

В. И. Гостев

ПЕРЕДАТОЧНАЯ МАТРИЦА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСИЛИТЕЛЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Рассматриваются корректирующие усилители переменного тока (рис. 1), которые состоят из собственно усилителя переменного тока, имеющего обычную передаточную функцию $G(s)$, и канала обратной связи, включающего схему

демодулятор — цепь постоянного тока — модулятор, $H(s)$ — передаточная функция цепи постоянного тока. Строгая теория таких усилителей до настоящего времени не разработана (особенно усилитель переменного тока с передаточной функцией $G(s)$) обычно представляет собой следящую систему воспроизведения модулированных величин и его теория разработана достаточно полно [1, 2].

Ниже получена передаточная матрица усилителей (рис. 1), которая определяет эквивалентные (для огибающих амплитудно-модулированных сигналов)

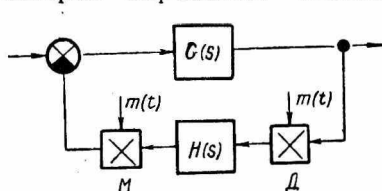


Рис. 1.

передаточные функции усилителя и является основой для анализа и синтеза схемы корректирующего усилителя. Модулятор M и демодулятор D предполагаем идеальными синхронными переключателями с функциями переключения $m(t)$ в виде прямоугольной волны с угловой несущей частотой ω_n . Передаточные функции усилителя переменного тока и цепи постоянного тока, включенной между демодулятором и модулятором, представим в виде [1—4]

$$G(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i b_i}{s + b_i}; \quad (1)$$

$$H(s) = \sum_{v=1}^l \frac{\alpha_v b_v}{s + b_v}. \quad (2)$$

В большинстве практических случаев параметры цепи постоянного тока

$$b_v \ll 0,1 \frac{\omega_n}{\pi} \quad (3)$$

Усилитель переменного тока описывается эквивалентной передаточной матрицей \bar{G} (табл. 1), в которой

Таблица 1

Эквивалентная передаточная матрица \bar{G} усилителя переменного тока

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin h\omega_n t$	$\cos h\omega_n t$
$\sin h\omega_n t$	G_h	L_h
$\cos h\omega_n t$	$-L_h$	G_h

$$G_h = G_{np,h}(jK) = \frac{G[j\omega_n(K+h)] - G[j\omega_n(K-h)]}{2} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{A_i(A_i + jK)}{(A_i + jK)^2 + h^2} \quad (4)$$

— прямые эквивалентные передаточные функции (для огибающих на прямых несущих $\sin h\omega_n t$);

$$L_h = G_{кв, h}(jK) = \frac{G[j\omega_n(K+h)] - G[j\omega_n(K-h)]}{2j} = \sum_{l=1}^m \alpha_l \frac{-hA_l}{(A_l + jK)^2 + h^2} \quad (5)$$

— квадратурные эквивалентные передаточные функции (для огибающих на несущих $\cos h\omega_n t$), $h = 1, 3, 5, \dots$;

$A_l = \frac{b_l}{\omega_n}$; $K = \frac{\Omega}{\omega_n}$; Ω — угловая частота огибающих.

При условии (3) схема демодулятор — цепь постоянного тока — модулятор с весьма высокой для практики точностью описывается эквивалентной передаточной матрицей \bar{H} (табл. 2), в которой

$$H_{hk} = H_{прhk}(jK) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1}^l \frac{\alpha_v}{hk} \frac{A_v}{A_v + jK}; \quad (6)$$

$A_v = \frac{b_v}{\omega_n}$; $h = 1, 3, 5, \dots$, $k = 1, 3, 5, \dots$, (существенно отметить, что $H_{hk} = H_{kh}$ и $H_{hk}H_{ln} = H_{hl}H_{kn}$, т. е. величина функции H зависит от значения индексов, но не от порядка их записи).

Эквивалентная передаточная матрица корректирующего усилителя

$$\bar{G}_{кв} = [\bar{I} + \bar{G}\bar{H}]^{-1}G, \quad (7)$$

где \bar{I} — единичная матрица.

Запишем бесконечную функциональную матрицу $[\bar{I} + \bar{G}\bar{H}]$ корректирующего усилителя

(рис. 1) в виде табл. 3. Усекая эту матрицу, последовательно определяем

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)} &= 1 + G_1 H_{11}; \\ \Delta^{(1)} &= 1 + G_1 H_{11} + G_3 H_{33}; \\ \Delta^{(2)} &= 1 + G_1 H_{11} + G_3 H_{33} + G_5 H_{55}; \\ \Delta^{(N)} &= 1 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{2N+1} G_n H_{nn}, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда

$$\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta^{(N)} = 1 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} G_n H_{nn}. \quad (9)$$

738495

Таблица 3

Бесконечная функциональная матрица $[\Gamma + \overline{GH}]$ корректирующего усилителя

Входные несущие	Выходные несущие					
	$\sin \omega_n t$	$\cos \omega_n t$	$\sin 3\omega_n t$	$\cos 3\omega_n t$	$\sin 5\omega_n t$	$\cos 5\omega_n t$
$\sin \omega_n t$	$1 + G_1 H_{11}$	0	$G_1 H_{13}$	0	$G_1 H_{15}$	0
$\cos \omega_n t$	$-L_1 H_{11}$	1	$-L_1 H_{13}$	0	$-L_1 H_{15}$	0
$\sin 3\omega_n t$	$G_3 H_{31}$	0	$1 + G_3 H_{33}$	0	$G_3 H_{35}$	0
$\cos 3\omega_n t$	$-L_3 H_{31}$	0	$-L_3 H_{33}$	1	$-L_3 H_{35}$	0
$\sin 5\omega_n t$	$G_5 H_{51}$	0	$G_5 H_{53}$	0	$1 + G_5 H_{55}$	0
$\cos 5\omega_n t$	$-L_5 H_{51}$	0	$-L_5 H_{53}$	0	$-L_5 H_{55}$	1

Бесконечный функциональный определитель Δ является нормальным и может быть найден в замкнутой форме.

Подставляя (4) при $h = n$ и (6) при $h = k = n$ в (9), определяем

$$\Delta = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^i \frac{\alpha_\nu A_\nu}{A_\nu + jK} \cdot \sum_{l=1}^m \alpha_l A_l \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_l + jK}{(A_l + jK)^2 + n^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{z}{z^2 + n^2} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4z} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

формулу (10) перепишем в окончательном виде:

$$\Delta = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^i \frac{\alpha_\nu A_\nu}{A_\nu + jK} \cdot \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_l A_l}{A_l + jK} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} (A_l + jK)}{A_l + jK} \right]. \quad (12)$$

Изучая бесконечную матрицу (табл. 3), можно также определить, что

$$\Delta_{11} = 1 + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} G_n H_{nn} = \Delta - G_1 H_{11}; \quad (13)$$

$$\Delta_{31} = -G_1 H_{13}; \quad (14)$$

$$\Delta_{21} = \Delta_{41} = 0; \quad (15)$$

(вообще все $\Delta_{i\nu} = 0$ при $i = 2, 4, 6, \dots$ и $i \neq \nu$)

$$\Delta_{22} = \Delta; \quad (16)$$

(вообще все $\Delta_{ii} = \Delta$ при $i = 2, 4, 6, \dots$)

$$\Delta_{12} = L_1 H_{11}; \quad (17)$$

$$\Delta_{32} = L_1 H_{13} \quad (18)$$

и так далее.

Вследствие нормальности определителя Δ обращение бесконечной функциональной матрицы $[\bar{J} = \bar{G}H]$ выполняется обычным путем. Бесконечная функциональная матрица корректирующего усилителя $\bar{G}_{ку}$, определяемая формулой (7), записывается в виде табл. 4, в которой комплексные эквивалентные передаточные функции корректирующего усилителя для прямых сигналов на несущей частоте

$$\begin{aligned} c_{11}(jK) &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} G_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} L_1 = \left(1 - \frac{G_1 H_{11}}{\Delta}\right) G_1; \\ c_{12}(jK) &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} L_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} G_1 = \left(1 - \frac{G_1 H_{11}}{\Delta}\right) L_1; \\ c_{13}(jK) &= \frac{\Delta_{31}}{\Delta} G_3 - \frac{\Delta_{41}}{\Delta} L_3 = -\frac{G_1 H_{13}}{\Delta} G_3; \\ c_{14}(jK) &= \frac{\Delta_{31}}{\Delta} L_3 + \frac{\Delta_{41}}{\Delta} G_3 = -\frac{G_1 H_{13}}{\Delta} L_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Т а б л и ц а 4
Бесконечная функциональная матрица $\bar{G}_{ку}$ корректирующего усилителя переменного тока

Входные несущие	Выходные несущие				
	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$	$\sin 3\omega_H t$	$\cos 3\omega_H t$...
$\sin \omega_H t$	$c_{11}(jK)$	$c_{12}(jK)$	$c_{13}(jK)$	$c_{14}(jK)$...
$\cos \omega_H t$	$c_{21}(jK)$	$c_{22}(jK)$	$c_{23}(jK)$	$c_{24}(jK)$...
$\sin 3\omega_H t$	$c_{31}(jK)$	$c_{32}(jK)$	$c_{33}(jK)$	$c_{34}(jK)$...
$\cos 3\omega_H t$	$c_{41}(jK)$	$c_{42}(jK)$	$c_{43}(jK)$	$c_{44}(jK)$...
...

Комплексные эквивалентные передаточные функции корректирующего усилителя для квадратурных сигналов на несущей частоте

$$\begin{aligned} c_{21}(jK) &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} G_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} L_1 = \left(\frac{G_1 H_{11}}{\Delta} - 1\right) L_1; \\ c_{22}(jK) &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} L_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} G_1 = \frac{H_{11} L_1^2}{\Delta} + G_1; \end{aligned} \quad (20)$$

$$c_{23}(jK) = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} G_3 - \frac{\Delta_{42}}{\Delta} L_3 = \frac{L_1 H_{13}}{\Delta} G_3,$$

$$c_{24}(jK) = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} L_3 + \frac{\Delta_{42}}{\Delta} G_3 = \frac{L_1 H_{13}}{\Delta} L_3$$

и так далее.

Комплексная эквивалентная передаточная функция $c_{11}(jK)$, выделенная в табл. 4 двойной линией, определяют основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику корректирующего усилителя.

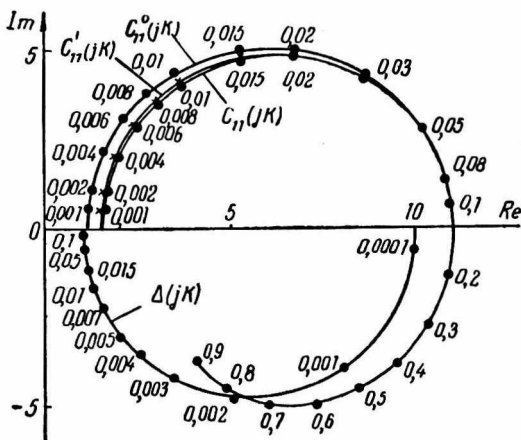


Рис. 2.

Пример. Корректирующий усилитель (рис. 1) состоит из полосового усилителя переменного тока с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{\alpha T_1 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\alpha b_2}{b_1 - b_2} \left(\frac{b_1}{s + b_1} - \frac{b_2}{s + b_2} \right) \quad (21)$$

и схемы демодулятор — цепь постоянного тока — модулятор с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{1 + T_3 s} = \frac{b_3}{s + b_3}. \quad (22)$$

Усилитель работает на несущей частоте 400 гц $\left(\omega_n \approx 2512 \frac{1}{\text{сек}} \right)$ и имеет следующие параметры: $\alpha = 20,2$, $b_1 = 1/T_1 = 2260,8 \frac{1}{\text{сек}}$ ($A_1 = b_1/\omega_n = 0,9$); $b_2 = 1/T_2 = 2763,2 \frac{1}{\text{сек}}$ ($A_2 = b_2/\omega_n = 1,1$), $b_3 = 1/T_3 = 4,49 \frac{1}{\text{сек}}$ ($A_3 = b_3/\omega_n \approx 0,00179$). На вход усилителя поступает амплитудно-модулированный сигнал на несущей $\sin \omega_n t$. Требуется определить комплексные эквивалентные передаточные функции усилителя для огибающих входного сигнала на этой несущей, записанные в выражениях (19).

Для рассматриваемого в примере усилителя по формулам (4), (5) и (6) имеем

$$G_n = \alpha \frac{A_2}{A_1 - A_2} \left[\frac{A_1(A_1 + jK)}{(A_1 + jK)^2 + n^2} - \frac{A_2(A_2 + jK)}{(A_2 + jK)^2 + n^2} \right]; \quad (23)$$

$$L_n = -\alpha \frac{A_2}{A_1 - A_2} \left[\frac{A_1 n}{(A_1 + jK)^2 + n^2} - \frac{A_2 n}{(A_2 + jK)^2 + n^2} \right]; \quad (24)$$

$$H_{nn} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \frac{A_3}{A_3 + jK}. \quad (25)$$

Из выражения (12) находим

$$\Delta = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{A_3}{A_3 + jK} \alpha \times \left\{ \frac{A_2}{A_1 - A_2} \left[\frac{A_1}{A_1 + jK} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} (A_1 + jK)}{A_1 + jK} \right] - \frac{A_2}{A_2 + jK} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} (A_2 + jK)}{A_2 + jK} \right] \right] \right\}. \quad (26)$$

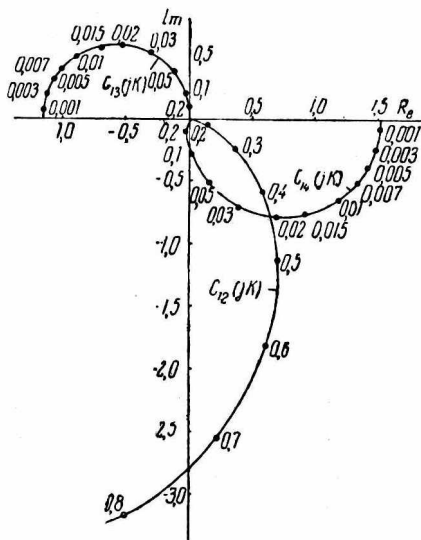


Рис. 3.

На рис. 2 и 3 изображены функции $c_{11}(jK)$, $c_{12}(jK)$, $c_{13}(jK)$, $c_{14}(jK)$, рассчитанные по формулам (19), (23) —

(25) и функция $\Delta(jK)$, рассчитанная по формуле (26). На рис. 2 также изображены функции $c_{11}^{(0)}(jK)$ и $c_{11}^{(1)}(jK)$, представляющие собой основные эквивалентные передаточные функции усилителя при условии циркуляции в замкнутом контуре усилителя только первых (в табл. 3 сохраняются только элементы с индексами $h = 1$ и $k = 1$) и первых и третьих (в табл. 3 сохраняются только элементы с индексами 1 и 3) гармоник. Рассмотрев рис. 2, можно сделать вывод, что все гармоники, выше третьей, практически не влияют на основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику корректирующего усилителя и поэтому могут при расчете не учитываться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проектирование следящих систем малой мощности. М., Судпромгиз, 1958. 436 с. Авт.: В. А. Бесекерский, В. П. Орлов, Л. В. Полонская и др.
2. Бесекерский В. А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1970. 184 с.

3. Гостев В. И. Эквивалентные передаточные функции схем демодулятор — цепь постоянного тока — модулятор. I, II.— «Автоматика и телемеханика», 1967, № 9, 11, с. 18—21.
4. Гостев В. И. Основная передаточная матрица трактов демодулятор — цепь постоянного тока — модулятор.— Сб. «Автоматика и телемеханика», 1971, № 3, с. 2—7.