (11)

$$\bar{V}_{l,l}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \sum_{m=1}^{V-1} V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s \sin \frac{\pi lm}{V}, \quad (32)$$

или для четных l

$$\bar{V}_{l,l}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = \sum_{m=1}^{V/2-1} \left[V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s + (-1)^{l/2} V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s \right] \sin \frac{\pi lm}{V}, \quad (33)$$

а для нечетных

$$\bar{V}_{l,l}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = (-1)^{l-1/2} V_{l,V/2}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s + \sum_{m=1}^{V/2-1} \left(V_{l,m}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} \cdot s \sin \frac{\pi lm}{V} + (-1)^{l-1/2} \cos \frac{\pi lm}{V} \right). \quad (33a)$$

Здесь

$$j = \begin{cases} 0, 1, \dots, N/2 \text{ для } V_{j,l}^c; \\ 1, 2, \dots, N/2 - 1 \text{ для } V_{j,l}^s. \end{cases}$$

а индекс $k = 0, 2, \dots, M$ опущен.

При выполнении условия симметрии (12) суммирование в (32) или (33) проводится только по нечетным m .

д) *Одномерный Фурье-анализ на нечетных ярусах* осуществляется в продольном направлении x (по индексу i), в результате чего исходная система (8) преобразуется к виду

$$\bar{V}_{j,k,l+1}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} - \mu_j^{(0)} \bar{V}_{j,k,l}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} + \bar{V}_{j,k,l-1}^{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}} = Q_{j,k,l}^{(0)\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}}. \quad (34)$$

где

$$\mu^{(0)} = \frac{1 + \beta^2 + \alpha^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{N}\right)}{\beta^2}; \quad (35)$$

$$Q_{j,k,l}^{(0)\{s\}} = \left(\overline{\Phi}_{j,k,l}^{(0)\{s\}} - \overline{V}_{j,k+1,l}^{(0)\{s\}} - \overline{V}_{j,k-1,l}^{(0)\{s\}} \right) \beta^2; \quad (36)$$

$\overline{V}_{j,k\pm 1,l}^{(0)\{s\}}$ — известные значения гармоник потенциала на четных ярусах;

$\overline{\Phi}_{j,k,l}^{(0)\{s\}}$ — прямое преобразование Фурье распределения потенциала $f_{j,k,l}^{(0)}$ на нечетных ярусах;

$$f_{j,k,l}^{(0)} \rightarrow \overline{\Phi}_{j,k,l}^{(0)\{s\}} \quad (37)$$

На этом этапе по всем j, l и по $k = 1, 3, 5, \dots, M-1$ проводится вычисление (37) по алгоритму одномерного БПФ и определяются значения (35) и (36).

е) Циклическая редукция на нечетных ярусах осуществляется в z -направлении (по индексу l) для всех j и $k = 1, 3, 5, \dots, M-1$.

После ϵ -й редукции ($\epsilon = 1, 2, \dots, T$) получаем систему $V/2^\epsilon$ уравнений (индексы k, j, c, s опускаем):

$$\overline{V}_{l+2^\epsilon} - \mu^{(\epsilon)} \overline{V}_l + \overline{V}_{l-2^\epsilon} = Q_l^{(\epsilon)}. \quad (38)$$

При этом на каждом ϵ -шаге вычисляются

$$\mu^{(\epsilon)} = (\mu^{(\epsilon-1)})^2 - 2 \quad (39)$$

и

$$Q_l^{(\epsilon)} = Q_{l+2^{(\epsilon-1)}}^{(\epsilon-1)} + \mu^{(\epsilon-1)} Q_l^{(\epsilon-1)} + Q_{l-2^{(\epsilon-1)}}^{(\epsilon-1)} \quad (40)$$

с учетом ГУ типа (11) — (13), которые распространяются также на $Q_l^{(\epsilon)}$ и \overline{V}_l ($l = 0, 2^\epsilon, 2 \cdot 2^\epsilon, \dots, V - 2^\epsilon$), причем для нулевых условий типа (11) $l = 0$ исключается, так как $Q_0^{(\epsilon)} = \overline{V}_0 = 0$, а если выполняется еще и условие симметрии, то

$$l = 2^\epsilon, 2 \cdot 2^\epsilon, \dots, V/2$$

и

$$Q_{V/2}^{(\epsilon)} = 2Q_{V/2-2^{\epsilon-1}}^{(\epsilon-1)} + \mu^{(\epsilon-1)} Q_{V/2}^{(\epsilon-1)}$$

при $\rho = 2$.

После E -й редукции в случае периодических условий типа (13) останется ρ уравнений (38) с индексами $l = 0, \frac{V}{\rho}, \frac{2V}{\rho}, \dots, V - \frac{V}{\rho}$ и $\rho - 1$ уравнений с индексами $l = \frac{V}{\rho}, \frac{2V}{\rho}, \dots, V - \frac{V}{\rho}$ в случае нулевых условий типа (11). Из этих уравнений находим соответствующие \overline{V}_l , а затем на обратном ходе редукции — все

остальные значения одномерных гармоник потенциала, пользуясь соотношением

$$\bar{V}_l = (\bar{V}_{l+2^\varepsilon} + \bar{V}_{l-2^\varepsilon} - Q_l^{(\varepsilon)})/\mu^{(\varepsilon)} \quad (41)$$

для

$$\varepsilon = E - 1, E - 2, \dots, 0 \text{ и } l = 2^\varepsilon, 2^\varepsilon + 2^{\varepsilon+1}, 2^\varepsilon + 2 \cdot 2^{\varepsilon+1}, \dots, V - 2^\varepsilon.$$

Для $\rho = 2$ обратный ход начинается с последовательного вычисления

$$\bar{V}_0 = -(\mu^{(E)}Q^{(E)} - 2Q_{V/2}^{(E)})/[\mu^{(E)}^2 - 4] \quad (42)$$

и

$$\bar{V}_{V/2} = (2\bar{V}_0 - Q_{V/2}^{(E)})/\mu^{(E)} \quad (43)$$

при периодических ГУ или с вычисления

$$\bar{V}_{V/2} = -\frac{Q_{V/2}^{(E)}}{\mu^{(E)}} \quad (44)$$

при нулевых ГУ по индексу l .

ж) *Общий одномерный Фурье-синтез* проводится для всех k и l по индексу j (в продольном x -направлении) и является заключительной операцией алгоритма, определяющей значения потенциала во всех узлах сетки:

$$U_{l, k, l} = \frac{1}{2} (\bar{V}_{0, k, l}^c + (-1)^i \bar{V}_{N/2, k, l}^c) + \sum_{j=1}^{N/2-1} \left(\bar{V}_{l, k, l}^c \cos \frac{2\pi j}{N} + \bar{V}_{l, k, l}^s \sin \frac{2\pi j}{N} \right). \quad (45)$$

Здесь, как и ранее, желательно использовать алгоритм БПФ.

Примечание. Выполнение циклических редукций в) и е) может быть ускорено, если $\lambda^{(r_0)}, \mu^{(\varepsilon_0)} > 10^5 \div 10^7$ ($r_0 < R, \varepsilon_0 < E$) [1,5]. При этом вычисления на прямом ходе редукции прекращаются и «перескакивают» на соответствующий шаг обратного хода, начиная с определения

$$V_k = -\Phi_k^{(r_0)}/(\lambda^{(r_0)}) \quad (46)$$

или

$$\bar{V}_l = -Q_l^{(\varepsilon_0)}/(\mu^{(\varepsilon_0)}), \quad (47)$$

где

$$k = 2^{r_0}, 2 \cdot 2^{r_0}, \dots, M - 2^{r_0}, \text{ а } l = 0, 2^{\varepsilon_0}, \dots, V - 2^{\varepsilon_0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hockney R. W. A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis, journal of the ACM, vol. 12, № 1, january 1965, p.34—53.
2. Романов В. П., Рошаль А. С., Галимуллин В. И. О расчете методом Монте-Карло плоского электронного потока в скрещенных полях.—«Изв. вузов. Радиофизика»; XIII, 7, 1970, с. 1096—1105.

3. Романов В. П., Рошаль А. С., Галимуллин В. И. О расчете методом Монте-Карло цилиндрического электронного потока в скрещенных полях.—«Изв. вузов. Радиофизика», 1970, XIII, 10, с. 1554—1562.
4. Yu S. P., Kooyers G. P., Vupeman O. Time — Dependent Computer Analysis of Electron — vare Interaction in Crossed Fields, J of Applied Physics, v. 36, № 8, August 1965, p. 256—300.
5. Романов В. П., Рошаль А. С. О решении уравнения Пуассона для области взаимодействия электронных приборов.— «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, XIV, 7, с. 197—1104.
6. — «Тр. ин-та инж. по электротехн. и радиоэлектронике» (русский перевод), 1967, т. 55, № 10, с. 154—163.
7. IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, June 1967 vol. AV-15, Special Issue on FFT, p. 95 — 133.
8. IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, June 1969, vol. AV — 17, Special Issue on FFT, p. 48—74 .