УДК 538.569 : 621.372.8

Н. И. КРАВЧЕНКО,
В. Д. КУКУШ, канд. техн. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ДЕЙСТВИЯ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ НА СТЕНКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Развитие СВЧ энергетики [1], электроники больших мощностей [2] и плазменной электроники [3] требует разработки контрольно-измерительной аппаратуры на сверхбольшие уровни энергии. В работах [4—5] приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования теплового действия основной волны на тонкие участки узких стенок прямоугольного волновода, указывается целесообразность исследования температурных полей на внешних поверхностях стенок, так как они содержат информацию о режиме передающих линий и источников [5].

Для определения плотности диссипативных функций в стенках реального прямоугольного волновода воспользуемся классической теорией поверхностного эффекта [6]. Если бы стенки волновода были идеальным проводником, то мы имели бы условие

$$\vec{i} = \vec{H} \times \vec{n}_0, \tag{1}$$

где $\vec{i}$, $\vec{H}$, $\vec{n}_0$ — плотность поверхностных токов, вектор магнитного поля основной волны и нормаль, направленная вглубь металлических стенок. В действительности удельная проводимость металла стенок волновода σ конечна [8], и токи распределены в стенках с объемной плотностью I. Предположение о достаточно большом значении σ позволяет принять, что плотность I (при достаточно плавном изменении поля вдоль поверхности раздела проводник—вакуум) убывает с углублением в проводник экспоненциально, т. е. по тому же закону

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{n}{\delta}\right); \quad \delta = \left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

что и при падении плоской монохроматической волны с частотой ω на полупространство из металла с абсолютной магнитной проницаемостью μ. Если рассматривать токи в металле как поверхностные, то мы должны приравнять абсолютное значение вектора $\vec{i}$ интегралу от абсолютного значения объемной плотности тока, взятому от поверхности стенок ($n=0$) по всей толщине стенок. В силу малости толщины поверхностного слоя δ мы можем распространить этот интеграл до $n=\infty$, так что

$$\bar{i}=\int_0^\infty I_0 \exp\left(-\frac{n}{\delta}\right)dn = I_0\delta. \qquad (3)$$

Сопоставляя это с (1) и учитывая (2), получаем

$$\vec{I}=(\vec{H}\times\vec{n}_0)\delta^{-1}\sqrt{2}\exp\left(-\frac{n}{\delta}\right). \qquad (4)$$

Используя (4) и результат решений уравнений Максвелла для основной волны в прямоугольном волноводе [9], запишем соответственно объемную плотность токов в узких и широких его стенках:

$$\vec{I}_1=\vec{y}_0 H_z \delta^{-1}\exp\left(-\frac{n}{\delta}\right); \qquad (5)$$

$$\vec{I}_3=(\vec{x}_0 H_z - \vec{z}_0 H_x)\,\delta^{-1}\exp\left(-\frac{n}{\delta}\right).$$

Диссипативные потери, эквивалентные теплу, выделяющемуся в единице объема в среднем за период СВЧ поля в узкой и широкой стенках, выразим через объемную плотность диссипативных функций [10, с. 122—125]:

$$\operatorname{diss} P_1=\frac{\vec{I}_1(\vec{I}_1)^*}{2\sigma}=\frac{4P\Lambda^2\exp\left(-\frac{2n}{\delta}\right)}{\sigma ab W\delta^2(1-\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\operatorname{diss} P_3=\frac{4P\left[\Lambda^2\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)+(1-\Lambda^2)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]\exp\left(-\frac{2n}{\delta}\right)}{\sigma ab W\delta^2(1-\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (6)$$

где W, $\Lambda=\lambda\,\lambda_c^{-1}$ — волновое сопротивление свободного пространства и волновой фактор;

λ, λ_c — длина волны генератора и критическая длина волны основного типа;

a, b — внутренние размеры поперечного сечения прямоугольного волновода.

Энергия, выделяющаяся в стенках прямоугольного волновода при диссипации СВЧ поля, частично поглощается ангармоническими колебаниями кристаллической решетки, расходуется на теплопроводность и представляется уравнением баланса в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\Delta\theta(x,y,z,t)+K^{-1}\operatorname{diss} P, \qquad (7)$$

дополненного граничными условиями Ньютона-Рихмана

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} - h_1\theta(x, y, z, t) = 0, \; x, y \in \Gamma_1;$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial n} - h_2\theta(x, y, z, t) = 0, \quad x, y \in \Gamma_2, \tag{8}$$

учитывающими потери энергии в окружающую среду стенками волновода. В силу пространственной симметрии электромагнит-

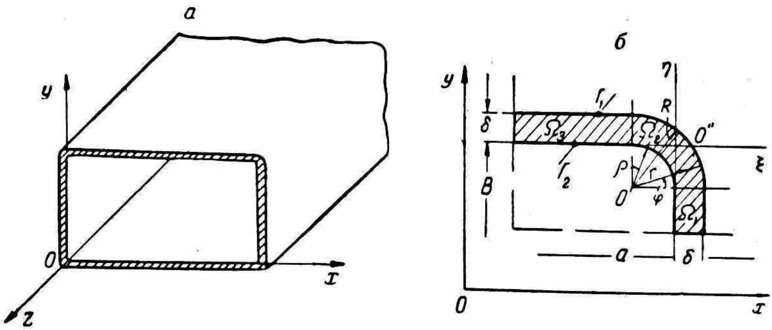

Рис. 1. Изображение рассматриваемой задачи: *а* — расположение волновода в выбранной системе координат; *б* — четверть поперечного сечения волновода.

ного поля в прямоугольном волноводе целесообразно рассмотреть четвертую его часть при определении температурного поля стенок (рис. 1). Учитывая связь между системами координат (x, y); (ξ, η) и (r, φ)

$$x = a + \xi; \qquad \xi = r\cos\varphi - \rho;$$
$$y = b + \eta; \qquad \eta = r\sin\varphi - \rho, \tag{9}$$

запишем уравнения теплопроводности в соответствующих областях Ω для стационарного температурного поля:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v_1(\xi\eta)}{\partial\eta^2} + [\operatorname{diss} P]_{11}\, e^{-\alpha\xi} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\varphi^2} + [\operatorname{diss} P]_{21}\, e^{-(\alpha\rho - r)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v_3(\xi,\eta)}{\partial\eta^2} + \left\{[\operatorname{diss} P]_{31} + [\operatorname{diss} P]_{32}\cos\left(\frac{2\pi}{a}\xi\right)\right\} e^{-\eta\alpha} = 0,$$

где $\alpha = \dfrac{2}{\delta}$ — коэффициент поглощения, а амплитуды плотности диссипативных функций представлены в виде

$$[\operatorname{diss} P]_{ik} = K^{-1}[\operatorname{diss} P_n]_{n=0} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\Lambda^{-2} & 1 - \frac{1}{2}\Lambda^{-2} \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Учитывая (8), уравнения (10) необходимо дополнить граничными условиями четвертого рода, отражающими теплосвязность областей Ω (рис. 1):

$$v_2(r,0)=v_1(\xi,-\rho);\quad \left.\frac{\partial v_2(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial v_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=-\rho};$$
$$v_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=v_3(-\rho,\eta);\quad \left.\frac{\partial v_2(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\partial v_3(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=-\rho} \tag{12}$$

Решение краевой задачи (8)—(12) найдено методом собственных функций [11—12] и представлено функциональными рядами:

$$v_1(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_j(\eta)N_k\sin\left(\lambda_k\ln\frac{r}{\rho}+\varphi_k\right)\sin(\lambda_j\xi+\varphi_j);$$
$$v_2(r,\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(r)N_j\sin(\lambda_j\xi+\varphi_j)\sin\left(\lambda_k\ln\frac{r}{\rho}+\varphi_k\right); \tag{13}$$
$$v_3(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_j(\xi)N_k\sin\left(\lambda_k\ln\frac{r}{\rho}+\varphi_k\right)\sin(\lambda_j\eta+\varphi_j),$$

где собственные значения определяются из трансцендентных уравнений:

$$\mathrm{ctq}\,\mu_j=\frac{\mu_j^2+\mathrm{Bi}_1\cdot\mathrm{Bi}_2}{\mu_j(\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2)};\quad \mathrm{ctq}\,\mu_k=\frac{\mu_k^2+\mathrm{Bi}_3\cdot\mathrm{Bi}_4}{\mu_k(\mathrm{Bi}_3+\mathrm{Bi}_4)};$$
$$\mu_j=\lambda_j d;\quad \mu_k=\lambda_k\ln\frac{R}{\rho};\quad \mathrm{Bi}_1=\frac{\alpha_1 d}{K}; \tag{14}$$
$$\mathrm{Bi}_2=\frac{\alpha_2 d}{K};\ \mathrm{Bi}_3=\frac{\alpha_1}{K}\rho\ln\frac{R}{\rho};\ Bi_4=\frac{\alpha_2}{K}R\ln\frac{R}{\rho}.$$

Коэффициенты Фурье рядов (13) представляются в неявном виде:

$$a_j(\eta)=x_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_j\left(\eta+\frac{b}{2}\right)+\frac{\mathring{a}_j}{\lambda_j^2};$$
$$b_k(r)=x_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\varphi+x_3\,\mathrm{ch}\,\gamma_k\varphi+\frac{\mathring{b}_k}{\lambda_k^2};$$

$$c_j(\xi) = x_4 \operatorname{ch} \lambda_j \left(\xi + \frac{a}{2} \right) + \frac{\overset{\circ}{c}_j}{\lambda_j^2}. \tag{15}$$

Коэффициенты Фурье свободных членов уравнений (10)

$$\overset{\circ}{a}_j = \frac{[\operatorname{diss} P]_{11}\,\delta}{(\mu_j^2+\gamma^2)\,\|\varphi_j\|^2} \left\{ \frac{\gamma+\mathrm{Bi}_1}{\left[1-\left(\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma-\mathrm{Bi}_2)\,e^{-\gamma}}{\left[1-\left(\frac{\mathrm{Bi}_2}{\mu_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right\};$$

$$\overset{\circ}{b}_k = [\operatorname{diss} P]_{21} \|\psi_k\|^{-2} \int\limits_{\rho}^{k} r e^{-\alpha(r-\rho)}\, \psi_k(\lambda_k r)\, dr; \tag{16}$$

$$\overset{\circ}{c}_j = \left\{ \frac{[\operatorname{diss} P]_{31}}{[\operatorname{diss} P]_{11}} + \frac{[\operatorname{diss} P]_{32}}{[\operatorname{diss} P]_{11}} \cos\left(\frac{2\pi}{a}\,\xi \right) \right\} \overset{\circ}{a}_j;$$

постоянные x_1, x_2, x_3, x_4 определены из граничных условий сопряжений с использованием переразложения собственных функций [13]:

$$x_1 = \frac{(a_3 a_{44} - a_4 a_{34}) + (a_{34} a_{43} - a_{33} a_{44}) \frac{a_1}{a_{13}}}{(a_{34} a_{42} - a_{32} a_{44}) \frac{a_{21}}{a_{22}} + (a_{34} a_{43} - a_{33} a_{44}) \frac{a_{11}}{a_{13}}};$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1; \quad x_3 = \frac{a_1}{a_{13}} - \frac{a_{11}}{a_{13}} x_1;$$

$$x_4 = \frac{a_4}{a_{44}} - \frac{a_{43}}{a_{44}} x_3 - \frac{a_{42}}{a_{44}} x_2; \tag{17}$$

a_m, a_{mn} определены матрицами

$$\|a_m\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\overset{\circ}{b}_k}{\lambda_k^2} N_{jk} - \frac{\overset{\circ}{a}_j}{\lambda_j^2} \\ 0 \\ \frac{[\operatorname{diss} P]_{31} \overset{\circ}{a}_j}{[\operatorname{diss} P]_{11} \lambda_j^2} + \frac{[\operatorname{diss} P]_{32} \overset{\circ}{a}_j \cos \frac{2\pi}{a}\rho}{[\operatorname{diss} P]_{31} \left[\lambda_j^2 + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \right]} - \frac{\overset{\circ}{b}_k}{\lambda_k^2} N_{jk} \\ -\frac{[\operatorname{diss} P]_{32}}{[\operatorname{diss} P]_{31}} \frac{\overset{\circ}{a}_j \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi}{a}\rho}{\lambda_j^2 + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2} \end{matrix} \right\|$$

$$\|a_{mn}\| = \left\| \begin{matrix} \operatorname{ch} \lambda_j \left(\frac{b}{2} - \rho\right) & 0 & -N_{jk} & 0 \\ \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \left(\frac{b}{2} - \rho\right) & -N_{jk} & 0 & 0 \\ 0 & N_{jk} \operatorname{sh} \lambda_k \frac{\pi}{2} & N_{jk} \operatorname{ch} \lambda_k \frac{\pi}{2} & -\operatorname{ch} \lambda_j \left(\frac{a}{2} - \rho\right) \\ 0 & \lambda_k N_{jk} \operatorname{ch} \lambda_k \frac{\pi}{2} & \lambda_k N_{ik} \operatorname{sh} \lambda_k \frac{\pi}{2} & \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \left(\frac{a}{2} - \rho\right) \end{matrix} \right\|$$

и, наконец, нормирующие множители N_{jk} и нормы собственных функций имеют следующий вид:

$$N_{jk} = N_j (N_k)^{-1};$$

$$N_j = \frac{2 \sin \frac{\mu_j}{2}}{\lambda_j \|\psi_j\|^2} \cdot \sin\left(\varphi_j + \frac{\mu_j}{2}\right); \quad N_k = \frac{2 \sin \frac{\mu_k}{2}}{\lambda_k \|\psi_k\|^2} \sin\left(\varphi_k + \frac{\mu_k}{2}\right);$$

$$\|\psi_j\|^2 = \frac{\delta}{2}\left[1 + \frac{(\mu_j^2 + \mathrm{Bi}_1 \mathrm{Bi}_2)(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)}{(\mu_j^2 + \mathrm{Bi}_1^2)(\mu_j^2 + \mathrm{Bi}_2^2)}\right]; \tag{19}$$

$$\|\psi_k\|^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{R}{\rho}\left[1 + \frac{(\mu_k^2 + \mathrm{Bi}_3 \mathrm{Bi}_4)(\mathrm{Bi}_3 + \mathrm{Bi}_4)}{(\mu_k^2 + \mathrm{Bi}_3^2)(\mu_k^2 + \mathrm{Bi}_4^2)}\right).$$

Знакопеременные ряды (13) абсолютно сходящиеся, однако просуммировать их непосредственно не представляется возможным ввиду сложности общего члена. При реализации вычислительного процесса на ЭЦВМ-М20 с погрешностью в один процент необходимо удерживать от 100 до 1000 членов сумм (13) в зависимости от величины критерия Био (10^{-6}—10^{-3}).

На рис. 2 показано распределение удельной температуры (температура, приходящаяся на единицу мощности в волноводе) по периметру сечения согласованного волновода размером $28{,}5 \times 12{,}6$ *мм*^{2} при $\Lambda < 0{,}7$ (максимум плотности диссипативной функции посередине широкой стенки волновода), а на рис. 3—

при $\Lambda > 0{,}7$ для трех материалов (медь, константан, нихром) и трех значений коэффициента теплоотдачи.

Заметим прежде всего, что удельная температура не зависит от падающей мощности в волноводе, что обусловлено пренебрежением, потерями на теплоизлучение и предложением о посто-

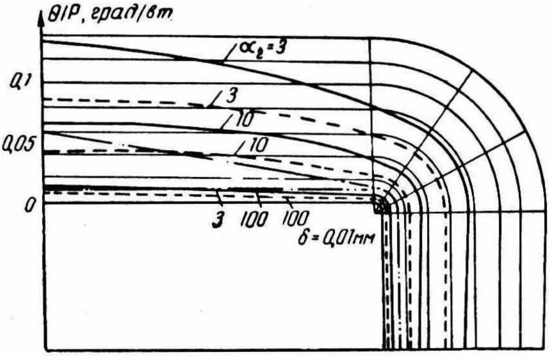

Рис. 2. Распределение температуры по периметру сечения волновода:
Обозначения: ______ нихром;
——— константан;
— · — медь;
—··— тепловые источники.

янстве теплофизических констант волновода, правомерным при температуре волновода не более 100° С.

На рис. 2, 3 видна зависимость удельной температуры от теплофизических свойств материала: вследствие меньшей элект-

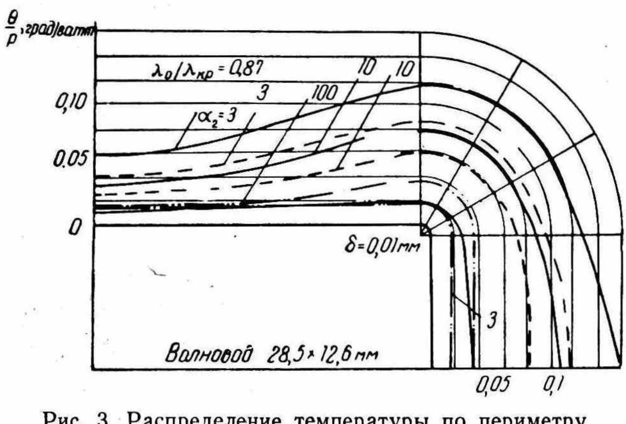

Рис. 3. Распределение температуры по периметру сечения волновода при $\lambda_0/\lambda_{кр} = 87$:
Обозначения: ______ нихром;
— · — медь;
——— константан;
—··— тепловые источники.

ро- и теплопроводности нихрома удельная температура нихромового волновода в 10 раз превышает при прочих равных условиях ее значение для медного и в два раза для константанового волновода. Увеличение коэффициента теплоотдачи от 3 до 100 *вт/град·м²* уменьшает удельную температуру примерно в 10 раз.

На рис. 4 приведена зависимость удельной температуры на средине широкой (сплошные линии) и узкой (штриховые линии) стенок нихромового волновода трех размеров сечений в диапазоне волн. Можно видеть весьма сильную зависимость удельной температуры от толщины и размеров сечений волноводов. Изменение толщины в десять раз при естественной конвекции приводит к изменению удельной температуры примерно в два раза. Изменение удельной температуры обратно пропорционально изменению площади поперечного сечения волновода. Поведение удельной температуры в диапазоне волн на широкой и узкой стенках носит различный характер: на широкой стенке убывает с увеличением длины волны, на узкой возрастает. Это обстоятельство позволяет создать частотно независимый датчик — преобразователь мощности СВЧ, если термопреобразователь расположить частично на широкой, а частично на узкой стенке, и индицировать сумму сигналов преобразователей.

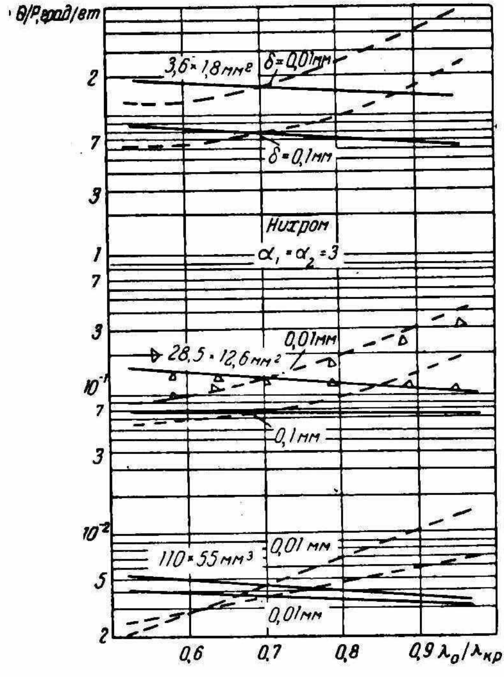

Рис. 4. Зависимость температуры на середине широкой стенки (сплошная кривая) и на середине узкой (штриховая кривая) от длины волны.

Удельная температура на узкой стенке волновода может достигать бо́льших значений, чем на широкой, поэтому при разработке измерителей проходящей мощности больших уровней поглощающую пластину следует устанавливать в узкую стенку волновода.

С точки зрения меньших изменений температуры в диапазоне волн предпочтение следует отдать широкой стенке волновода, Обратим внимание на следующее обстоятельство. Диссипация электромагнитного поля в стенках волновода описывается уравнением диффузии [6], а температурное поле — уравнением теплопроводности [11]. В соответствии с первой теоремой подобия [14] тепловой поток с внешней поверхности стенок волновода должен быть в некоторой степени адекватным плотности диссипативной функции. На рис. 2—3 видно, что при малой толщине нихромового или константанового волновода распределение температуры приближается к тепловым источникам. Введем коэффициент подобия

$$Kn = \frac{v(\xi_{max})}{v(\xi_{min})} : \frac{\operatorname{diss} P(\xi_{max})}{\operatorname{diss} P(\xi_{min})}. \tag{20}$$

Очевидно, Kn и характеризует степень приближения температуры к тепловым источникам. На рис. 5 приведена зависимость Kn от толщины стенок для ряда сечений волноводов и значений коэффициента теплоотдачи. Можно видеть, что при естественной конвекции для предельно допустимых значений толщины значение коэффициента подобия составляет: для сечения 110×55 *мм*^{2} — 0,85; $28{,}5\times12{,}6$ *мм*^{2} — 0,82 и для $3{,}6\times1{,}8$ *мм*^{2} — 0,7. При увеличении α коэффициент подобия возрастает. Это обстоятельство дает возможность исследовать распределение электромагнитного поля по распределению температуры стенок. Когда Kn становится малой величиной, а неравномерность температуры по толщине стенок составляет величину порядка 0,1% для размеров сечений волноводов, меньших $3{,}6\times1{,}8$ *мм*^{2}, то может быть предложен самокалибруемый датчик мощности СВЧ миллиметрового диапазона в виде тонкостенного волновода и соответствующего термопреобразователя.

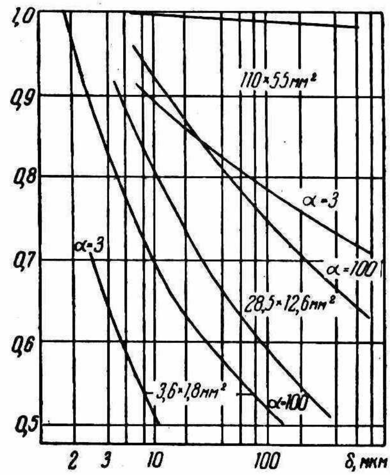

Рис. 5. Зависимость коэффициента подобия от толщины нихромового волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. СВЧ-энергетика. Под. ред. Э. Окресса. Т. 1. М., «Мир», 1971. 464 с.
2. Капица П. Л. Электроника больших мощностей. М., Изд. АН СССР, 1962. 195 с.
3. Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. Под ред З. С. Чернова. М., «Советское радио», 1965. 95 с.
4. Кравченко Н. И., Волков В. М., Кукуш В. Д., Дидык Л. А.

Тепловое действие H_{10}-волны на поглощающую стенку прямоугольного волновода. «Инженерно-физический журнал», 1972, т. XXII, № 1, с. 158—163.
5. Кравченко Н. И., Кукуш В. Д. Авт. свид. № 29550, 1970, «Бюллетень изобретений» № 5674, 1971. 16 с.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика М., «Мир», 1965, 702 с.
7. Рытов С. М. К расчету поглощения электромагнитных волн в трубах. ЖЭТФ, 1940, т. X. Вып. 2, с. 176—179.
8. Байчурин А. С. Расчет, конструирование и изготовление волноводных устройств и объемных резонаторов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963. 350 с.
9. Ефимов И. Е. Радиочастотные линии передачи. М., «Советское радио», 1964. 600 с.
10. Релей Л. Теория звука. Т. 1. М., ГИТТЛ, 1955. 503 с.
11. Лыков А. В. Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности. «Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт», 1969, № 2, с. 3—27.
12. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II, М., ИЛ, 1961, 555 с.
13. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространение радиоволн. Харьков, 1971. 400 с.
14. Кирко И. М. Исследование электромагнитных явлений в металлах методом размерности и подобия. Рига, Изд. АН Латв. ССР, 1960. 187 с.