

УДК 621.385.61

А. А. ШАДРИН, А. Г. ШЕИН, канд. физ.-мат. наук

К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ СВЕРХБЫСТРЫМ МЕТОДОМ ХОКНИ

При моделировании физических процессов в электронных приборах на универсальных цифровых вычислительных машинах (ЦВМ) наиболее громоздким и длительным является процесс нахождения полей пространственного заряда. Самый распространенный метод решения уравнения Пуассона с помощью функции Грина, несмотря на свою простоту, физическую наглядность и общность применения, по затратам машинного времени весьма неэкономичен из-за медленной сходимости процессов суммирования. Причем необходимость устранения особенностей в месте нахождения заряда [1, 2] приводит практически к тому же пределу различимости частиц, что и при использовании конечно-разностных (сеточных) методов. В целях ускорения счета разработан ряд модификаций этого интегрального метода [1, 5], в которых сокращено число слагаемых, определяющих суммарное поле в данной точке путем введения сетки и суммирования зарядов по ее ячейкам.

Весьма интересным представляется сочетание гриновского метода с дискретным преобразованием Фурье [3, 4]. Однако во всех этих случаях решение сходится все же медленно, к тому же возникает необходимость резервирования ячеек запоминающего устройства для хранения величин зарядов, отнесенных к узлам сетки, Фурье-коэффициентов и других промежуточных значений. Иначе, переносятся недостатки, присущие обычным конечно-разностным (сеточным) методам.

Можно утверждать, что упомянутые выше интегральные методы практически применимы либо при сравнительно небольшом количестве рассматриваемых зарядов (а это может быть достигнуто усложнением алгоритмов путем введения локальных неравномерных сеток с шагом, увеличивающимся по мере удаления от рассматриваемой точки), либо при условии локализации частиц в узкой области пространства взаимодействия, что имеет место в лучевых приборах. Последнее, к сожалению, не относится к приборам М-типа с эмитирующим отрицательным электродом, где электроны заполняют почти всю область между анодом и катодом.

В сеточных методах решение дифференциального уравнения аппроксимируется решением системы линейных алгебраических уравнений, полученных из исходного дифференциального по одной из известных разностных схем.

В самой общей постановке вопрос о преимуществах этих методов перед интегральным, очевидно, не имеет смысла. Однако для ряда конкретных случаев удается добиться весьма неплохих показателей по быстродействию при приемлемом объеме оперативной памяти путем создания специализированных алгоритмов, которые некоторую ограниченность своего применения компенсируют существенным повышением эффективности вычислений. Примером такого алгоритма является разработанный Хокни [6] алгоритм «сверхбыстрого» решения уравнения Пуассона, который был успешно применен при расчете полей пространственного заряда в магнетроне [7, 8].

По существу этот метод представляет собой сочетание быстрого преобразования Фурье (БПФ) [9] с циклической редукцией — своеобразной разновидностью способа исключения — и относится к классу прямых (неитерационных), а следовательно, и наиболее быстрых методов с гарантированной устойчивостью, но отличается от себе подобных весьма экономным использованием памяти ЦВМ.

В данной статье обсуждаются некоторые особенности применения алгоритма Хокни, приводится одна из конкретных его модификаций, запрограммированная на языке АЛГОЛ-60, и анализируются результаты испытаний этой программы на практических примерах расчета полей пространственного заряда для плоской прямоугольной модели пространства взаимодействия.

1. Условия применимости алгоритма Хокни

Алгоритм Хокни применяется для решения довольно широкого класса уравнений в частных производных для областей, которые можно преобразовать к прямоугольным, с граничными условиями, допускающими разложение по периодическим функциям в одном направлении. По-видимому, не существует особых препятствий на распространение этого метода и на трехмерную область, если Фурье-разложение допустимо по двум направлениям.

Подробно об условиях применимости алгоритма сказано в работах [6, 10]. Отметим, что наряду с уравнением Пуассона этим способом могут быть решены уравнения Лапласа, Гельмгольца и бигармоническое для прямоугольных и цилиндрических областей взаимодействия. Интересно, что данный метод допускает анизотропию в одном из направлений, причем она может присутствовать уже в исходном уравнении или создаваться искусственно при преобразовании последнего в конечно-разностную систему на сетке, неравномерной в этом направлении. Математи-

чески анизотропия выражается в зависимости коэффициентов от координаты или соответствующих индексов узлов сетки.

Другое направление обязательно должно быть изотропным и допускать периодическое разложение. Построение алгоритма

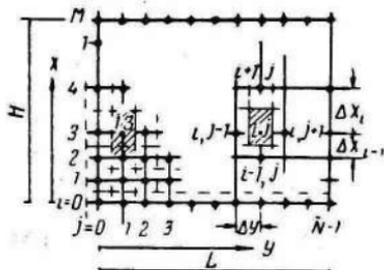


Рис. 1. Схематическое изображение двумерной области, на которой решается уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} 1 - U(y) &= V(y \pm nL); \\ 2 - V(0) &= V(L) = 0; \\ 3 - \frac{\partial V(0)}{\partial y} &= \frac{\partial V(L)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

нения уравнения Пуассона в прямоугольной области на равномерной сетке с $M = 2^{R+1}$ и $N = 2^{T+1}$.

2. Постановка задачи

Решается уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

в прямоугольной области $[0, H; 0, L]$ (рис. 1) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} U(0, y) &= U_k(y); \\ U(H, y) &= U_a(y); \\ U(x, y) &= U(x, y \pm L) \end{aligned} \quad (2)$$

условие периодичности,

где $U(x, y)$ — искомый потенциал;

$f(x, y)$ — «плотность», заряда;

$U_k(y), U_a(y)$ — соответственно распределения потенциалов на катоде и аноде;

H — расстояние анод-катод;

L — период системы.

Разобьем все пространство взаимодействия, включая границы, равномерной прямоугольной сеткой на $(M+1) \times N$ элементарных ячеек и заменим уравнение (1) системой разностных

решения уравнения Пуассона на неравномерной сетке дано в приложении 1. Однако наиболее эффективно алгоритм Хокни действует на равномерной сетке $M \times N$ при $M = p \cdot 2^R$ и $N = q \cdot 2^T$ (рис. 1), где p и q — простые, а R и T — целые числа [10]. Такой выбор количества строк и столбцов сетки делает возможным факторизацию матриц преобразований при циклической редукции, анализе и синтезе Фурье, что определяет в итоге ускорение этих операций. Придерживаясь в основном работы [10], составим упрощенный алгоритм для решения

уравнений, связывающих потенциалы и заряды, отнесенные к узлам сетки, воспользовавшись при этом пятиточечной схемой:

$$U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j} + \alpha^2(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = f_{i,j}^{(0)} \quad (3)$$

где i, j — целочисленные индексы узлов, каждый из которых соответствует геометрическому центру элементарной ячейки со сторонами Δx и Δy соответственно;

$$\Delta x = \frac{H}{M}; \quad \Delta y = \frac{L}{N}; \quad M = 2R+1; \quad N = 2T+1;$$

$$f_{ij}^{(0)} = (\Delta x)^2 f_{i,j}; \quad \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (4)$$

$$(i = 0, 1, \dots, M; \quad j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Граничные условия (2) дают следующие дополнительные равенства:

$$U_{0,j} = U_{k,j};$$

$$U_{M,j} = U_{a,j}; \quad (5)$$

$$U_{i,j} = U_{i,j \pm N}. \quad (5a)$$

т. е. индекс j берется по модулю N .

3. Алгоритм численного решения уравнения Пуассона

Следуя [10], опишем последовательность вычислительных операций, преобразующих заданное распределение заряда $f_{i,j}$ в искомое распределение потенциала $U_{i,j}$, при определенных потенциалах на аноде и катоде (U_{aj} , U_{kj}).

Сначала для четных строк и для всех j вычисляются правые части $f_{i,j}^{(l)}$ новой системы уравнений, полученной из системы (3) исключением нечетных строк

$$f_{i,j}^{(1)} = 2(1 + \alpha^2)f_{i,j}^{(0)} - \alpha^2(f_{i,j-1}^{(0)} + f_{i,j+1}^{(0)}) + f_{i-1,j}^{(0)} + f_{i+1,j}^{(0)}, \quad (6)$$

которые затем вместе с потенциалами U_{aj} и U_{kj} подвергаются дискретному быстрому Фурье-анализу (БФА) [9] по индексу j , в результате чего указанные массивы заменяются массивами их sin- и cos-Фурье-коэффициентов, т. е.

$$f_{i,j}^{(1)} \rightarrow \Phi_{i,k}^{c,s},$$

$$U_{aj} \rightarrow V_{ak}^{c,s}, \quad (7)$$

$$U_{cj} \rightarrow V_{kk}^{c,s}$$

$$(i = 2, 4, \dots, M-2; \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}),$$

где k — номера соответствующих гармоник Фурье.

При этом для БФА выбирается алгоритм, позволяющий производить операции «на месте» и не содержащий операции упорядочивания, так как применяемое далее обратное преобразование — быстрый Фурье-синтез (БФС) — автоматически восстанавливает нормальный порядок индексации конечного результата.

БФА позволяет исключить связь уравнений по индексу j и приводит к $N+2$ независимым подсистемам из $M/2-1$ чередующихся связанных уравнений относительно гармоник потенциала V_k^s и V_k^c :

$$V_{i+2,k}^{s,c} - \lambda_k^{(1)} V_{i,k}^{s,c} + V_{i-2,k}^{s,c} = \Phi_{i,k}^{s,c} \quad (8)$$

Каждая из этих подсистем затем решается методом циклической редукции.

Циклическая редукция (ЦР) проводится для каждой гармоники и начинается с вычисления

$$\lambda_k^{(1)} = 4 \left[\alpha^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) + 1 \right]^2 - 2, \quad (9)$$

после чего на прямом ходе ЦР рассчитываются

$$\lambda_k^{(r)} = (\lambda_k^{(r-1)})^2 - 2 \quad (10)$$

и

$$\Phi_{i,k}^{(r)} = \Phi_{i+2^{r-1},k}^{(r-1)} + \lambda_k^{(r-1)} \Phi_{i,k}^{(r-1)} + \Phi_{i-2^{r-1},k}^{(r-1)}, \quad (11)$$

где номер редукции r последовательно пробегает значения 2, 3, ..., R , причем новые значения $\Phi_{i,k}^{(r)}$ записываются на месте старых $\Phi_{i,k}^{(r-1)}$.

При $r=R$ получаем одно уравнение, из которого определяем гармонику потенциала на центральной линии:

$$V_{\frac{M}{2},k} = (V_{ak} + V_{kk} - \Phi_{\frac{M}{2},k}^{(R)}) / (\lambda_k^{(R)}). \quad (12)$$

Выражение (12) является первым шагом обратного хода ЦР. Последующие шаги для $r=R-1, R-2, \dots, 1$ заключаются в вычислении

$$V_{i,k} = (V_{i+2^r,k} + V_{i-2^r,k} - \Phi_{i,k}^{(r)}) / (\lambda_k^{(r)}) \quad (13)$$

$$(i = 2^r, 2^r + 2^{r+1}, 2^r + 2 \cdot 2^{r+1}, \dots, M - 2^r),$$

а полученные значения $V_{i,k}$ записываются на месте соответствующих $\Phi_{i,k}$, в результате чего к концу ЦР массив $\Phi_{i,k}$ для четных i целиком заменяется массивом $V_{i,k}$. При многократном повторении процедуры можно вычислить все $\lambda_k^{(r)}$ один раз, а таблицу значений «запомнить», что займет $\frac{1}{2} \cdot RN = \frac{1}{2} (\log_2 M - 1) \cdot N$ ячеек ОЗУ, но сократит время вычислений.

Если при некотором $r_0 < R$, $\lambda_k^{(r_0)} > \lambda_{\max}$ (где $\lambda_{\max} = 10^5 + 10^8$ — некоторое заданное число), то вычисления при прямом ходе ЦР прекращаются и сразу идет соответствующий шаг обратного хода:

$$V_{i,k} = -\Phi_{i,k}^{(r_0)} / (\lambda^{(r_0)})$$

$$(k = 2r_0, 2 \cdot 2r_0, \dots, M - 2r_0), \quad (14)$$

что также способствует убыстрению счета.

Далее, для четных i выполняется операция БФС, преобразующая «на месте» массив гармоник $V_{i,k}$ и массив найденных потенциалов $U_{i,j}$ на этих строках:

$$V_{i,k} \rightarrow U_{i,j}. \quad (15)$$

При этом, если граничные потенциалы при следующем временном шаге изменяются, то для них это преобразование необязательно.

Для определения потенциалов на нечетных строках вычисляем сначала для всех j и нечетных $i=1, 3, \dots, M-1$

$$Q_{i,j}^{(0)} = (f_{i,j}^{(0)} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) / \alpha^2, \quad (16)$$

„записывая“ $Q_{i,j}^{(0)}$ на месте $f_{i,j}^{(0)}$.

Циклическая редукция по j начинается с вычисления

$$\mu^{(0)} = 2(1 + \alpha^2) \alpha^{-2}, \quad (17)$$

а затем высчитываются все остальные значения

$$\mu^{(t)} = (\mu^{(t-1)})^2 - 2 \quad (18)$$

для $t=1, 2, \dots, T$, одинаковые при всех i .

Далее на прямом ходе ЦР для всех нечетных i и тех же значений t считаем

$$Q_{i,j}^{(t)} = Q_{i,j-2^t-1}^{(t-1)} + \mu^{(t-1)} Q_{i,j}^{(t-1)} + Q_{i,j-2^t-1}^{(t-1)} \quad (19)$$

для

$$j = 0, 2^t, 2 \cdot 2^t, \dots, N - 2^t.$$

После T -й редукции остается два уравнения, из которых, пользуясь условием периодичности (5 а), последовательно находим

$$U_{i,0} = -(\mu^{(T)} Q_{i,0}^{(T)} - 2Q_{i,N/2}^{(T)}) / (\mu^{(T)} - 4) \quad (20)$$

$$U_{i,N/2} = (2U_{i,0} - Q_{i,N/2}^{(T)}) / (\mu^{(T)}), \quad (21)$$

что является первым шагом обратного хода ЦР. Последующие шаги для $t=T-1, T-2, \dots, 0$ заключаются в вычислении всех оставшихся значений потенциала

$$U_{i,j} = (U_{i,j+2^t} + U_{i,j-2^t} - Q_{i,j}^{(t)}) / \mu^{(t)}, \quad (22)$$

где

$$j = 2^t, 2^t + 2^{t+1}, 2^t + 2 \cdot 2^{t+1}, \dots, N - 2^t,$$

$U_{i,j}$ записывается на месте $Q_{i,j}$. На этом вычисления заканчиваются.

Если при некотором $t_0 < T$, $\mu^{(t_0)} > \mu_{\max}$, где $\mu_{\max} = 10^5 \div 10^8$, то вычисления на прямом ходе ЦР прекращаются и «перескакивают» на соответствующий шаг обратного хода, начиная с

$$U_{i,j} = -Q_{i,j}^{(t_0)} / \mu^{(t_0)}, \quad (23)$$

где

$$j = 0, 2t_0, 2 \cdot 2t_0, \dots, N - 2t_0.$$

Программа на языке АЛГОЛ-60, составленная по этому алгоритму без конкретизации операций быстрого преобразования Фурье (БФА и БФС), приведена в приложении 2.

4. Анализ численных результатов

С целью проверки точности и выявления особенностей применимости алгоритма Хокни был проведен ряд испытательных расчетов по составленной программе на ЦВМ БЭСМ-6.

Тестовая операция восстановления заданного распределения

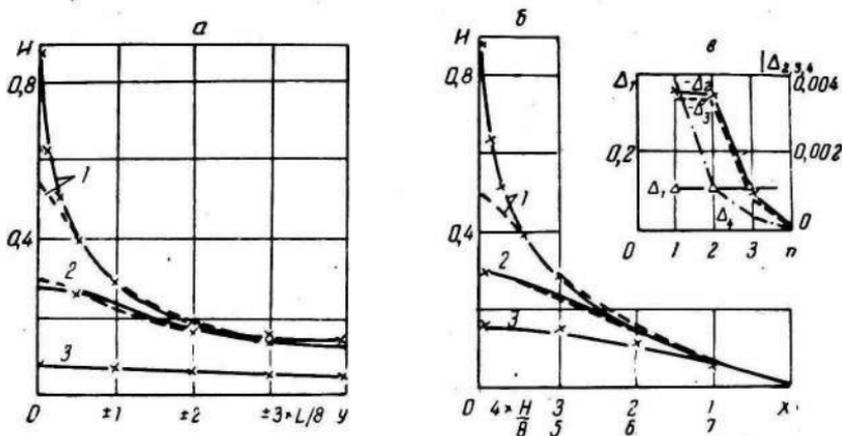


Рис. 2. Решение для заряда, расположенного в центре прямоугольной области при нулевых граничных условиях на электродах:

1 — $x = H/2$; 2 — $x = H/8$; 3 — $x = H/2 \pm 3 \times H/8$.

1 — $y = 0$; 2 — $y = L/8$; 3 — $y = 3 \times L/8$ (б).

Обозначения:

$$-\times- \Delta x = \Delta y = \frac{1}{64}; \quad \cdots \Delta x = \Delta y = \frac{1}{8} \text{ (a)}.$$

заряда по вычисленным ранее значениям потенциала дала максимальное относительное отклонение порядка $10^{-9} \div 10^{-10}$ от исходных величин даже при самой редкой сетке 8×8 ячеек при различных вариациях распределений и граничных условий. Столь высокая воспроизводимость, по всей вероятности, являет-

ся скорее показателем устойчивости метода, чем характеристикой его точности. Поэтому были проведены дополнительные испытания, которые позволили на вопрос о точности дать более определенный ответ.

Проверка показала строгое соблюдение принципа суперпозиции: решение для данных распределений «заряда» и граничных потенциалов строго равнялось сумме решений для каждого «заряда» в отдельности с нулевыми ГУ плюс решение однород-

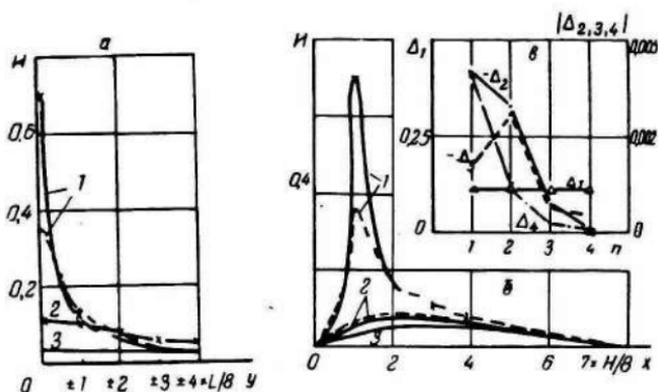


Рис. 3. Решение для заряда, смещенного к нижнему электроду:

1 — $x = H/8$; 2 — $x = 3 \times H/8$; 3 — $x = 6 \times H/8$.

Обозначения: — *—* $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{64}$; — — —

$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{8}$ (а); 1 — $y = 0$; 2 — $y = 2 \times L/8$;

3 — $y = 4 \times L/8$ (б).

ного уравнения с заданными граничными условиями. Это позволило ограничиться двумя основными тестовыми операциями: исследованием точности решения для единичного заряда в зависимости от его положения и густоты сетки и исследованием точности решения «чистой» граничной задачи.

На рис. 2,а и 2,б изображены вычисленные для различных секущих плоскостей эпюры потенциалов, создаваемых единичным зарядом, помещенным в центре рассматриваемой области при нулевых граничных условиях на верхнем и нижнем электродах. То же самое, но для заряда, сдвинутого к «катоде», изображено на рис. 3. Смещение по горизонтали не представляет интереса, так как кривые в этом направлении повторяются периодически, а сдвиг заряда к «аноду» зеркально отражает картину аналогичного сдвига от центральной горизонтали в противоположную сторону.

Пунктирные линии, проведенные через расчетные точки, соответствуют решению, полученному на сетке 8×8 , а сплошные — на сетке 64×64 . Видно хорошее совпадение этих кривых для всех соответствующих узлов сеток, за исключением узла, в кото-

ром находится заряд. Смещение его к какой-либо стенке искажает распределение потенциала в пространстве и увеличивает градиент в этом направлении, что соответствует эффекту «притяжения» заряда к заземленной металлической поверхности.

О точности вычислений удобнее судить по изменению значения потенциала в ряде контрольных точек при каждом последующем измельчении сетки по сравнению с предыдущим, обратившись к рисункам 2, в и 3, в, где по горизонтали проставлены номера (n) переходов к более частой сетке:

так, $n=1$ соответствует переходу от сетки 8×8 к сетке 16×16 ;

$n=2$ — от сетки 16×16 к сетке 32×32 и т. д.;

$$\Delta_1 = \Delta U(x, y); \Delta_2 = \Delta U(\dot{x} \pm H/8, y);$$

$$\Delta_3 = \Delta U(\dot{x}, y \pm L/8); \Delta_4 = \Delta U(x \pm H/8, y \pm L/8),$$

где x, y — координаты заряда.

Из этих графиков видно, что поправки Δ_2, Δ_3 и Δ_4 для точек, не включающих заряд, быстро стремятся к нулю и уже для сетки 32×32 составляют доли процента от соответствующих значений потенциала, в то время как поправка Δ_1 в месте нахождения заряда остается постоянной, а потенциал здесь линейно возрастает по мере уменьшения ячейки сетки, в которой этот заряд локализован.

Это явление легко объяснить по аналогии с методом функций Грина. Действительно, двумерный потенциал вблизи частицы

$$U(r_0 + \Delta r) \sim q \ln \left(\frac{1}{\Delta r} \right);$$

если Δr идентифицировать с линейным размером ячейки, по которой «размазан» заряд, то при каждом n -м дроблении Δr уменьшается вдвое и

$$\Delta r_n = \frac{\Delta r_0}{2^n},$$

а следовательно,

$$U(r_0 + \Delta r_n) \sim n q \ln \left(\frac{1}{\Delta r_0} \right),$$

т. е. потенциал линейно растет с увеличением n или «сжатием» заряда.

Таким образом, сеточные методы автоматически производят усреднение заряда по ячейке и «обрезание» потенциала, которое так или иначе приходится проделывать при интегральном методе. Заряды, попавшие в одну ячейку, «сливаются» в один укруп-

ненный и становятся неразличимыми, т. е. кулоновское взаимодействие между ними не учитывается. Последнее является в некотором смысле физически оправданным, так как неучтенные «близкие» взаимодействия способствуют быстрому, хаотическому движению частиц, которое, усредняясь по времени и по пространству, дает весьма незначительный вклад в процесс основного взаимодействия, в то время как «дальние» крупномасштабные и относительно «медленные» возмущения потенциала являются доминирующими в механизмах группировки и обмена энергией. «Ближние» взаимодействия при необходимости могут быть искусственно учтены методом Монте-Карло путем задания случайных изменений для скоростей частиц, попавших в одну ячейку. Дополнительное «укрупнение» заряда, уже состоящего из 10^6 — 10^7 реальных электронов, по всей вероятности, будет несущественным, если количество модельных зарядов сделать примерно равным числу ячеек сетки, т. е. на каждую ячейку в установившемся режиме должен приходиться один заряд.

Расчет показывает, что даже при большом удалении от заряда потенциал остается конечным, поэтому пренебрежение вкладом далеких частиц, как это иногда делается в методе функции Грина, в каждом конкретном случае требует строгого обоснования.

На рис. 4 представлено вычисленное методом Хокни распределение потенциала в пространстве взаимодействия при задании единичного скачка потенциала на аноде в отсутствие зарядов. Как и следовало ожидать, наихудшая точность получается в области непосредственно под разрывом в граничных условиях, но, в отличие от неоднородной задачи, решение довольно быстро сходится к стационарному значению при переходе к более частой сетке.

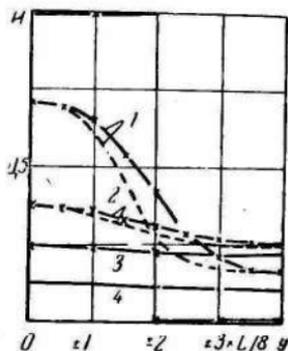


Рис. 4. Решение граничной задачи со скачком потенциала на верхнем электроде:

$$1 - x = H/8;$$

$$2 - x = 3 \times H/8;$$

$$3 - x = 5 \times H/8;$$

$$4 - x = 6 \times H/8.$$

Обозначения:

$$- \times - \Delta x = \Delta y = \frac{1}{64};$$

$$- \cdot - \Delta x = \Delta y = \frac{1}{8};$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенных испытаний и анализа особенностей вытекают следующие свойства алгоритма Хокни.

1. Абсолютная устойчивость, на что указывает отличная воспроизводимость первоначальных данных.

2. Быстродействие, лучшее, чем у других известных алгоритмов. Так алгоритм, основанный на методе функции Грина с при-

менением сеток [4], требует примерно $5 M^2 N N_1$ операций (N_1 — число столбцов, со стороны которых учитывается действие сил пространственного заряда); алгоритм, приведенный в работах [3, 4] требует, по словам автора [4], kMN^2 операций (k , вообще говоря, больше 2), а алгоритм Хокни требует около $(16 + 3,5 \log_2 N)MN$ обобщенных арифметических действий и уже при $M=N=32$ становится «быстрее» вышеназванных.

3. Высокая точность вычисляемых значений потенциала в узлах сетки, практически достаточная уже при $M=N=32$, которую можно существенно повысить, применяя интерполяционные методы для определения промежуточных значений потенциала.

Для связи со всеми остальными этапами моделирования размер элементарной ячейки должен быть привязан к временному шагу Δt следующим образом:

$$\Delta y \sim \bar{v}_y \Delta t;$$

$$\Delta x \sim \bar{v}_x \Delta t,$$

где v_y, v_x — соответствующие составляющие средней скорости дрейфа электронов.

При этом заряд укрупненных частиц должен быть выбран так, чтобы их общее число в установившемся режиме примерно равнялось количеству ячеек сетки.

4. Экономичность, определяемая тем, что все действия производятся «на месте» без увеличения объема оперативной памяти ЦВМ.

К недостаткам алгоритма следует отнести трудность учета ближних взаимодействий, что, впрочем, присуще всем методам моделирования, работающим с укрупненными зарядами. Этот недостаток может быть устранен применением алгоритма Хокни в совокупности с методом Монте-Карло.

Приведенный упрощенный вариант алгоритма Хокни эквивалентен по быстродействию алгоритму [10] и отличается от последнего лишь тем, что количество разбиений по обеим координатам — чистая степень двойки, а это, естественно, нельзя считать существенным ограничением.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ОБЛАСТИ С НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКОЙ

Введение неравномерной в поперечном направлении сетки в некоторых случаях (при сосредоточении заряда в узкой полосе пространства взаимодействия) позволяет несколько сократить время вычислений. При этом уравнение Пуассона, записанное по пятиточечной разностной схеме, имеет вид

$$\frac{2\alpha_{i-1}}{\alpha_i + \alpha_{i-1}} U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + \frac{2\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_{i-1}} U_{i-1,j} + \alpha_i \alpha_{i-1} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = f_{i,j}^{(0)}, \quad (\text{II.1})$$

где $\alpha_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta y}$, $f_{i,j}^{(0)} = \Delta x_i \Delta y \cdot \alpha_{i-1} f_{i,j}$

с граничными условиями (5) и (5 а) и коэффициентами, зависящими от индекса j .

Вычисления начинаются сразу с Фурье-анализа по индексу j :

$$f_{i,j}^{(0)} \rightarrow \Phi_{i,k}^{(0)c,s};$$

$$U_{aj} \rightarrow V_{ak}^{c,s};$$

$$U_{k,j} \rightarrow V_{kk}^{c,s};$$

в результате чего исключается связь по индексу j и система (II.1) разбивается на $N+2$ независимых подсистем из $M-1$ алгебраических уравнений относительно гармоник потенциала V_k^s и V_k^c :

$$a_i V_{i+1,k} - \lambda_{i,k}^{(0)} V_{i,k} + b_i V_{i-1,k} = \Phi_{i,k}^{(0)}, \quad (\text{II.2})$$

где

$$a_i = \frac{2\alpha_{i-1}}{\alpha_i + \alpha_{i-1}}; \quad b_i = \frac{2\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_{i-1}};$$

$$\lambda_{i,k}^{(0)} = 2 \left[1 + \alpha_i \alpha_{i-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \right]; \quad (\text{I.3})$$

k — номер гармоники Фурье.

Далее проводится циклическая редукция по строкам, аналогично тому, как это сделано в работе [10], начиная с выражения (37).

По сравнению с равномерной сеткой здесь отсутствует исключение нечетных строк и соответствующая редукция по четным строкам. Алгоритм выглядит проще, но работает медленнее, так как число преобразования Фурье увеличивается вдвое. Отсюда с очевидностью следует, что введение неравномерной сетки целесообразно лишь в том случае, если это сокращает количество строк более чем в два раза.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

АЛГОЛ-ПРОГРАММА ИСПЫТАТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

1. **procedure** fapuas ($f[i, j]$, $r1, t1, \text{lim}, a$); **value** $r1, t1, \text{lim } a$.

2. **integer** $r1, t1$; **real** lim, a ; **array** f .

3. **comment** Эта процедура преобразует «на месте» двумерный массив плотности заряда $f[0:v-1, 0:w-1]$ в массив потенциалов на прямоугольной сетке $v \times w$ ($v = 2^{r1+1}$, $w = 2^{t1+1}$,

с отношением сторон ячеек $a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ и с заданными ГУ на «аноде» — $f[v, 0:w-1]$ и на «катоде» — $f[0, 0:w-1]$. Границы массива определяются с запасом на случай выхода индексов за пре-

дела их действия, т. е. берется $f[0:v, 0:w+1]$. Величина lim обычно задается порядка $10^5 \div 10^7$ исходя из требуемой точности вычислений. В начале этой процедуры должны быть приведены описания процедур быстрого Фурье-анализа — $\text{ffa}(f[i, j], t1, w)$ и синтеза — $\text{ffs}(f[i, j], r1, v)$.

4. **begin integer** v, w, i, j, n ; **real** $a0, a1, a2, a3, \text{rad}$;

5. $v := 2 \uparrow (r1 + 1)$; $n := 2 \uparrow t1$; $w := 2 \times n$; $\text{rad} := 3,14159265359/n$;

6. $a0 := a \uparrow 2$; $a1 := 2 \times a \times (1 + a0)$; $a2 := a \times a0$;

comment вычисления по пунктам 4 и 5 при многократном повторении процедуры целесообразно вынести за ее пределы;

7. **for** $i := 2$ **step** 2 **until** $v - 2$ **do**

8. **begin real** $s, s0, s1$; $s1 := s := f[i, 0]$;

9. $f[i, 0] := a1 \times s + a \times (f[i+1, 0] + f[i-1, 0]) - a2 \times (f[i, 1] + f[i, w-1])$; $s0 := s$;

10. **for** $j := 1$ **step** 1 **until** $w - 2$ **do**

11. **begin** $s := f[i, j]$;

12. $f[i, j] := a1 \times s + a \times (f[i+1, j] + f[i-1, j]) - a2 \times (f[i, j+1] + f[i, j-1])$; $s0 := s$;

13. **end**;

14. $f[i, w-1] := a1 \times f[i, w-1] + a \times (f[i+1, w-1] + f[i-1, w-1]) - a2 \times (s1 + s0)$;

15. **end**;

16. **for** $i := 0$ **step** 2 **until** v **do** $\text{ffa}(f[i, j], t1, w)$;

comment процедура $\text{ffa}(f, t1, w)$ преобразует дискретную выборку $f[0:w-1]$ в массив косинус-коэффициентов $f[0:w/2]$, который размещается на месте первых $w/2 + 1$ выборок и массив синус-коэффициентов $f[w/2 + 1:w + 1]$, который размещается на месте остальных выборок и в двух дополнительных ячейках;

17. **for** $j := 0$ **step** 1 **until** n **do**

18. **begin integer** $r, v1, v2$; **array** $l[1:r]$;

19. $l[1] := 4 \times (a0 \times (1 - \cos(\text{rad} \times j)) + 1) \uparrow 2 - 2$;

20. **for** $r := 2$ **step** 1 **until** $r1$ **do**

21. **begin** $v1 := 2 \uparrow r$; **for** $i := v1$ **step** $v1$ **until** $v - v1$ **do**

22. **begin** $v2 := v1 \div 2$; $f[i, j] := f[i + v2, j] + f[i - v2, j] + l[r - 1] \times f[i, j]$;

23. $f[i, n + 1 + j] := f[i + v2, n + 1 + j] + f[i - v2, n + 1 + j] + l[r - 1] \times f[i, n + 1 + j]$;

25. $l[r] := l[r - 1] \uparrow 2 - 2$; **if** $l[r] > \text{lim}$ **then**

26. **begin for** $i := v1$ **step** $v1$ **until** $v - v1$ **do**

27. **begin** $f[i, j] := -f[i, j]/l[r]$; $f[i, n+1+j] := -f[i, n+1+j]/l[r]$;
 28. **end**; **go to** $m1$
 29. **end**.
 30. **end**;
 31. $m1$: **for** $r := r-1$ **step** -1 **until** 1 **do**
 32. **begin** $v1 := 2 \uparrow r$; $v2 := 2 \times v$; **for** $i := v1$ **step** $v2$ **until** $v-v1$ **do**,
 33. **begin** $f[i, j] := (f[i+v1, j] + f[i-v1, j] - f[i, j])/l[r]$;
 34. $f[i, n+1+j] := (f[i+v1, n+1+j] + f[i-v1, n+1+j] - f[i, n+1+j])/l[r]$;
 35. **end**.
 36. **end**
 37. **end**;
 38. **for** $i := 0$ **step** 2 **until** v **do** $ffs(f[i, j], t1, w)$;
comment процедура $ffs(f, t1, w)$ совершает «на месте» обратное преобразование массивов косинус-коэффициентов $f[w/2+1:w+1]$ и синус-коэффициентов $f[w/2+1:w+1]$ в массив $f[0:w-1]$ потенциалов;
 39. **begin** **integer** $t, w1, w2$; **array** $m[0:t1]$;
 40. $m[0] := (2 \times (1+a0))/a0$;
 41. **for** $t := 1$ **step** 1 **until** $t1$ **do**
 42. $m[t] := m[t-1] \uparrow 2-2$;
 43. **for** $i := 1$ **step** 2 **until** $v-1$ **do**.
 44. **begin** **for** $j := 0$ **step** 1 **until** $w-1$ **do**.
 45. $f[i, j] := (f[i, j] - f[i+1, j] - f[i-1, j])/a0$;
 46. **for** $t := 1$ **step** 1 **until** $t1$ **do**.
 47. **begin** $w1 := 2 \uparrow t$; $w2 := w1 \div 2$;
 48. $f[i, 0] := f[i, w2] + f[i, w-w2] + m[t-1] \times f[i, 0]$;
 49. **for** $j := w1$ **step** $w1$ **until** $w-w1$ **do**.
 50. $f[i, j] := f[i, j-w2] + f[i, j+w2] + m[t-1] \times f[i, j]$;
 51. **if** $m[t] > \lim$ **then**.
 52. **begin** **for** $j := 0$ **step** $w1$ **until** $w-w1$ **do** $f[i, j] := -f[i, j]/m[t]$;
 53. **goto** $m2$
 54. **end**;
 55. **end**;
 56. $f[i, 0] := -(2 \times f[i, w-2] + m[t1] \times f[i, 0]) / (m[t1] \uparrow 2-4)$;
 57. $f[i, w \div 2] := (2 \times f[i, 0] - f[i, w \div 2]) / m[t1]$; $t1 = t1$;

```

58. m2: for t: =t-1 step-1 until 0 do:
59. begin w1:=2 ↑ t; w2:=2×w1; f[i, w]: =f[i, 0];
60. for j: =w1 step w2 until w-w1 do:
61. f[i, j]: = (f[i, j+w1] + f[i, j-w1] - f[i, j])/m[t];
62. end.
63. end.
64. end
65. end fapuas.

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Роу Дж. Теория нелинейных колебаний в приборах сверхвысоких частот. М., «Сов радио», 1969. 616 с.
2. Голенцкий И. И., Захарова А. Н., Хомич В. Б. К методике расчета поля пространственного заряда пучка при решении на ЭВМ задач динамической электронной оптики. — «Электронная техника. Электроника СВЧ», 1970, вып. 5, с. 141—153.
3. Ушерович Б. Л., Лагранский Л. М., Семеновский Н. Г. Метод расчета пространственного заряда в двумерной теории СВЧ приборов. МЭП. — «Тр. конференций по электронной технике. Электроника СВЧ», 1971, вып. 1(27), с. 70—77. «Тр. третьего отраслевого семинара по колебаниям в электронных потоках», 1969, с. 68—76.
4. Моносов Г. Г. К решению уравнения Пуассона для пространства взаимодействия цилиндрического магнетрона на ЭЦВМ методом Фурье. — «Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ», 1970, вып. 3, с. 47—54.
5. Моносов Г. Г. Стационарные характеристики приборов магнетронного типа с эмиттирующим отрицательным электродом. Ч. I. — «Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ», 1968, вып. 10, с. 3—12.
6. Hockney R. W. A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis. Journal of the ACM, vol. 12, N 1, (January, 1965), p. 95—113.
7. S. P. Yu, G. P. Kooyers, O. Buneman. Time-Dependent Computer Analysis of Electron-Wave Interaction in Crossed Fields. Journal of Applied Physics, vol. 36, N 8, August, 1965, p. 2550—2559.
8. Романов П. В., Рошаль А. С., Галимуллин В. Н. О расчете методом Монте-Карло/плоского электронного потока в скрещенных полях. — «Изв. вузов, Радиофизика», 1970, XIII, 7, с. 1096—1105.
9. Тр. ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике (пер. с англ.), 1967, т. 55, 10, с. 87—96.
10. Романов П. В., Рошаль А. С. О решении уравнения Пуассона для области взаимодействия электронных приборов. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, XIV, 7, с. 26—32.