

УДК 621.373.072.9

О. И. Губернаторов,
канд. техн. наук

**УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦИФРОВОГО
СИНТЕЗАТОРА ЧАСТОТ, ХАРАКТЕР И ВРЕМЯ
УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СКАЧКЕ
РАЗНОСТИ ЧАСТОТ СИГНАЛОВ НА ВХОДЕ
ФАЗОВОГО ДЕТЕКТОРА**

В работе [1] определены передаточные характеристики отдельных звеньев синтезатора, структурная схема которого изображена на рис. 1.

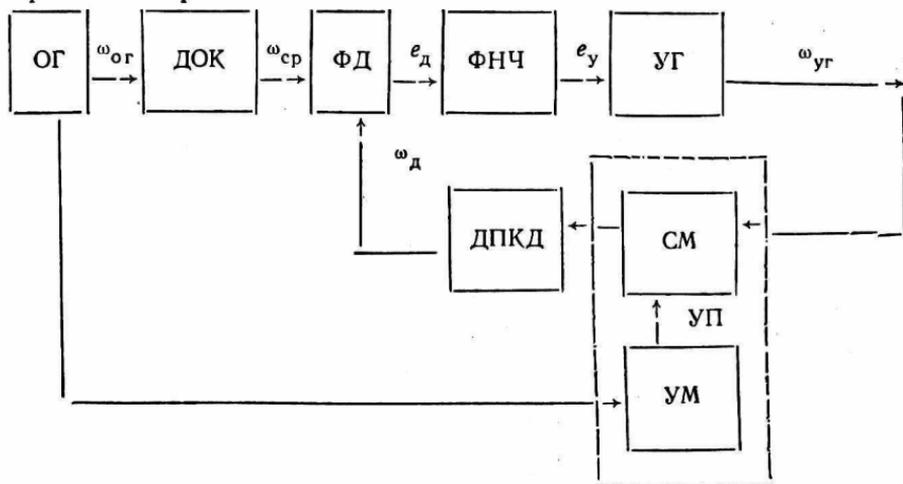


Рис. 1. Структурная схема синтезатора частот:

ОГ — опорный генератор; ДОК — делитель опорного канала; ФД — фазовый детектор; ФНЧ — фильтр нижних частот; УГ — управляемый генератор; ДПКД — делитель с переменным коэффициентом деления; УП — устройство переноса, включающее в себя умножитель УМ и смеситель СМ.

Материал данной статьи посвящен дальнейшему теоретическому анализу указанной схемы: находится передаточная

функция (уравнение движения) в удобной для анализа форме; исследуется характер и время процесса установления частоты и фазы колебаний на выходе синтезатора при скачке разности частот сигналов на входе фазового детектора. Анализ проведен в предположении эквивалентности дискретной системы непрерывной системе.

1. Уравнение движения

Исключим из схемы рис. 1 элементы, не имеющие принципиального значения для процесса преобразования сигнала: устройство переноса УП, опорный генератор ОГ и делитель частоты опорного канала. Действительно, с помощью первого осуществляется линейная трансформация частоты управляемого генератора, а с помощью ОГ и делителя

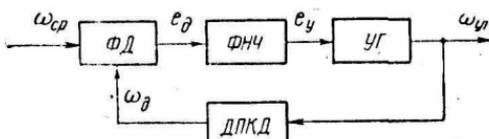


Рис. 2. Упрощенная схема синтезатора: ФД — фазовый детектор; ФНЧ — фильтр нижних частот; УГ — управляемый генератор; ДПКД — делитель с переменным коэффициентом деления.

создается необходимая программа, в нашем случае — шаг перестройки частоты управляемого генератора УГ $F_{и}$ или кратная ему частота сравнения $F_{ср}$, а также стабильный фазовый сдвиг $\Theta_{ср}$, под который подстраивается фаза колебания УГ.

Вышеуказанные упрощения позволяют перейти от структурной схемы синтезатора частот рис. 1 к структурной схеме, изображенной на рис. 2. Определим для нее коэффициент передачи по частоте, т. е.

Первоначально положим, что цепь обратной связи разомкнута в точке подключения фазового детектора к делителю частоты с переменным коэффициентом деления ДПКД и вместо нее введен генератор, создающий последовательность коротких импульсов с идеально стабильной частотой повторения, равной

$$W_{\omega}(p)_{зс} = \frac{\omega_{уr}}{\omega_{ср}}. \quad (1)$$

При медленном (по сравнению со временем переходных процессов) изменении временного положения импульсов опорного канала $\Theta_{ср}$ постоянная или медленно меняющаяся составляющая напряжения на выходе фазового детектора ФД, характеристика которого описывается периодической линейной функцией разности фаз сигналов, изменяется по закону

$$F_{д} = \frac{1}{T_{д}} = F_{ср}. \quad (2)$$

При медленном (по сравнению со временем переходных процессов) изменении временного положения импульсов опорного канала $\Theta_{ср}$ постоянная или медленно меняющаяся составляющая напряжения на выходе фазового детектора ФД, характеристика которого описывается периодической линейной функцией разности фаз сигналов, изменяется по закону

$$e_{д} = K_{д}\Theta^*, \quad (3)$$

где $\Theta^* = \Theta_{\text{ср}} - \Theta_{\text{д}}$ — разность фаз (временных сдвигов) сигналов на входе ФД;

$K_{\text{д}}$ — крутизна детекторной характеристики.

Напряжение управления $e_{\text{у}}$, т. е. напряжение на выходе фильтра нижних частот ФНЧ,

$$e_{\text{у}} = K_{\text{ф}} K_{\text{д}} W_{\text{ф}}(p) \Theta^*. \quad (4)$$

Здесь $W_{\text{ф}}(p)$ — коэффициент передачи ФНЧ в операторной форме;

$p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования;

$K_{\text{ф}}$ — значение коэффициента передачи ФНЧ при $p = 0$.

По условию $\Theta_{\text{д}} = \text{const}$, поэтому (4) можно записать следующим образом:

$$\Delta e_{\text{у}} = K_{\text{ф}} K_{\text{д}} W_{\text{ф}}(p) \Delta \Theta_{\text{ср}}. \quad (5)$$

Мгновенное значение частоты управляемого генератора

$$\omega_{\text{уг}} = \omega_{0\text{уг}} \pm K_{\text{уг}} \Delta e_{\text{у}}, \quad (6)$$

а абсолютное значение приращения его частоты с учетом

$$\Delta \omega_{\text{уг}} = K_{\text{уг}} K_{\text{д}} K_{\text{ф}} W_{\text{ф}}(p) \Delta \Theta_{\text{ср}}. \quad (7)$$

Но так как $\Delta \Theta_{\text{ср}}(t) = \int_0^t \Delta \omega_{\text{ср}} dt$, соотношение (7) в операторной форме запишется так:

$$\Delta \omega_{\text{уг}}(p) = K_{\text{уг}} K_{\text{д}} K_{\text{ф}} \frac{W_{\text{ф}}(p)}{p} \Delta \omega_{\text{ср}}. \quad (8)$$

В отношении (8) произведение

$$K_{\text{с}} = K_{\text{уг}} K_{\text{д}} K_{\text{ф}} \quad (9)$$

представляет собой статистический коэффициент усиления системы и тогда выражение для коэффициента передачи разомкнутой системы при изменении частоты на входе примет вид

$$W_{\omega}(p)_{\text{рс}} = \frac{\Delta \omega_{\text{уг}}}{\Delta \omega_{\text{ср}}} = K_{\text{с}} \frac{W_{\text{ф}}(p)}{p}. \quad (10)$$

Коэффициент передачи разомкнутой системы по фазе определяется соотношением, аналогичным (10). Это объясняется тем, что при изменении фазы на входе ФД ведет себя как усилительное звено, а управляемый генератор — как интегрирующее.

Теперь определим передаточную функцию (уравнение движения) синтезатора как замкнутой системы автоматического регулирования. При включении цепи управления мгновенное значение частоты управляемого генератора с разностью частот сигналов на входе системы связано очевидным соотношением

$$\omega_{\text{уг}} = \omega_{\text{ср}} - \omega_{\text{д}} W_{\omega}(p)_{\text{рс}}. \quad (11)$$

Подставляя в (11) значение $W_{\omega}(p)_{pc}$ из (10) и учитывая, что $\omega_d = \frac{\omega_{yr}}{K}$, получаем

$$\omega_{yr} = \omega_{cp} \frac{KK_c W_{\phi}(p)}{Kp + K_c W_{\phi}(p)}. \quad (12)$$

Управляющим воздействием в синтезаторе частот является командный сигнал, изменяющий коэффициент деления ДПКД. В связи с этим дифференциальное уравнение синтезатора частот должно описывать зависимость частоты управляемого генератора (регулируемой величины) от изменения коэффициента деления ДПКД (входного сигнала) при неизменной частоте сравнения ω_{cp} . Используя соотношение (12), установим такую зависимость.

Положим, что наша система при каком-то значении коэффициента деления ДПКД, равном K_0 , находится в режиме синхронизации. В этом случае установившееся значение частоты управляемого генератора

$$\omega_{0yr} = K_0 \omega_{cp}.$$

Если теперь скачком изменить значение коэффициента деления ДПКД до величины K_1 , то разность частот сигналов на входе ФД станет равной

$$\Delta\omega^* = \omega_{cp} - \omega_d = \omega_{cp} \frac{\omega_{0yr}}{K_1}. \quad (13)$$

Последнее соотношение легко преобразуется к виду

$$\Delta\omega^* = \frac{\Delta K}{K_1} \omega_{cp},$$

или в операторной форме

$$\Delta\omega^*(p) = \frac{\Delta K}{pK_1} \omega_{cp}. \quad (14)$$

В уравнениях (13) и (14) $\Delta K = K_1 - K_0$.

Теперь приращение частоты управляемого генератора в операторной форме

$$\Delta\omega_{yr}(p) = \Delta\omega^*(p) W_{\omega}(p)_{ac}. \quad (15)$$

Подставив в (15) соотношение (12), после несложных преобразований получаем

$$\Delta\omega_{yr}(p) = \Delta K \omega_{cp} \frac{\gamma W_{\phi}(p)}{p [p + \gamma W_{\phi}(p)]}, \quad (16)$$

где $\gamma = \frac{K_c}{K_1}$ — параметр системы.

С помощью (16) можно рассчитать характер переходного процесса в системе при скачке коэффициента деления ДПКД и различных передаточных функциях ФПЧ.

При решении ряда задач, связанных, например, с нахождением ширины полосы захвата, оценкой качества системы, удобней пользоваться более простыми соотношениями, описывающими динамику системы и соответствующие этим уравнениям эквивалентные схемы.

Покажем, каким способом можно упростить полученные выше уравнения.

Если исследуется поведение системы при фиксированном значении коэффициента деления ДПКД, равном K_0 , и постоянной величине входной частоты $\omega_{ср}$, то соотношение (12) для текущего значения частоты УГ можно записать так:

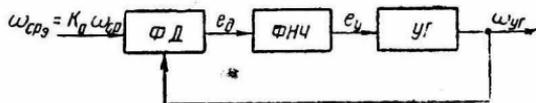


Рис. 3. Структурная схема эквивалентной системы:

ФД — фазовый детектор; ФНЧ — фильтр нижних частот; УГ — управляемый генератор.

$$\omega_{уГ} = \omega_{ср} \frac{\gamma W_{\phi}(\rho)}{\rho + \gamma W_{\phi}(\rho)}, \quad (17)$$

где $\omega_{ср} = K_0 \omega_{ср}$ — эквивалентное значение входной частоты.

Выражение для мгновенного значения фазы колебаний УГ будет аналогично (17), т. е.

$$\theta_{уГ} = \theta_{ср} \frac{\gamma W_{\phi}(\rho)}{\rho + \gamma W_{\phi}(\rho)}, \quad (18)$$

в котором $\theta_{ср} = K_0 \theta_{ср}$.

Соотношения (17) и (18) дают возможность заменить реальную систему некоторой эквивалентной простейшей следящей системой, имеющей коэффициент передачи цепи обратной связи $W_{oc}(\rho) = 1$, а коэффициент передачи разомкнутой системы записать следующим образом:

$$W_{\theta_s}(\rho) = W_{\omega_s}(\rho) = \frac{\gamma W_{\phi}(\rho)}{\rho}. \quad (19)$$

Структурная схема эквивалентной системы изображена на рис. 3.

Погрешность по фазе, создаваемая таким устройством:

$$\Delta \theta_{уГ} = \theta_{ср} - \theta_{уГ} = \frac{\theta_{ср}}{1 + W_{\theta_s}(\rho)}. \quad (20)$$

Относительная ее величина

$$\frac{\Delta \theta_{уГ}}{\theta_{ср}} = \frac{1}{1 + W_{\theta_s}(\rho)}. \quad (21)$$

Таким образом, как абсолютная, так и относительная погрешность определяются эквивалентным коэффициентом передачи прямого канала.

2. Характер переходных процессов и время установления колебаний в синтезаторе

Первоначально положим, что наша система является идеализированной, т. е. $W_{\Phi}(p) = 1$.

В этом случае соотношение (12) примет вид

$$\Delta\omega_{yг}(p) = \Delta K \omega_{ср} \frac{\gamma}{p(p + \gamma)}. \quad (22)$$

Оригинал выражения (22), очевидно, будет равен

$$\Delta\omega_{yг}(t) = \Delta K \omega_{ср} \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{\gamma e^{pt} dt}{p(p + \gamma)}. \quad (23)$$

Используя теорему о вычетах в полюсах подынтегральной функции [3], получаем

$$\Delta\omega_{yг}(t) = \Delta K \omega_{ср} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (24)$$

Время установления колебаний t_y определится, если, как обычно и принимают, положить $1 - e^{-\gamma t_y} = 0,9$.

Решив последнее соотношение относительно t_y , имеем

$$t_y = \frac{2,3}{\gamma} = 2,3 \frac{K_1}{K_c}. \quad (25)$$

Из соотношений (24) и (25) следует, что в случае $W_{\Phi}(p) = 1$ синтезатор частот с делителем частоты в цепи обратной связи представляет собой интегрирующую систему с постоянной времени, равной $\tau_c = \frac{1}{\gamma}$.

При этом время установления колебаний в цифровом синтезаторе превосходит в K раз время установления сигнала в идеализированной типовой системе фазовой автоподстройки частоты ФАПЧ.

Теперь положим, что в синтезаторе используется простейший интегрирующий фильтр с постоянной времени $\tau_{\Phi} = RC$.

В этом случае

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1}{1 + p\tau_{\Phi}}. \quad (26)$$

Подставив соотношение (26) в (16), получим

$$\Delta\omega_{yг}(p) = \Delta K \omega_{ср} \frac{\gamma}{p(p^2\tau_{\Phi} + p + \gamma)}. \quad (27)$$

Оригинал изображения (27) имеет вид

$$\Delta\omega_{yг}(t) = \frac{\Delta K \omega_{ср} \gamma}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{e^{pt} dp}{p(p^2\tau_{\Phi} + p + \gamma)}. \quad (28)$$

Характеристику переходного процесса определяем соотношением

$$y(t) = \frac{\gamma}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{e^{pt} dp}{p(p^2\tau_\phi + p + \gamma)} = \sum_{i=1}^n r_i, \quad (29)$$

где $\sum_{i=1}^n r_i$ — сумма вычетов в полюсах подынтегральной функции.

Полюса подынтегральной функции имеют место при следующих значениях p :

$$\begin{aligned} p_1 &= 0; \\ p_2 &= -\frac{1}{2\tau_\phi} (1 - \sqrt{1 - 4\gamma\tau_\phi}); \\ p_3 &= -\frac{1}{2\tau_\phi} (1 + \sqrt{1 - 4\gamma\tau_\phi}). \end{aligned} \quad (30)$$

Вычеты будут соответственно равны

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\gamma}; \\ r_2 &= \frac{2\tau_\phi}{\sqrt{1-4a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{1-4a} \cdot \frac{t}{2\tau_\phi}} e^{-\frac{t}{2\tau_\phi}}}{1 - \sqrt{1-4a}}; \\ r_3 &= \frac{2\tau_\phi}{\sqrt{1-4a}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{1-4a} \cdot \frac{t}{2\tau_\phi}} e^{-\frac{t}{2\tau_\phi}}}{1 + \sqrt{1-4a}}, \end{aligned} \quad (31)$$

в которых $a = \gamma\tau_\phi$.

Подставив (31) в (29), после несложных математических преобразований, получим

$$y(x) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-4a}} \operatorname{sh} \sqrt{1-4a} x + \operatorname{ch} \sqrt{1-4a} x \right) e^{-x}, \quad (32)$$

где

$x = \frac{t}{2\tau_\phi}$ — безразмерное время.

Как следует из полученного соотношения, характер переходного процесса полностью определяется значением параметра a .

Обычно в цифровых синтезаторах постоянная времени цепи фильтра выбирается из условия подавления напряжения первой гармоники частоты сравнения на выходе ФНЧ. Величина подавления σ связана с τ_ϕ следующим соотношением:

$$\tau_\phi = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\omega_{\text{ср}}} \cong \frac{\sigma}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (33)$$

тогда

$$a = \gamma \frac{\sigma}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{K_1 \sigma}{K_1 \omega_{\text{ср}}}. \quad (34)$$

Статический коэффициент усиления системы K_c определяет полосу удержания $\Delta\omega_{уд}$, а величина $K_1\omega_{ср} = \omega_{угу}$ — установившееся значение частоты управляемого генератора.

С учетом этих замечаний (34) запишем так:

$$a = \frac{\sqrt{\Delta\omega_{уд}\sigma}}{\omega_{угу}} = \frac{\sqrt{\Delta f_{уд}\sigma}}{f_{угу}} \quad (35)$$

(ν — коэффициент пропорциональности).

Величина σ обычно лежит в пределах $\sigma = 60-120$ дб, $\Delta f_{уд}$ имеет порядок сотен кГц. Таким образом, в процессе эксплуатации системы величина a может меняться в широких пределах, но всегда остается значительно большей единицы. В этом случае в соотношении (32) гиперболические синус и косинус перейдут в тригонометрические синус и косинус:

$$y(x) = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} \sin 2\sqrt{a}x + \cos 2\sqrt{a}x \right) e^{-x}. \quad (36)$$

При $a \gg 1$ синусоидальная составляющая процесса может быть опущена. Тогда

$$y(x) \cong 1 - e^{-x} \cos 2\sqrt{a}x. \quad (37)$$

Теперь можем записать

$$\Delta\omega_{уг}(t) = \Delta K\omega_{ср} \left(1 - e^{-\frac{t}{2\tau_\Phi}} \cos \sqrt{a} \frac{t}{\tau_\Phi} \right). \quad (38)$$

Из соотношений (36) и (38) следует, что частота переходного процесса $\omega_{пн} = \frac{\sqrt{a}}{\tau_\Phi}$.

После подстановки в последнее соотношение значений a и τ_Φ из (34) и (33) соответственно получаем

$$\omega_{пн} = \sqrt{\frac{K_c \omega_{ср}^2}{K_1 \omega_{ср} \sigma}} = \omega_{ср} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta f_{уд}}}{f_{угу} \sigma}}. \quad (39)$$

Теперь соотношение (38) в зависимости от конкретных параметров системы примет вид

$$\Delta\omega_{уг}(t) = \Delta K\omega_{ср} (1 - e^{-\xi t} \cos \omega_{пн} t), \quad (40)$$

где

$\xi = \frac{\omega_{ср}}{2\sigma} = \frac{\pi f_{ср}}{\sigma} = \pi \Delta f_{0,7}$ — величина, соответствующая затуханию системы.

Рассмотрим пример.

Пусть синтезатор обладает следующими параметрами:

$$\sigma = 120 \text{ дб} (10^6), \quad \Delta f_{уд} = 10^5 \text{ гц}, \quad f_{угу} = 10^7 \text{ гц},$$

$$F_{ср} = 10^3 \text{ гц}, \quad K_1 = 10^4.$$

Используя соотношения (39) и (40), определяем

$$\omega_{\text{пп}} = 2\pi \cdot 10^3 \sqrt{\frac{10^6}{10^7 \cdot 10^6}} = 2\pi \cdot 10^{-1} \text{ рад/сек};$$

$$\xi = \frac{2\pi \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ гц}.$$

Период переходного процесса соответствует $T_{\text{пп}} = 10 \text{ сек}$. За один период $T_{\text{пп}}$ величина $e^{-\xi t}$ примет значение, равное 0,997. Время установления колебаний

$$t_y = \frac{2,3}{\xi} = \frac{2,3}{\pi \cdot 10^{-3}} = 730 \text{ сек}.$$

На рис. 4 изображен характер процесса установления частоты для нашего случая. Он в основном определяется величиной затухания ФНЧ и значением коэффициента деления ДПКД.

Если при прочих равных условиях величину σ уменьшить до 60 дБ, то время установления колебаний уменьшится в 1000 раз, а период переходного процесса — в 30 раз.

Характер процесса установления фазы сигнала на выходе синтезатора при скачке коэффициента деления ДПКД может быть получен с помощью соотношения

$$\theta_{\text{уг}}(p) = \frac{\omega_{\text{эт}} K_{\text{сэ}}}{\tau_{\text{ф}}} \cdot \frac{1}{p^2 \left(p^2 + \frac{1}{\tau_{\text{ф}}} p + \frac{K_{\text{сэ}}}{\tau_{\text{ф}}} \right)}, \quad (41)$$

где

$$K_{\text{сэ}} = \frac{\Delta\omega_{\text{уд}} K_{\text{д}} K_{\text{ф}}}{K}.$$

Интегрирование (41) приводит к следующему результату:

$$\theta_{\text{уг}}(t) = \omega_{\text{эт}} t - \frac{\omega_{\text{эт}}}{K_{\text{сэ}}} \left\{ 1 - \left[\text{ch} \sqrt{1-4a} x + \frac{1-2a}{\sqrt{1-4a}} \text{sh} \sqrt{1-4a} x \right] e^{-x} \right\}. \quad (42)$$

Из последнего соотношения следует, что постоянная фазовая погрешность фазы колебаний управляемого генератора

$$\theta_{0\text{уг}} = \frac{\omega_{\text{эт}}}{K_{\text{сэ}}}. \quad (43)$$

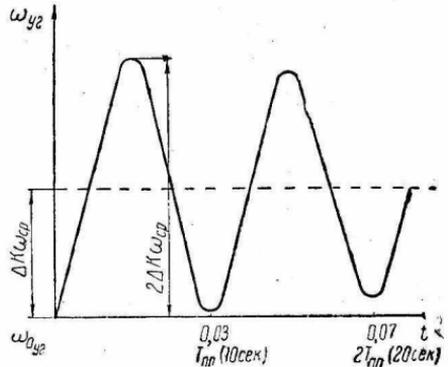


Рис. 4. График переходного процесса в синтезаторе при скачке коэффициента деления ДПКД.

ВЫВОДЫ

Анализ модели синтезатора частот как консервативной непрерывной замкнутой системы автоматического регулирования, имеющей линейные характеристики фазового детектора и управляемого генератора, конечно, не отражает всей тонкости процессов, имеющих место в цифровых синтезаторах частот.

Такая модель может считаться первым, хотя и достаточно грубым, приближением реальной импульсной следящей системы. Однако ряд выводов, полученных выше, имеют принципиальное значение и для цифрового синтезатора. К ним в первую очередь следует отнести следующие.

1. Введение делителя частоты в кольцо обратной связи системы ФАПЧ приводит к появлению фазовой ошибки, пропорциональной приращению коэффициента деления (45), что вызывает изменение положения рабочей точки на характеристике фазового детектора, а следовательно, и напряжения на его выходе. Это обстоятельство в конечном итоге приводит к смещению частоты управляемого генератора на величину, равную ΔK (40).

2. Такие важные качественные показатели синтезатора частот, как время перехода с одной частоты на другую и уровень побочных излучений по шагу перестройки находятся в определенном противоречии. Разрешение этого противоречия является достаточно сложной технической задачей, так как и первая, и вторая величины являются взаимно обратными функциями полосы пропускания фильтра нижних частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губернаторов О. И. и др. Математическое описание цифрового синтезатора частот.—Сб «Радиотехника». Вып. 11. Харьков, 1969, с. 9—13.
2. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963, с. 467—472.
3. Гоноровский И. С. Основы радиотехники. М., Госиздат по вопросам связи и радио, 1957, с. 301—306.