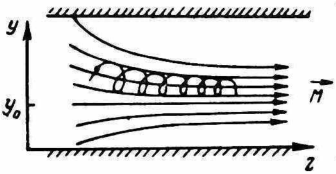
УДК 621.385.62

В. А. ЖУРАХОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСРЕДНЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО РОТАТОРА ВНУТРИ ВОЛНОВОДА, ПОГРУЖЕННОГО В АДИАБАТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Содержанием настоящего сообщения является распространение математического метода усреднения характеристик гирорезонансного винтового движения разреженного потока электронов [1 и др.] на системы с плавно меняющимся направляющим магнитостатическим полем (см. рисунок), при помощи которого осуществляется управление процессами электронно-волнового взаимодействия в гироприборах с целью оптимизации их рабочих параметров.



Задачи с существенно неоднородным адиабатически-изменяющимся магнитным полем уже рассматривались ранее [2 и др.] применительно к резонаторным гироприборам осесимметричной конструкции. В нашей работе новым является: во-первых, распространение методики усреднения на адиабатические системы с бегущими волнами; во-вторых, охват общего случая пространственной конфигурации адиабатического магнитного поля с приоритетным направлением и, в-третьих, построение усредненных уравнений гирорезонансных режимов в рамках строго-релятивистской теории.

Первое обстоятельство в комментариях не нуждается. Второе обстоятельство важно для некруглых решений гироприборов, к которым относится, например, гиро-ЛПВ в плоской однокаскадной [3] и многокаскадной [4] модификациях. Третье обстоятельство обосновано появлением проектов [5 и др.] гирорезонансных приборов, использующих существенно релятивистские винтовые электронные потоки. Для таких приборов может оказаться необходимым последовательный учет как продольных, так и поперечных перемещений ведущих центров электронных ротаторов.

Винтовое движение электрона в адиабатически-неоднородном стационарном магнитном поле

Начнем с тривиального случая полностью однородного магнитного поля $M_x = M_y = 0$, $M_z = M = \text{const}$. Релятивистское винтовое движение электрона в таком поле описывается известными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&d(mv_x)/d\tau + Gv_y = 0;\\
&d(mv_y)/d\tau - Gv_x = 0;\\
&d(mv_z)/\partial\tau = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где v_x, v_y, v_z — декартовы компоненты скорости частицы;
m — ее релятивистская масса;
τ — продолжительность движения;
$G = |e|M$, $|e|$ — заряд позитрона.

Решением системы (1) является

$$
\begin{aligned}
&x = X_i + r_i \cos(\vartheta_i + Gm_i^{-1}\tau);\\
&y = Y_i + r_i \sin(\vartheta_i + Gm_i^{-1}\tau);\\
&z = z_i + v_{zi}\tau,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где X_i, Y_i — координаты оси винтовой траектории;
z_i, ϑ_i — ее радиус и начальная геометрическая фаза;
Gm_i^{-1} — гирочастота;
i — индекс начальных условий.

Допускаем теперь плавную неоднородность магнитного поля с приоритетным направлением. Предполагаем, что на некоторой прямой $x = x_0$, $y = y_0$, параллельной оси z, поле имеет вид $M_x = M_y = 0$, $M_z = M(z)$, а в «линейной» окрестности этой прямой описывается как

$$
\begin{aligned}
&M_x = -[a(x - x_0) + b(y - y_0)]M'(z);\\
&M_y = -[b(x - x_0) + (1 - a)(y - y_0)]M'(z);\\
&M_z = M(z),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где штрих означает дифференцирование по z, a и b — пара констант, подлежащих конкретизации в каждом отдельном случае. Например, при $b=0$ реализуется магнитное поле с эллиптическим типом симметрии относительно плоскостей $x=x_0$ и $y=y_0$, из которого в частных случаях $a=0$ или $a=1$ получаются поля, однородные в x- или y-направлениях, а в случае $a=1/2$ получается поле с осевой симметрией.

Составляем соответствующую полю (3) систему уравнений движения электронного ротатора,

$$\begin{gathered} d(m_i v_x)/d\tau + Gv_y + G'v_z[b(x-x_0)+(1-a)(y-y_0)]=0; \\ d(m_i v_y)/d\tau - Gv_x - G'v_z[a(x-x_0)+b(y-y_0)]=0; \\ d(m_i v_z)/d\tau - G'v_x[b(x-x_0)+(1-a)(y-y_0)]+ \\ +G'v_y[a(x-x_0)+b(y-y_0)]=0 \end{gathered} \tag{4}$$

и решаем ее способом вариации произвольных постоянных, т. е. с помощью замены переменных

$$\begin{gathered} x = X + r\cos\vartheta; \quad y = Y + r\sin\vartheta; \\ v_x = -Gm_i^{-1} r\sin\vartheta; \quad v_y = Gm_i^{-1} r\cos\vartheta, \end{gathered} \tag{5}$$

диктуемой структурой тривиальных решений (2).

Подстановка замен (5) в первые два уравнения системы (4) дает

$$\begin{gathered} \dot r = -\dot G/2G\,\{r[1+(1-2a)\cos 2\vartheta - 2b\sin 2\vartheta] - 2[a(X-x_0)+ \\ +b(Y-y_0)]\cos\vartheta - 2[b(X-x_0)+(1-a)(Y-y_0)]\sin\vartheta\}; \\ \dot\vartheta = G/m_i + \dot G/2Gr\,\{r[(1-2a)\sin 2\vartheta + 2b\cos 2\vartheta] - 2[a(X-x_0)+ \\ +b(Y-y_0)]\sin\vartheta + 2[b(X-x_0)+(1-a)(Y-y_0)]\cos\vartheta\}, \end{gathered} \tag{6}$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по τ.

Привлекаем теперь метод усреднения, состоящий в приближенной замене дифференциальной системы с малыми слагаемыми в правых частях, содержащими быстровращающуюся фазу ϑ, на сглаженную систему, получаемую из исходной путем усреднения этих малых слагаемых по явно входящей быстровращающейся фазе ϑ. Вместо уравнений (6) получаем простую систему адиабатического приближения

$$\dot r = -(\dot G/2G)r; \quad \dot\vartheta = Gm_i^{-1} \tag{7}$$

с решениями

$$r = \frac{r_i}{\sqrt{1+\psi}}; \quad \vartheta = \vartheta_i + \frac{G_i}{m_i}\int_0^\tau (1+\psi)\,d\tau; \quad \psi = \frac{G}{G_i} - 1. \tag{8}$$

Далее формулируем условия совместности замен (5) (производные по времени от выражений для координат должны в точности давать выражения для скоростей):

$$\dot{X} + \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta = -rGm_i^{-1}\sin\vartheta \tag{9}$$
$$\dot{Y} + \dot{r}\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta = rGm_i^{-1}\cos\vartheta$$

и привлекаем соотношения (6). Получаем систему

$$\dot{X} = (\dot{G}/G)\{r[(1-a)\cos\vartheta - b\sin\vartheta] - a(X-x_0) - b(Y-y_0)\};$$
$$\dot{Y} = (\dot{G}/G)[r(a\sin\vartheta - b\cos\vartheta) - b(X-x_0) - (1-a)(Y-y_0)], \tag{10}$$

которая в адиабатическом приближении редуцируется к виду

$$\dot{X} + (\dot{G}/G)[a(X-x_0) + b(Y-y_0)] = 0;$$
$$\dot{Y} + (\dot{G}/G)[b(X-x_0) + (1-a)(Y-y_0)] = 0, \tag{11}$$

допускающему аналитическое решение

$$X = x_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{(X_i - x_0)\operatorname{ch}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(2a-1)(X_i-x_0)+2b(Y_i-y_0)}{\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}}\operatorname{sh}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\};$$
$$Y = y_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{(Y_i - y_0)\operatorname{ch}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right] + \right. \tag{12}$$
$$\left. + \frac{(1-2a)(Y_i-y_0)+2b(X_i-x_0)}{\sqrt{(1+2a)^2+4b^2}}\operatorname{sh}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\}.$$

Подставляя теперь результаты (8) и (12) в представления (5), записываем итог:

$$x = X + \frac{r_i}{\sqrt{1+\psi}}\cos\left[\vartheta_i + \frac{G_i}{m_i}\int_0^\tau(1+\psi)\,d\tau\right];$$
$$y = Y + \frac{r_i}{\sqrt{1+\psi}}\sin\left[\vartheta_i + \frac{G_i}{m_i}\int_0^\tau(1+\psi)\,d\tau\right]; \tag{13}$$
$$v_x = -\frac{r_iG_i}{m_i}\sqrt{1+\psi}\sin\left[\vartheta_i + \frac{G_i}{m_i}\int_0^\tau(1+\psi)\,d\tau\right];$$
$$v_y = \frac{r_iG_i}{m_i}\sqrt{1+\psi}\cos\left[\vartheta_i + \frac{G_i}{m_i}\int_0^\tau(1+\psi)\,d\tau\right].$$

Наконец, преобразуем последнее уравнение системы (4) к виду

$$2v_z\dot{v}_z = 2\dot{G}m_i^{-1}\{v_x[(X - x_0 + r\cos\vartheta) + (1-a)(Y - y_0 + r\sin\vartheta)] - \\ - v_y[a(X - x_0 + r\cos\vartheta) + b(Y - y_0 + r\sin\vartheta)]\} \quad (14)$$

и используем соотношения (8) и (13). После выполнения усреднения получается уравнение адиабатического приближения

$$2v_z\dot{v}_z = -\dot{G}G_i r_i^2 m_i^{-2} \quad (15)$$

с решением

$$v_z = \pm\sqrt{v_{zi}^2 - \psi G_i^2 r_i^2 m_i^{-2}}, \quad (16)$$

причем перемена знака дрейфовой скорости v_z наступает по достижении электроном плоскости магнитного зеркала, в которой подкоренное выражение (16) обращается в нуль. Система соотношений (12), (13) и (16) представляет полное описание винтового движения частицы в адиабатически-неоднородном магнитном поле рассматриваемого типа.

Возмущение винтового движения силами высокочастотного поля

Совместное воздействие адиабатически-неоднородного чисто магнитного и переменного во времени электромагнитного полей на электронный ротатор, перемещающийся в волноводе, описывается дифференциальной системой:

$$\begin{aligned} &d(mv_x)/d\tau + Gv_y + \dot{G}[b(x - x_0) + (1-a)(y - y_0)] = f_x; \\ &d(mv_y)/d\tau - Gv_x - \dot{G}[a(x - x_0) + b(y - y_0)] = f_y; \\ &d(mv_z)/d\tau - \dot{G}(v_x/v_z)[b(x - x_0) + (1-a)(y - y_0)] + \\ &+ \dot{G}(v_y/v_z)[a(x - x_0) + b(y - y_0)] = f_z, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$ — вектор силы нестационарного поля.

Для решения системы (17) применяем замену переменных, диктуемую структурой решений (13) стационарной задачи:

$$x = \overline{X} + \frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}; \; y = \overline{Y} + \frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{1+\psi}};$$

$$v_x = -\frac{rG_i}{m}\sqrt{1+\psi}\sin\vartheta; \quad v_y = \frac{rG_i}{m}\sqrt{1+\psi}\cos\vartheta, \quad (18)$$

где обозначено по типу выражений (12)

$$\overline{X} = x_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{(X - x_0)\operatorname{ch}\left[\sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right] + \right.$$

$$+\frac{(2a-1)(X-x_0)+2b(Y-y_0)}{\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}}\operatorname{sh}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\}; \qquad (19)$$

$$\overline{Y}=y_0+\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{(Y-y_0)\operatorname{ch}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-2a)(Y-y_0)+2b(X-x_0)}{\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}}\operatorname{sh}\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\Bigg\}.$$

Подстановка замен (18) в первые два уравнения системы (17) дает

$$\dot{r}=-\frac{f_x\sin\vartheta-f_y\cos\vartheta}{G_i\sqrt{1+\psi}}+\frac{\dot{\psi}r}{2(1+\psi)}\left[(2a-1)\cos 2\vartheta+2b\sin 2\vartheta\right]+$$

$$+\frac{\dot{\psi}}{\sqrt{1+\psi}}\{(\overline{X}-x_0)(a\cos\vartheta+b\sin\vartheta)+(\overline{Y}-y_0)[b\cos\vartheta+$$

$$+(1-a)\sin\vartheta]\}; \qquad (20)$$

$$\dot{\vartheta}=\frac{G_i(1+\psi)}{m}-\frac{f_x\cos\vartheta+f_y\sin\vartheta}{rG_i\sqrt{1+\psi}}+\frac{\dot{\psi}[(1-2a)\sin 2\vartheta+2b\cos 2\vartheta]}{2(1+\psi)}+$$

$$+\frac{\dot{\psi}}{r\sqrt{1+\psi}}\{(\overline{X}-x_0)(b\cos\vartheta-a\sin\vartheta)+(\overline{Y}-y_0)[(1-a)\cos\vartheta-$$

$$-b\sin\vartheta]\}.$$

Далее формулируем условия совместности замен (18) (производные по времени от выражений для координат должны в точности давать выражения для скоростей):

$$\frac{\partial\overline{X}}{\partial X}\dot{X}+\frac{\partial\overline{X}}{\partial Y}\dot{Y}+\frac{\partial\overline{X}}{\partial\psi}\dot{\psi}+\frac{\dot{r}\cos\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}-\frac{r\dot{\vartheta}\sin\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}-\frac{\dot{\psi}r\cos\vartheta}{2(1+\psi)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{rG_i\sqrt{1+\psi}}{m}\sin\vartheta;$$

$$(21)$$

$$\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}\dot{X}+\frac{\partial\overline{Y}}{\partial Y}\dot{Y}+\frac{\partial\overline{Y}}{\partial\psi}\dot{\psi}+\frac{\dot{r}\sin\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}+\frac{r\dot{\vartheta}\cos\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}-\frac{\dot{\psi}r\sin\vartheta}{2(1+\psi)^{3/2}}=$$

$$=\frac{rG_i\sqrt{1+\psi}}{m}\cos\vartheta$$

и привлекаем соотношения (20). Получаем систему уравнений для описания движения ведущего центра ротатора:

$$\dot{X}=\frac{-1}{G_i\sqrt{1+\psi}}\left\{f_y\operatorname{ch}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\ \ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]+\right.$$

$$+\frac{(1-2a)f_y+2bf_x}{\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\Bigg\}+\ldots;$$

$$\dot{Y}=\frac{1}{G_i\sqrt{1+\psi}}\left\{f_x\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{(2a-1)f_x+2bf_y}{\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\}+\ldots, \tag{22}$$

где многоточия заменяют несущественные для дальнейшего изложения слагаемые, чисто периодические по ϑ.

Наконец, подставляем замены (18) в последнее уравнение системы (17)

$$\dot{m}v_z+\dot{v}_z m=f_z-\left\{\left[b\left(X-x_0+\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}\right)+(1-a)\left(Y-y_0+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}\right)\right]\sin\vartheta+\left[a\left(X-x_0+\frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}\right)+b\left(Y-y_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{1+\psi}}\right)\right]\cos\vartheta\right\}\frac{rG_i}{mv_z}\sqrt{1+\psi}\,\dot{G} \tag{23}$$

и отдельно дифференцируем выражение для массы как сложной функции времени с промежуточным аргументом v (модуль скорости)

$$m=m(v)=m\left(\sqrt{v_z^2+m^{-2}r^2G_i^2(1+\psi)}\right), \tag{24}$$

что приводит к соотношению

$$\dot{m}\left[v\frac{dv}{dm}+\frac{r^2G_i^2}{m^3}(1+\psi)\right]-\dot{v}_z v_z=\dot{r}\frac{rG_i^2}{m^2}(1+\psi)+\dot{\psi}\frac{r^2G_i^2}{2m^2}. \tag{25}$$

Решая совместно систему уравнений (23), (25) относительно $\dot{m}$, $\dot{v}_z$ и исключая затем r на основании 1-го равенства (20), получаем результат:

$$\dot{m}=-\frac{(f_x\sin\vartheta-f_y\cos\vartheta)m^{-1}rG_i\sqrt{1+\psi}-f_zv_z}{v\,(dv/dm)\,[m+(dv/dm)^{-1}v]};$$

$$\dot{v}_z=\left[m^2+\frac{mv}{(dv/dm)}\right]^{-1}\left\{(f_x\sin\vartheta-f_y\cos\vartheta)\frac{rG_i\sqrt{1+\psi}\,v_z}{mv\,(dv/dm)}+\right.$$

$$\left.+f_z\left[m+\frac{r^2G_i^2(1+\psi)}{m^2v\,(dv/dm)}\right]\right\}-\dot{\psi}\frac{r^2G_i^2}{2m^2v_z}+\ldots, \tag{26}$$

где многоточия заменяют несущественные для дальнейшего изложения слагаемые, чисто периодические по ϑ.

Уравнения движения (20), (22) и (26) представляют собой дифференциальную систему, приведенную к нормальной форме. Введение медленно-меняющейся относительной фазы θ соотношениями

$$p = \theta + n\vartheta; \quad \dot{p} = \omega\,(1 - v_\Phi^{-1} v_z), \tag{27}$$

где p, v_Φ, ω — текущая быстрая фаза, фазовая скорость и частота электромагнитного поля, преобразуют эту систему к стандартной (для метода усреднения) форме — с периодическими по быстровращающейся фазе ϑ относительно малыми правыми частями (резонансные силы высокочастотного поля лишь подправляют траекторию электрона, не меняя ее характера как винтовой; частотная расстройка также относительно мала: гирорезонанс). В результате усреднения всех правых частей по явно входящей быстровращающейся фазе ϑ получаем нормальную систему дифференциальных уравнений относительно медленно-меняющихся характеристик винтового движения электронов:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{\dot{X}\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{(2a-1)\,\dot{X}+2b\,\dot{Y}}{\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{(2a-1)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\}=$$

$$= -\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\psi)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} a_y\,d\vartheta;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\left\{\dot{Y}\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-2a)\dot{Y}+2b\dot{X}}{\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{(1-2a)^2+4b^2}\,\ln\frac{1}{\sqrt{1+\psi}}\right]\right\}=$$

$$= \frac{1}{2\pi\Gamma(1+\psi)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} a_x\,d\vartheta; \tag{28}$$

$$\frac{\dot{r}}{\sqrt{1+\psi}} = -\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\psi)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(a_x\sin\vartheta - a_y\cos\vartheta)\,d\vartheta;$$

$$\dot{m} = -\frac{m_0}{2\pi c^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[(a_x\sin\vartheta - a_y\cos\vartheta)\,\frac{r\Gamma\sqrt{1+\psi}\,m_0}{m} - a_z v_z\right]d\vartheta;$$

$$v_z = \frac{m_0}{2\pi m} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left\{ (a_x \sin\vartheta - a_y \cos\vartheta) \frac{r\Gamma\sqrt{1+\psi}\, m_0 v_z}{mc^2} + \right.$$

$$\left. + a_z \frac{m_0^2}{m^2} \left[1 + \frac{r^2\Gamma^2(1+\psi)}{c^2} \right] \right\} d\vartheta - \dot{\psi} \frac{r^2\Gamma^2 m_0^2}{2 v_z m^2};$$

$$\dot{\theta} = \frac{n}{2\pi r\Gamma\sqrt{1+\psi}} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (a_x \cos\vartheta + a_y \sin\vartheta)\, d\vartheta + \omega (1 - v_\phi^{-1} v_z) -$$

$$- n\Gamma (1+\psi)\, m_0 m^{-1},$$

где m_0 — масса покоящегося электрона;

c — скорость света, $\Gamma = G_l / m_0$, $\vec{a} = \vec{f}/m_0$. Под знаками интегралов берутся декартовы компоненты вектора

$$\vec{a} = -|e|\, m_0^{-1} \{\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]\}, \tag{29}$$

где $\vec{E}$, $\vec{B}$ — напряженность электрической и индукция магнитной компонент высокочастотного поля с заменой аргумента p, являющегося быстропеременной фазой этого поля, по правилу (27):

$$\vec{a}(p, \vartheta) = \vec{a}(\theta + n\vartheta, \vartheta), \tag{30}$$

причем медленно-меняющиеся переменные X, Y, r, m, v_z и θ выступают в этих интегралах как параметры.

Усредненная система уравнений возмущенного винтового движения

Конкретизируем задачу. Пусть возмущающее электромагнитное поле представляет собой в общем случае гибридную волну:

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\beta_\phi}\cdot\frac{\partial \Pi^e}{\partial x} F^e + j\,\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} E^m\right)\exp jp\right];\\
E_y &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\beta_\phi}\cdot\frac{\partial \Pi^e}{\partial y} F^e - j\,\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} F^m\right)\exp jp\right];\\
E_z &= \mathrm{Re}\left(j\,\frac{\beta_\phi^2 - 1}{\beta_\phi^2}\,\Pi^e F^e \exp jp\right);\\
B_x &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{j}{\beta_\phi}\cdot\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} F^m - \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} F^e\right)\exp jp\right];\\
B_y &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{j}{\beta_\phi}\cdot\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} F^m + \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} F^e\right)\exp jp\right];
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$B_z = \mathrm{Re}\left(-\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2 c} \Pi^m F^m \exp jp\right);$$

$$\overline{X} = X_1;\ \overline{Y} = Y_1;$$

где Re — символ взятия вещественной части выражения; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица;

Π^e, Π^m зависят от поперечных координат x и y и представляют собой вещественные безразмерные электрическую и магнитную функции Герца; комплексные амплитуды F^e и F^m имеют размерность электрической напряженности и выступают как медленно-меняющиеся функции продольной координаты z (комплексность здесь связана с учетом возможного медленного изменения фазы);

$k = \omega/c$ — волновое число;

$\beta_\Phi = v_\Phi/c$.

Подставляя поле (31) в правые части уравнений нормальной системы (28) с учетом правил (29), (30) и замен (18), замечаем, что получающиеся при этом интегральные выражения формальной заменой

$$\overline{X} = X_1;\ \overline{Y} = Y_1;$$

$$r(1+\psi)^{-1/2} = r_1;\quad \Gamma(1+\psi) = \Gamma_1 \tag{32}$$

приводятся к виду, свойственному случаю однородного направляющего магнитного поля. Это обстоятельство избавляет от необходимости специального подсчета усредняющих квадратур в уравнениях (28), так как можно воспользоваться готовыми результатами задачи [1] об однородном магнитном поле с последующим применением обращения замены (32) при одновременном использовании символических формул:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial X_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial}{\partial Y_1}; \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial X_1}{\partial Y} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial Y} \cdot \frac{\partial}{\partial Y_1}.$$

В результате получаем систему:

$$\dot{X} = \frac{\eta}{\Gamma k} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \mathrm{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right];$$

$$\dot{Y} = -\frac{\eta}{\Gamma k} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \mathrm{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right];$$

$$\dot{r} = \frac{\eta n}{\Gamma k r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \mathrm{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^{ш}}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right]; \tag{34}$$

$$\dot{m} = \frac{\eta n \Gamma_1 m_0^2}{k c^2 m s} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \mathrm{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right];$$

$$\dot v_z = \frac{\eta n \Gamma_1 m_0^2 \sigma}{kcm^2 s} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right] -$$

$$- \dot\psi r^2 \Gamma^2 m_0^2 (2 v_z m^2)^{-1};$$

$$\dot\theta = -\frac{\eta n}{\Gamma k r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re}\left[\left(\sigma \Pi_n^e F^e + \frac{s}{n} r \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} F^m\right) \exp j\theta\right] +$$

$$+ \omega (1 - v_\Phi^{-1} v_z) - n\Gamma (1 + \psi) m_0 m^{-1}.$$

Здесь $\eta = |e|/m_0$ — удельный заряд позитрона при нулевой скорости;

$$\sigma = \beta_\Phi^{-1} (1 - \beta_\Phi \beta_z); \quad s = 1 - \beta_\Phi^{-1} \beta_z; \tag{35}$$

Π_n^e, Π_n^m — рабочие гармоники функций Герца;

$$\Pi_n^e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi^e \exp jn\vartheta \, d\vartheta;$$

$$\Pi_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi^m \exp jn\vartheta \, d\vartheta. \tag{36}$$

Отметим, что дифференциальные уравнения для $\dot r$, $\dot m$ и $\dot v_z$ системы (34) не являются независимыми, так как переменные величины r, m, v_z и ψ связаны одним конечным соотношением

$$r^2 = \frac{c^2 m^2}{\Gamma^2 m_0^2 (1 + \psi)} \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2} - \beta_z^2\right), \tag{37}$$

выражающим релятивистскую взаимозависимость массы и скорости. Поэтому любое из трех указанных дифференциальных уравнений может быть опущено.

В упрощенной задаче с однородным магнитным полем эти уравнения порождают еще одно конечное соотношение между переменными r, m и v_z — интеграл усредненного движения $m\sigma = \text{const}$ [1], так что в итоге m и v_z выражаются через r, и вместо трех дифференциальных уравнений остается лишь одно. В этой связи возникает вопрос, нельзя ли построить соответствующее обобщение интеграла усредненного движения на случай адиабатически-неоднородного магнитного поля. Оказывается, такое построение невозможно.

Действительно, сравнивая между собой правые части уравнений для $\dot m$ и $\dot v_z$ и используя формулу (37), составляем дифференциальное уравнение Пфаффа:

$$P dm + Q d\beta_z + R d\psi = 0, \tag{38}$$

где

$$P = -\frac{\sigma}{m}; \; Q = 1; \; R = \frac{1}{2\beta_z (1 + \psi)} \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2} - \beta_z^2\right), \tag{39}$$

для которого необходимое и достаточное условие

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial \psi}-\frac{\partial R}{\partial \beta_z}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial m}-\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial \beta_z}-\frac{\partial Q}{\partial m}\right)\equiv 0 \qquad (40)$$

интегрируемости одним соотношением, как нетрудно проверить, в общем случае не выполняется.

Итог работы: получен алгоритм (34) поведения электронного ротатора в волноводе, погруженном в адиабатически-неоднородное магнитное поле с приоритетным направлением вдоль этого волновода. Систему усредненных уравнений движения (34) отличает важное для практического использования свойство — ее структура инвариантна относительно конкретного вида пространственной конфигурации направляющего адиабатического магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жураховский В. А. Математический аппарат теории нелинейных колебаний электронов в магнитном поле. — Сб. «Радиотехника». Вып. 21. Харьков, 1972, с. 80—97.
2. Кураев А. А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Минск, «Наука и техника», 1971, с. 221—234.
3. Жураховский В. А. Нелинейная теория гирорезонансной лампы поперечной волны (гиро-ЛПВ). — «Радиотехника и электроника», 1969, **14**, № 1, с. 128—136.
4. Жураховский В. А. Гирорезонансный усилитель. — Бюл. «Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки», 1971, № 20, 171 с.
5. Feinstein J., Jory H. R. High frequency electron discharge device. Патент США № 3457450. Опубл. 22.07.1969, с. 1—12.