УДК 621.386.6

Л. А. ПОСПЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УМНОЖИТЕЛЬНОГО МАГНЕТРОНА. Ч. I. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД И ФАЗ

Введение

В настоящее время известен ряд работ, посвященных исследованию умножительных свойств магнетрона в различных участках СВЧ-диапазона [1—4].

В них указано на достоинства умножительного магнетрона: — высокоэффективное умножение частоты [2, 4] в дециметровом диапазоне волн; повышение генерируемой мощности при ослабленных требованиях к источникам питания в сантиметровом диапазоне [1]; повышение надежности и сроков службы, увеличение размеров и ослабление технологических трудностей в миллиметровом диапазоне [1, 3]. В работах [1, 4] сделаны попытки теоретически объяснить обнаруженные в них весьма перспективные экспериментальные результаты. Однако авторы работы [1] ограничились лишь простейшими наметками теории, отягощенной довольно сильными априорными предположениями относительно формы и механизма взаимодействия электронных спиц с высокочастотным полем. В формулы теории введен ряд параметров, которые должны быть определены из эксперимента. Тем не менее авторам работы [1] не удалось достаточно полно и убедительно объяснить полученные ими же интересные экспериментальные результаты. Например, неясно, почему амплитуда второй гармоники может быть в несколько раз больше амплитуды основной частоты и в то же время оказывать слабое влияние на формирование спиц и режим генерации первой гармоники. Мы далее покажем, что это предположение, являющееся основой теоретических построений авторов работы [1], не состоятельно и обусловлено неправильной трактовкой их же экспериментальных результатов по исследованию односекционного умножительного магнетрона.

В работе [4] теоретическое объяснение работы двуханодного умножительного магнетрона дано на основе линейной теории. Поскольку же процесс образования и генерации гармоник существенно нелинеен, то для объяснения амплитудных зависимостей (расчет к. п. д. и коэффициента преобразования) автор привлекает постулаты, строгое применение которых выходит за рамки применимости построенной им теории.

Из всего сказанного следует актуальность построения корректной нелинейной самосогласованной теории умножительного магнетрона.

Основу подобной теории могли бы составить методы П. Л. Капицы, В. Е. Нечаева, либо С. И. Бычкова, нашедшие в настоящее время широкое применение.

Однако физическая теория П. Л. Капицы довольно громоздка и требует уже для обычного магнетрона численные табулирования интегралов взаимодействия [8].

Инженерная теория С. И. Бычкова [7], апеллирующая к эксперименту для обоснования своих постулатов, применительно к умножителю встречается с принципиальными трудностями: при построении теории умножителя параметр ширины спицы не только не исчезает, как это было в работе [7], но появляются новые. Это связано с тем, что в умножителе возможно несколько типов спиц. К ним добавляются еще и новые параметры, например токи, текущие через спицы различных сортов.

В настоящей работе в основу положен метод П. Л. Капицы. Однако вычисление интегралов взаимодействия проведено приближенно, согласно приближению С. И. Бычкова [7]. Если ограничиться этим приближением, то система управляющих уравнений оказывается достаточно простой для анализа и все параметры задачи определяются однозначно в рамках используемой теории. Рассмотрение проведено применительно к плоскому магнетрону, хотя обобщение его на случай цилиндрического магнетрона не составляет труда [5, 7].

Для простоты и наглядности анализа мы ограничились кратностью умножения, равному двум. Пути обобщения теории на большие кратности умножения очевидны. Обе эти возможности намечено реализовать в очередных публикациях.

Вывод основных уравнений теории

Пусть рабочими видами колебаний $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ резонатора будут два вида с резонансными частотами ω_1 и ω_2. Добротность их обозначим через Q_1 и Q_2 соответственно. Предполагаем далее для простоты, что $|2\omega_1-\omega_2| \ll \omega_2$, т. е. рассматривать будем двукратное умножение частоты в резонансном случае.

В синхронном режиме, который в основном будет рассмотрен ниже, в системе устанавливаются колебания с частотами ω: $(|\omega-\omega_1| \ll \omega)$ и $2\omega(|2\omega-\omega_2| \ll 2\omega)$. В частных случаях может оказаться, что $\omega=\omega_1$ либо $2\omega=\omega_2$. Это будет тогда, когда система возбуждается от внешнего источника, имеющего частоту колебаний ω либо 2ω. Если внешний источник отсутствует, частота ω должна определяться из соответствующего дисперсионного уравнения, учитывающего, вообще говоря, нелинейный режим каждого из резонансных видов колебаний.

При изучении синхронного режима исключительно важным является выяснение условий, при которых этот режим возможен. Это необходимо для его экспериментального обнаружения. Такие условия будут получены на основе общей теории устойчивости решений «укороченных уравнений» [11].

В общем случае амплитуда и фаза (либо частота) высокочастотного поля определяется уравнениями баланса активной P_a и реактивной P_r мощности взаимодействия [8]:

$$\frac{dW_1}{dt}+2\omega_1' W_1=P_{a1}=-\frac{\omega}{2\pi}\int dt\, dV \vec{j}(t)\vec{E}_1(t); \qquad (1)$$

$$2\left(\frac{d\psi_1}{dt}+\omega-\omega_1\right)W_1=P_{r1}=\frac{1}{2\pi}\int dt\, dV \vec{j}(t)\,\frac{\partial \vec{E}_1(t)}{\partial t}, \qquad (2)$$

где W_1 — энергия, а ψ_1 — фаза поля волны $\vec{E}_1$. Интегрирование проводится по периоду высокочастотного поля $\vec{E}_1$ и по объему, в котором находятся электроны и высокочастотное поле одновременно; декремент затухания собственных колебаний на частоте ω_1:

$$\omega_1'=\omega_1/2Q_1.$$

Аналогично для поля $\vec{E}_2$:

$$\frac{dW_2}{dt}+2\omega_2' W_2=P_{a2}=-\frac{\omega}{\pi}\int dt\,dV\vec{j}\,\vec{E}_2; \tag{3}$$

$$2\left(\frac{d\psi_2}{dt}+2\omega-\omega_2\right)W_2=P_{r2}=\frac{1}{2\pi}\int dt\,dV\vec{j}\,\frac{\partial\vec{E}_2}{\partial t}. \tag{4}$$

Рассмотрим для простоты плоский магнетрон. Пусть электронный поток направлен вдоль оси y, электрическое поле E_0 вдоль x, магнитное поле напряженностью H_0 вдоль z. Катод расположен в плоскости $y=0$, второй электрод в плоскости y_0 $(\eta_0\equiv\equiv\beta y_0)$.

Для этого случая [8]

$$\vec{j}\,\vec{E}=j_yE_0=\rho v_y E_0; \tag{5}$$

v_y определяется через высокочастотное поле, согласно соотношению [5]:

$$v_y=\frac{e}{m\Omega}E_x, \tag{6}$$

где ларморова (циклотронная) частота

$$\Omega=\frac{eH_0}{mc}. \tag{7}$$

Высокочастотное поле можно выбирать в виде, аналогичном [8] $\left(\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2\right)$:

$$\frac{E_x}{E_0}=\varepsilon_1\cos\xi f(\eta)+\varepsilon_2\cos 2\xi f(2\eta); \tag{8}$$

$$\frac{E_y}{E_0}=\varepsilon_1\sin\xi f'(\eta)+\varepsilon_2\sin 2\xi f'(2\eta),$$

где

$$\xi=gx-\omega t,\quad \eta=gy.$$

Если пространство взаимодействия замкнуто, то в силу однозначности полей волновое число должно удовлетворять соотношению

$$gL=2\pi n\quad (n\text{ — целое}). \tag{9}$$

Для плоского магнетрона (планотрона)

$$f(\eta)=\operatorname{sh}\eta; \tag{10}$$

для нигогрона [8]

$$f(\eta)=\operatorname{ch}\eta. \tag{11}$$

Для планотрона с большим расстоянием анод-катод можно считать [12]

$$f(\eta)=e^{\eta}. \tag{12}$$

Рассмотрение случая (3) оправдано тем, что анализ его несколько проще, а закономерности здесь те же, что и в случае поля (10) [8].

Далее учитываем, что

$$W_{1,2} = \varepsilon_{1,2}^2 W_{0\,1,2}\,, \tag{13}$$

где

$$W_{0,1,2} = E_0^2/2\omega_{1,2} R_{1,2}$$

($R_{1,2}$ — сопротивление связи резонансной структуры по отношению к полям $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ соответственно).

При двукратном умножении частоты в пространство взаимодействия образуются два сорта спиц. Спицы первого типа будут находиться вблизи максимума поля $\vec{E}_1$, второго — вблизи максимума поля $\vec{E}_2$. Пусть левые и правые границы спиц определяются соответственно соотношениями

$$\xi_{1,2} = \xi_{1,2}(\eta), \quad \xi'_{1,2} = \xi'_{1,2}(\eta). \tag{14}$$

Тогда плотность заряда в спицах первого и второго типа будут определяться соотношениями, аналогичными соотношениям (3,05) работы [5]:

$$\rho_1 = \frac{I_1(\xi_2 - \xi_1)/E_0 h\beta}{\varepsilon_1 f(\eta)(\cos\xi_2 - \cos\xi_1) + \varepsilon_2 f(2\eta)(\cos 2\xi_2 - \cos 2\xi_1)}; \tag{15}$$

$$\rho_2 = \frac{I_2(\xi'_2 - \xi'_1)/E_0 h\beta}{\varepsilon_1 f(\eta)(\cos\xi'_2 - \mathrm{con}\,\xi'_1) + \varepsilon_2 f(2\eta)(\cos 2\xi'_2 - \cos 2\xi_1)}, \tag{16}$$

где $I_{1,2}$ — анодный ток, текущий через спицы первого и второго типа соответственно (величины $I_{1,2}$ определяются методами работы [5] и будут найдены позже).

Учитывая соотношения (5), (6), (8), (10 — 12), (15) и (16), можно заключить, что в переменных $\tau = \omega t$, ξ и η интегралы взаимодействия (1) — (4) сводятся к произведениям интегралов типа

$$\int_0^{2\pi} d\tau = 2\pi; \qquad \int_0^{h} dz = h;$$

$$\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\xi \cos(\xi + \psi_1)\,\rho(\xi, \eta). \tag{17}$$

Заметим, что

$$\rho(\xi, \eta) = \begin{cases} \rho_1(\eta), & \xi_1(\eta) \leqslant \xi \leqslant \xi_2(\eta); \\ \rho_2(\eta), & \xi'_1(\eta) \leqslant \xi \leqslant \xi'_2(\eta), \end{cases} \tag{18}$$

где ψ_1 — фаза поля E_1 в середине спицы первого типа; ξ_0, ξ_0' — положение середины спицы первого и второго типа.

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} d\xi \cos(\xi + \psi_1)\,\rho = \rho_1 \cos\psi_1 \sin\Delta_1 + \rho_2 \cos(\xi_0 + \psi_1)\sin\Delta_2 . \qquad (19)$$

Здесь предполагалось, что середина первой спицы располагается в точке $\xi = 0$ и

$$\Delta_1 = |\xi_1| = |\xi_2|, \; \Delta_2 = |\xi_0 - \xi'_1| = |\xi_0 - \xi'_2|, \qquad (20)$$

где ξ_0 — положение середины второй спицы.
Аналогично

$$\int_0^{2\pi} d\xi \cos(2\xi + \psi_2)\,\rho = \rho_1 \cos\psi_2 \sin\Delta_1 + \rho_2 \cos(2\xi_0 + \psi_2)\sin\Delta_2. \qquad (21)$$

С учетом соотношений (17 — 21) исходная система уравнений (1)— (4) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\tau} = -\frac{\varepsilon_1}{2Q_1} + r_1 \int_0^{\eta_0} d\eta f(\eta)\,[j_1 n_1 \cos\psi_1 M_1 + j_2 n_2 \cos(\xi_0 + \psi_1) M_2]; \qquad (22)$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = -\delta_1 + r_1 \int_0^{\eta_0} d\eta f(\eta)\,[j_1 n_1 \sin\psi_1 M_1 + j_2 n_2 \sin(\xi_0 + \psi_1) M_2]; \qquad (23)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\tau} = -\frac{\varepsilon_2}{2Q_2} + r_2 \int_0^{\eta_0} d\eta f(2\eta)\,[j_1 n_1 \cos\psi_2 M'_1 + j_2 n_2 \cos(2\xi_0 + \psi_2) M'_2]; \qquad (24)$$

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = -\delta_2 + r_2 \int_0^{\eta_0} d\eta f(2\eta)\,[j_1 n_1 \sin\psi_2 M'_1 + j_2 n_2 \sin(2\xi_0 + \psi_2) M'_2], \qquad (25)$$

где использованы обозначения

$$r_{1,2} = \frac{I_0 R_{1,2}}{2\beta E_0}, \quad j_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{I_0}; \qquad (26)$$

$$n_{1,2} = E_0 h \rho_{1,2} / \beta I_1; \qquad (27)$$

$$M_{1,2} = \frac{\sin\Delta_{1,2}}{\Delta_{1,2}}, \quad M'_{1,2} = \frac{\sin 2\Delta_{1,2}}{2\Delta_{1,2}}. \qquad (28)$$

Упрощенные уравнения

Система уравнений (22)—(25) представляет основу нелинейной самосогласованной теории умножительного плоского магнетрона в рамках применимости метода П. Л. Капицы. Однако в общем виде она весьма сложна и использовать ее можно только в сочетании с численным счетом на ЭВМ. Основную сложность придают ей интегральные члены в правых частях уравнений. В связи с этим представляет интерес их корректное упрощение.

Проанализируем зависимость отдельных величин подынтегрального выражения от координаты η. Заметим, что j_n, ψ_n от η не зависят по определению. Положение центра спицы ξ_0 от η, вообще говоря, зависит. Но при слабом рассинхронизме эта зависимость слаба. При точном синхронизме волны и тока она отсутствует (5).

Поэтому далее будем считать, что $\xi_0'(\eta)=0$ (предвидя это, выше положено, что середина первой спицы находится при $\xi=0$ при всех η). От η зависят коэффициенты взаимодействия M_i; M_i убывают с ростом ширины спицы, т. е. M_i возрастает с изменением η, что приводит к возрастанию напряженности высокочастотного поля. Такой же качественно характер имеет и зависимость $f(\eta)$, однако $f(\eta)$ значительно быстрее изменяется с изменением η, чем $M_i(\eta)$, что видно из соотношений (10)—(12). Особенно сильным отличие в темпах изменения $f(\eta)$ и $M_i(\eta)$ будет при хорошей фокусировке спиц ($\Delta/2\pi \ll 1$), который представляет наибольший интерес. В этом случае $M_i \sim 1$ и медленно изменяется, тогда как в данной области $f(\eta)$ изменяется экспоненциально быстро.

Из соотношений (27) и (15), (16) видно, что n_i зависят от η. Эта зависимость выражается величинами типа $f(\eta)g(\eta)$, где $g(\eta)=\cos\xi_2(\eta)-\cos\xi_1(\eta)$.

При этом и $f(\eta)$ и $g(\eta)$ быстро изменяются с изменением η. Однако, когда $f(\eta)$ быстро убывает, $g(\eta)$ столь же быстро возрастает. Поэтому произведение $f(\eta)g(\eta)$ естественно считать медленной функцией в сравнении с одной из них.

Итак, в подынтегральных выражениях имеется только одна быстрая функция $f(\eta)$. Остальные зависимости можно считать в сравнении с $f(\eta)$ медленными. Учитывая это, можно вычислить интегралы взаимодействия, используя идею метода Лапласа.

Согласно методу Лапласа, необходимо подынтегральную функцию разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{\eta}$, где быстрая функция имеет наибольшие значения, и провести интегрирование. Полученный после интегрирования асимптотический ряд будет тем точнее аппроксимировать исходное выражение, чем больше членов этого ряда будет учтено.

Хотя выписывание членов ряда не представляет трудности, тем не менее эта процедура громоздка, и мы ограничимся ниже лишь первым членом, имея в виду, что далее в этой работе будет использовано только это выражение.

Итак, упрощенная система уравнений будет иметь вид

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\tau}=-\frac{\varepsilon_1}{2Q_1}+\left[\frac{A_1\cos\psi_1}{\varepsilon_1 k_1+\varepsilon_2 k_2}+\frac{A_2\cos(\psi_1+\varphi_1)}{\varepsilon_1 k_1'-\varepsilon_2 k_2'}\right]; \tag{29}$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = -\delta_1 + \left[\frac{A_1 \sin \psi_1}{\varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2} + \frac{A_2 \sin (\psi_1 + \varphi_1)}{\varepsilon_1 k_1' - \varepsilon_2 k_2'}\right]; \tag{30}$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\tau} = -\frac{\varepsilon_2}{2Q_2} + \left[\frac{A_1' \cos \psi_2}{\varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2} + \frac{A_2' \cos (\psi_2 + \varphi_2)}{\varepsilon_1 k_1' - \varepsilon_2 k_2'}\right]; \tag{31}$$

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = -\delta_2 + \left[\frac{A_1' \sin \psi_2}{\varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2} + \frac{A_2' \sin (\psi_2 + \varphi_2')}{\varepsilon_1 k_1' - \varepsilon_2 k_2'}\right], \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= r_1 j_1 M_1^{(0)}; & A_2 &= r_1 j_2 M_2^{(0)}; \\ A_1' &= r_2 j_1 M_1'^{(0)}; & A_2' &= r_2 j_2 M_2'^{(0)}; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(\eta)(\cos \xi_2 - \cos \xi_1), & k_2 &= f(2\eta)(\cos 2\xi_2 - \cos 2\xi_1); \\ k_1' &= f(\eta)(\cos \xi_2' - \cos \xi_1'); & k_2' &= f(2\eta)(\cos 2\xi_2' - \cos 2\xi_1'). \end{aligned} \tag{34}$$

При этом в соотношениях (33), (34) вместо η подставлено η.

Уравнения (29)—(34) представляют собой систему обыкновенных нелинейных уравнений. Они позволяют произвести сравнительно простой анализ различных физических ситуаций и допускают достаточно ясную физическую трактовку.

Более того, система уравнений (29)—(32) может быть записана на основании положений теории С. И. Бычкова. Это объясняется тем, что использование первого члена асимптотического ряда Лапласа эквивалентно предположению, что плотность тока в спице и ширина ее постоянны по высоте. При этом второе слагаемое в правой части уравнения (29) определяет вклад в мощность основной гармоники спиц первого типа, последнее слагаемое—спиц второго типа. Точно так же можно трактовать смысл всех остальных слагаемых уравнений (29)—(32). Понятно также физическое содержание отдельных коэффициентов. Так, коэффициент r_1 определяет удельный вес рабочей пространственной гармоники в ряду других гармоник, $\cos\psi$ определяет уменьшение мощности взаимодействия за счет отставания тока по фазе от высокочастотного поля, коэффициент M — уменьшение мощности из-за нелокального взаимодействия и совершенно эквивалентен коэффициенту взаимодействия в теории клистрона [13]. Наличие в знаменателе сумм, содержащих ε_1 и ε_2, объясняется тем, что в формировании спиц обоих типов принимают участие поля на частоте ω и на частоте 2ω.

Наличие коэффициентов $k_i \neq 1$ отражает неравноценность влияния этих полей на формирование различных спиц.

Таким образом, проделанные выше выкладки при получении уравнений (29)—(32) стоит рассматривать как обоснование метода С. И. Бычкова на основании более строгой теории и как вывод явного вида соотношений, определяющих все параметры задачи.

Полученные системы уравнений способны описывать стационарные режимы и режимы установления колебаний. При этом соответствующий генератор может работать как автономно, так и при возбуждении от внешнего источника высокочастотных колебаний. В последнем случае частота генерации (ω или 2ω) совпадает с частотой внешнего источника. А уравнения (22)—(25) либо (29)—(33) определяют амплитуду и фазу возбуждаемого автогенератора.

Если умножительный магнетрон (генератор гармоник — терминология работы [1]) возбуждается автономно, частота генерации должна быть определена из дисперсионного соотношения, которое получится из совместного решения уравнений (29)—(33) (либо — (22)—(25)), при условии, что фаза ψ_1 будет известна из связи тока и поля при $x=0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена самосогласованная система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для амплитуд и фаз, описывающая процесс установления колебаний в плоском умножительном магнетроне применительно к двукратному умножению частоты. Полученные уравнения могут быть использованы для исследования различных режимов магнетрона при решении их методом численного счета.

Анализ подынтегральных выражений показывает, что из них можно выделить медленные и (экспоненциально) быстрые члены. Применение этой методики приводит исходную систему к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих простой анализ. Показано, что удержание только первого слагаемого асимптотического ряда эквивалентно применимости метода С. И. Бычкова в теории магнетрона. Проанализирован физический смысл величин, входящих в систему упрощенных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strauss W., Kroll N. Увеличение мощности гармоник в магнетронах. — Proc. IEEE, 1964, vol. 52, (№ 8), p. 884—893.
2. Osepchuk J. M. Cascade crossfield tubes improve microwave generation. Frequency 1967, 5, № 3, p. 32—34.
3. Поспелов Л. А., Усиков А. Я. Приборы СВЧ с гармонизированным электронным потоком. — УФЖ, 1970, 15, № 5, с. 764—768.
4. Мейлус И. О. Исследование двухкаскадного умножителя частоты магнетронного типа. Автореф. канд. дисс. Москва. 1971. 17 с.
5. Капица П. Л. Электроника больших мощностей. М., Изд. АН СССР, 1962. с. 195.
6. Нечаев В. Е. Приближенный анализ процессов в многорезонаторном магнетроне (плоская модель). — Изв. вузов. Радиофизика, 1962, 5, № 3, с. 534—548.
7. Бычков С. И. Вопросы теории и практического применения приборов магнетронного типа. М., «Сов. радио», 1967. 216 с.

8. Вайнштейн Л. А. Стабильность колебаний в генераторах магнетронного типа. — Сб. «Электроника больших мощностей». Вып. 3. М., Изд. АН СССР. 1964, с. 36—69.

9. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962. 200 с.

10. Поспелов Л. А. К нелинейной теории ЛБВМ. — «Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ», 1972. Вып. 1, с. 94—96.

11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958. 408 с.

12. Feinstein J., Kino G. S. Лампы бегущей волны со скрещенными полями при большом сигнале. — Proc. IRE, 45, № 10, 1957, p. 1364—1373.

13. Гвоздовер С. Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. М., Гостехтеориздат, 1956. 527 с.