

## О КЛАССИФИКАЦИИ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Известно, что изучение свойств многих замедляющих систем сводится к исследованию структур, однородных в одном из направлений. Это, например, гребенчатые системы (гребенка над плоскостью, сдвоенная гребенка), многие штыревые системы и др. В работах [1, 2] доказано, что классификация типов волн в таких системах относительно направления распространения электромагнитной энергии (обычно это ось  $z$ ) строится на основании волноводных волн в однородном направлении (пусть это будет в декартовых координатах ось  $y$ ).

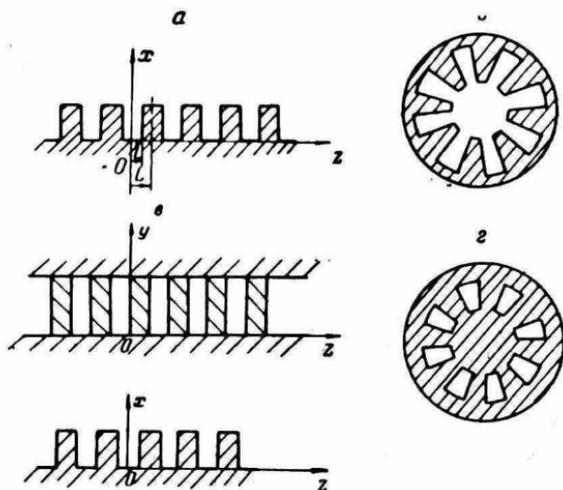
Рассмотрим гребенчатую систему, неограниченную вдоль  $y$ . В ней возможно распространение трех типов волн:

- 1)  $LEM_y$ -волн, у которых отсутствуют поперечные составляющие электрического и магнитного полей ( $E_y = H_y = 0$ ) — это волна типа ТЕМ относительно оси  $y$ ;
- 2)  $LE_y$ -волн, у которых  $E_y = 0$  (TE-волна вдоль  $y$ );

3)  $LM_y$ -волн, характеризующихся отсутствием  $H_y$ -составляющей поля ( $TM$ -волна вдоль  $y$ ) (здесь и в дальнейшем индекс около типа волны характеризует однородное направление, вдоль которого классифицируются волны).

Первый тип волны характеризует поле, совпадающее со статическим, если условия, налагаемые на решения, совпадают с граничными условиями статической задачи. В односвязной области (например, когда при  $y = \pm d$  расположены идеальные электрические стенки)  $LEM$ -волна распространяться не может.

$LE$ - и  $LM$ -волны являются волновыми областями, в связи с чем ограничения, налагаемые односвязными областями, на них



не распространяются. При отсутствии вариаций поля вдоль  $y$  эти типы волн тождественно совпадают с  $E$ - ( $TM$ ) и  $H$ - ( $TE$ ) волнами в направлении  $z$ . В ограниченных по оси  $y$  системах [2, 4] прямого соответствия между  $LE$  и  $E$ - или  $LM$  и  $H$ -волнами сделать нельзя; в общем случае они могут быть представлены в виде комбинации  $E$ - и  $H$ -волн [3].

В соответствие с приведенной классификацией можно привести типы волн в некоторых типах цилиндрических замедляющих систем, обладающих симметрией типа  $C_N$  (рисунок).

Известно, что цилиндрическая система координат может быть получена путем конформного отображения декартовой системы координат на комплексную плоскость с помощью функции  $w = c^{1/\theta}$ . В частности, отображение верхней полуплоскости  $|u| > 0$  на круг единичного радиуса  $|w| < 1$  осуществляется посредством преобразования вида

$$w = e^{i\theta} \frac{u - u_0}{u - u_0^*}, \quad (1)$$

где  $u_0$  — точка на верхней полуплоскости, переходящая в центр круга;  $u_0^*$  — точка, симметричная с  $u_0$  относительно  $|u_0| = 0$  [5]. С помощью подобного соотношения можно отобразить полосу на кольцо и т. п.

Предположим, что полуплоскость гофрирования (рис., позиция  $a$ ). Тогда отображение вида (1) с учетом коэффициента линейного растяжения переведет ее на круг с выступами, расположенными на внешней границе. Следовательно, в соответствие с неограниченной по  $y$  плоской системе приводится кольцевая система, неограниченная вдоль оси (в цилиндрической системе координат это ось  $z$ ).

Можно увидеть, что в сечении  $z = \text{const}$  плоская гребенчатая система представляется в виде полуплоскости, причем начальная координата ее изменяется скачком от  $a$  при  $|z| < \frac{L-l}{2}$  до 0 при  $|z| < \frac{l}{2}$ . В соответствии с такой полосой

находится круг единичного радиуса при  $|z| < \frac{l}{2}$  и радиуса

$R = \left| \frac{u_0 - a}{u_0 + a} \right| < 1$  при  $|z| < \frac{L-l}{2}$ . Получаем круглый диафрагмированный волновод.

И, наконец, применяя подобное преобразование к системе, изображенной на рисунке, позиция  $b$ , получим замедляющую систему в виде радиальной линии (позиция  $g$ ) (отображение диафрагмированного волновода на кольцо).

Таким образом, одна и та же плоская замедляющая система имеет различные соответствия в кольцевом варианте в зависимости от того, в какой плоскости поперечного сечения происходит отображение.

При конформном отображении сохраняются углы между двумя любыми кривыми, пересекающимися в какой-либо точке внутри области, т. е. полностью сохраняются условия статических задач в системах. В то же самое время известно [6, 7], что любая электродинамическая задача может быть представлена как бесконечная суперпозиция отдельных статических задач, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Следовательно, поскольку конформные отображения сохраняют необходимые условия отдельных статических задач, они должны также в общем случае сохранять необходимые условия их бесконечной суперпозиции — электродинамических задач в системах, связанных соответствующими преобразованиями, например, типам волн в направляющей системе типа двух параллельных плоскостей ( $TEM_{\pm}$ ,  $H_{m\pm}$  и  $E_{m\pm}$  (здесь индекс  $m$  определяет число вариаций поля по  $x$ )) или типам волн в прямоугольном волноводе могут быть поставлены в соответствие типы волн в коаксиальном волноводе

$$TEM_{\pm} \rightarrow TEM_{\odot}, H_{1\pm} \rightarrow H_{01\odot}, H_{01\pm} \rightarrow H_{11\odot},$$

$E_{11\Box} \rightarrow E_{11\odot}$  и т. д. Подобные соответствия можно провести и между типами волн в замедляющих системах. В частности, если относительно направления распространения волны в плоской системе существуют волны типа  $LE$  или  $LM$ , то в кольцевой системе им будут соответствовать «квази- $LE$  или  $LM$ -волны» также относительно направления распространения.

Так при преобразовании плоской неограниченной системы в кольцевую относительно плоскости  $xOz$  получаем кольцевую магнетронную систему (рисунок, позиция б). Направление распространения электромагнитной волны совпадает с азимутальной осью, т. е. классификация волн должна происходить относительно оси  $\varphi$ . В такой системе возможно распространение  $LE_z$  ( $E_z = 0$ ) или  $LM_z$  ( $H_z = 0$ ) волн и решение целесообразно искать относительно  $H_z$ -или  $E_z$ -составляющих поля, допускающих разделение переменных в волновом уравнении [6].

При преобразовании плоской системы в кольцевую относительно плоскости  $xOy$  сохраняется ось  $z$  как направление распространения волны, но однородное направление теперь определяется осью  $\varphi$ . Следовательно, в системе распространяются  $LE_\varphi$  ( $E_\varphi = 0$ ) или  $LM_\varphi$  ( $H_\varphi = 0$ ) волны. Относительно плоской системы типа одиночная или вдвоенная гребенка в кольцевом варианте получаем цилиндрический диафрагмированный волновод, коаксиальный волновод, обе или одна стенка которого нагружена диафрагмами, и другие системы — все разнообразие определяется выбором преобразования. Поскольку относительно  $E_\varphi$ - и  $H_\varphi$ -составляющих поля волновое уравнение в цилиндрической системе координат не допускает разделение переменных [6], задачу необходимо решать относительно  $E_z$ - и  $H_z$ -составляющих, накладывая необходимые условия для распространения  $LE_\varphi$ -или  $LM_\varphi$ -волн.

Для удовлетворения условиям распространения  $LM_\varphi$ -волн ( $H_\varphi = 0$ ) из уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат находим

$$\frac{j}{\omega \varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi \partial z} = - \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (2)$$

Иначе,  $E_z$ - и  $H_z$ -составляющие поля не являются независимыми, уравнение (2) определяет их взаимосвязь. В более удобном виде соотношение (2) можно представить, воспользовавшись волновым уравнением для  $E_z$ -составляющей. Тогда получаем

$$\frac{j}{\omega \varepsilon_0 r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \varphi \partial z} = \left( k^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z. \quad (3)$$

Аналогично из уравнений для  $E_\varphi$ - и  $H_r$ -составляющих поля определяем следующее соотношение для  $LE_\varphi$ -волн ( $E_r = 0$ ):

$$\frac{j}{\omega \mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi \partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial r}. \quad (4)$$

Пусть решения для  $E_z$ - и  $H_z$ -составляющих поля записываются в виде

$$E_z = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{ns}(r) e^{j(n\varphi - \beta_s z)}; \quad (5)$$

$$H_z = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ns}(r) e^{j(n\varphi - \beta_s z)},$$

где  $e_{ns}(r)$ ,  $h_{ns}(r)$  — зависимости, удовлетворяющие граничным условиям на металлических поверхностях и являющиеся в общем случае комбинациями функций Бесселя. Используя уравнения (3) и (4), находим выражения, связывающие неизвестные амплитудные коэффициенты  $E_z$ - и  $H_z$ -составляющих: для  $LE_\varphi$ -волн

$$\int r \frac{\partial h_{ns}}{\partial r} dr = \frac{jn\beta_s}{\omega\mu_0} \int e_{ns} dr; \quad (6)$$

для  $LM_\varphi$ -волн

$$\frac{jn\beta_s}{\omega\varepsilon_0} \int r \frac{\partial h_{ns}}{\partial r} dr = \int [(k^2 - \beta_s^2)r^2 - n^2] e_{ns} dr. \quad (6a)$$

Поскольку (6) и (6a) должны удовлетворяться во всем объеме, необходимо производить усреднение по неортогональным функциям.

Для симметричных волн ( $n=0$ ) для  $LM_\varphi$ -волн  $E_z=0$  и  $H_z=0$  для  $LE_\varphi$ -волн ( $E_\varphi=0$ ), т. е. эти типы волн совпадают с  $E$ - или  $H$ -волнами относительно направления распространения, как и в плоской системе.

И, наконец, конформное отображение может быть осуществлено в плоскости  $yOz$ . Образующаяся при этом кольцевая система (рисунок, позиция  $z$ ) периодически неоднородна по азимуту (ось  $\varphi$ ), а однородное направление совпадает с осью  $r$  (ось  $y$  трансформируется в  $r$ ,  $x \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow \varphi$ ).

Классификацию волн следует производить относительно  $LE_r$ - ( $E_r=0$ ) или  $LM_r$ - ( $H_r=0$ ) волн. Решение уравнений, как и прежде, определяется относительно  $E_z$ - и  $H_z$ -составляющих поля, которые связаны между собой соотношениями [8]:

$$\frac{j\omega\varepsilon_0}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = - \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} \quad (7)$$

при удовлетворении условий  $H_r=0$  ( $LM_r$ -волны) и

$$\frac{j\omega\mu_0}{r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \varphi} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( k^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z \quad (8)$$

при  $E_r=0$  ( $LE_r$ -волны).

В данной системе для симметричной волны ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ) уравнение (7) требует равенства  $H_z = 0$  ( $E$ -волны), а уравнение (8) —  $E_z = 0$  ( $H$ -волны). Выражения, определяющие связь между  $H_z$ -и  $E_z$ -составляющими поля, могут быть получены в явном виде. Для этого необходимо записать решение волнового уравнения и использовать условие ортогональности цилиндрических функций в заданном интервале. Например, для системы, изображенной на рисунке (позиция  $z$ ), решение волновых уравнений записывается в виде

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} Z_n(\chi_{np}r) f_n(z) e^{-jn\varphi}; \quad (9)$$

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} Y_n(\rho_{nq}r) \psi_n(z) e^{-jn\varphi},$$

где  $\chi_{np}$  —  $p$ -й корень уравнения  $Z_n(\chi r_0, \chi r_1) = 0$ , являющегося граничным условием для  $E_z$ -составляющей поля  $[\bar{n}E] = 0$  при  $r = r_0$  и  $r = r_1$ , а  $\rho_{nq}$  —  $q$ -й корень уравнения  $Y'_n(\rho r_0, \rho r_1) = 0$ , граничного условия  $\left[ \frac{-\partial H}{\partial n} \right] = 0$  при  $r = r_0$  и  $r = r_1$ ,  $f_n(z)$  и  $\psi_n(z)$  — некоторые комбинации тригонометрических или гиперболических функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} + k_{zn}^2 f_n = 0; \quad k_{zn}^2 = k^2 - \chi_{np}^2;$$

$$\frac{d^2 \psi_n}{dz^2} + \alpha_{zn}^2 \psi_n = 0; \quad \alpha_{zn}^2 = k^2 - \rho_{nq}^2.$$

Получаем из (8)

$$\omega \mu_0 \nu \int \psi_n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\int_{r_0}^{r_1} (\chi_{np}^2 \cdot r^2 - n^2) Z_n Y'_n dr}{\int_{r_0}^{r_1} r (Y'_n)^2 dr} \cdot f_n \quad (10)$$

и из (7)

$$-\psi_n = \omega \varepsilon_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{\int_{r_0}^{r_1} Z_n Y'_n dr}{\int_{r_0}^{r_1} r (Y'_n)^2 dr} \int f_n dz. \quad (10a)$$

Здесь интегралы типа  $\int F dz$  характеризуют усреднение по  $z$ . Соотношения (10) и (10а) определяют связь между постоянными коэффициентами, входящими в зависимости  $f_n(z)$  и  $\psi_n(z)$ .

Таким образом, можно классифицировать типы волн в некоторых типах цилиндрических замедляющих систем, обладающих симметрией  $C_N$ . Описанные случаи не включают ряд систем, когда необходимо учитывать комбинацию частных решений: например, ограниченный по высоте анодный блок магнетронного типа, систему типа «клеверный лист», цилиндрические системы со щелями связи и т. п., но для выбора общего решения в каждом конкретном случае необходимо проводить самостоятельное исследование.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко Е. С., Шиманский В. И. Синфазные волны в диафрагмированном волноводе прямоугольного сечения. — «Изв. вузов. Радиотехника», 1960, III, 2, с. 153—160.
2. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., «Сов. радио», 1966. 632 с.
3. Введенский Б. А., Аренберг А. Г. Радиоволноводы, М.—Л., Гостехиздат, 1946. 192 с.
4. Завьялов А. С. К расчету замедляющих систем конечной ширины. — «Изв. вузов. Радиотехника», 1963, VI, 5, с. 978—980.
5. Фукс Б. Ф., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М., «Наука», 1964. 388 с.
6. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I. М., ИЛ, 1958. 930 с.
7. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., ИЛ, 1954. 428 с.
8. Терещенко А. И., Шейн А. Г. Дисперсионные уравнения кольцевых систем на диафрагмированных прямоугольных волноводах. — «Изв. вузов. Радиотехника», 1965, VIII, 5, с. 538—545.